Preis

aus der ~~Algebra~~ Geometrie

zuerkannt

dem Schüler des I Curses

Schmetzer Ludwig

Regensburg, den 7. August 1869

Dietrich

Lehrbuch

der

Arithmetik

mit Einschluß

der Algebra und der niederen Analysis.

Lehrbuch

der

Arithmetik

mit Einschluß

der Algebra und der niederen Analysis.

Zum Gebrauch bei den Vorträgen an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und zum Selbstunterricht

bearbeitet von

Dr. K. H. M. Aschenborn,

Professor am Berliner Cadettenhause, Lehrer und Mitglied der Studien-Commission der vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule, Mitglied der Ober-Militair-Examinations-Commission.

Zweite Auflage.

Berlin 1867.

Verlag der Königlichen Geheimen Ober-Hofbuchdruckerei
(R. v. Decker).

Vorrede zur ersten Auflage.

Das vorliegende Lehrbuch ist zunächst zum Gebrauch bei den Vorträgen an der Königlichen vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule bestimmt. Dieser Zweck ist für Umfang, Inhalt und Methode maßgebend gewesen.

Die Grenzen des Buches sind durch die Unterrichts-Vorschriften der genannten Schule gegeben; über sie hinaus durfte der Verfasser nicht gehen.

Es soll den Inhalt der Vorträge so vollständig enthalten, daß das Nachschreiben und Ausarbeiten derselben beseitigt und mehr Zeit für Uebungen und Anwendungen gewonnen wird. Diejenigen Zuhörer, welche dem Unterrichte nur mit Unterbrechung beiwohnen konnten, sollen durch dasselbe in den Stand gesetzt werden, durch Selbststudium das Versäumte nachzuholen und zum Verständniß der weiteren Vorträge sich vorzubereiten.

Das Buch ist für Leser geschrieben, welche in den Anfangsgründen der Mathematik nicht ganz ungeübt sind, und deren geistige Entwicklung sie befähigt, strengen mathematischen Untersuchungen zu folgen, gewöhnliche Schlüsse aber ohne Leitung selbst zu machen. Der Verfasser hat daher anfänglich — in den ersten drei Kapiteln, welche die Elemente der Buchstabenrechnung enthalten — die einfacheren Gesetze nur durch ihre Formeln ausgedrückt und sich darauf beschränkt, zum Lesen und Beweisen dieser Formeln im Allgemeinen die Anleitung zu geben; sein Hauptaugenmerk war die strenge Begründung

aller Gesetze und die Entwicklung ihres logischen Zusammenhanges. Die Ausführung im Einzelnen konnte dem Leser um so mehr überlassen werden, als das Erkennen der Gesetze aus ihren Formeln nur geringe Vorkenntnisse und Uebung erfordert, die Beweise der Formeln aber auf bestimmten, sehr einfachen und hinreichend entwickelten Principien beruhen, überdies fast immer dieselbe Form des Schließens verlangen. Der Stoff ist so mehr zusammengedrängt und übersichtlicher geworden, dem Leser aber das Erkennen der einzelnen Theile leichter gemacht. In den folgenden Kapiteln ist der Verfasser auch bei den Beweisen ausführlich gewesen.

Einen guten Theil des Unterrichts, den dieses Lehrbuch dem Leser gewähren soll, hat der Verfasser in die Uebungs-Beispiele gelegt, welche erläuternd nnd übend den Vortrag durch alle seine Theile begleiten. Diese Beispiele sind von dem Verfasser gebildet, also neu. Eine Ausnahme machen einige wenige, die ihm gelegentlich mitgetheilt wurden, und bei welchen es sich um Zahlen handelt, die praktischen Versuchen oder Regeln entnommen sind. Ob diese Beispiele (S. 251 Nr. 5.; S. 255 Nr. 7., 8., 9.; S. 398 Nr. 1. und S. 399 Nr. 2., 3.) aus Lehrbüchern herstammen, kann der Verfasser nicht angeben. Bei zwei anderen Beispielen sind die Quellen angeführt. Daß aber auch unter den übrigen Beispielen manche vorkommen, die so ziemlich in jedem Lehrbuche zu finden sind, versteht sich wohl von selbst; es sind dies Beispiele, die jeder Mathematiker zur Hand hat, weil sie entweder selbst kleine praktische Regeln enthalten, oder für Anwendungen wichtig sind, z. B. $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a$, $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$, $a^2-b^2-c^2+2bc=(a+b-c)(a-b+c)$ u. s. w. Hierzu gehören die Beispiele S. 103 Nr. 11.; S. 109 Nr. 9. bis 16.; S. 112 Nr. 50.; S. 378 Nr. 11.; S. 387 Nr. 11. bis 17. u. s. w. Auch die Sätze in §. 79. Nr. 1. bis 10., in §. 86. Nr. 11. bis 14. und in §. 167. Nr. I., II. und IV. möchten hierher zu rechnen sein.

Die Beispiele in dem vorliegendem Buche sind zwar zu einer allgemeinen Einübung hinreichend; aber da es in dem Zwecke eines solchen Werkes überhaupt nicht liegen kann, Beispiel-Sammlungen zu ersetzen, so kann der Verfasser nur dringend empfehlen, zur weiteren Uebung derartige zu benutzen, wie wir sie in den Werken von W. H. von Rouvroy, E. Heis, F. Hofmann, Lehmus, Miles Bland (übersetzt von Celsus Girl), J. Rogner, Meier Hirsch u. A. besitzen.

Es wird den Verfasser freuen, wenn seine Arbeit auch außerhalb des Kreises, für den sie zunächst bestimmt ist, Freunde findet.

Für Diejenigen, welche das Buch zur Vorbereitung auf das Portepeefähnrich-Examen in der Preußischen Armee benutzen wollen, sei bemerkt, daß hierzu das Studium folgender Theile erforderlich ist:

1) Der ganze erste Abschnitt, wobei die §§. 88. 91. 92. 117. 120 .II. und 123. Nr. 4 übergangen werden können.
2) Vom zweiten Abschnitte die ersten zwei Kapitel.
3) Vom dritten Abschnitte die §§. 183., 184., 191., 192. und 193.

Berlin, im April 1859.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Zu den Verbesserungen in der vorliegenden zweiten Auflage des Lehrbuches der Arithmetik ist der Verfasser durch seine Erfahrungen bei dem Gebrauche der ersten Auflage und durch die dem Buche zu Theil gewordene, eben so wohlwollende, als belehrende Kritik veranlaßt worden. Er stattet den Herren Beurtheilern seines Werkes, im Besonderen dem Herrn Professor Dr. Erler, dessen in der Zeitschrift für das Gymnasialwesen ausgesprochene Ansichten ihn vielfach bei den Abänderungen geleitet haben, seinen aufrichtigen Dank ab.

Die Verbesserungen haben die Methode, die Grenzen und die Eintheilung des Buches nicht berührt; sie bestehen theils in einer schärferen Fassung einzelner Erklärungen, Erläuterungen und Beweise (z. B. §. 13. 30. 32. 39. 59. 180. 204.), theils in Ergänzungen (z. B. §. 89. V. 140. Anm. 1. 152., namentlich Anm. 1., 156. Anm. 159. 163. 184. 191. 202. Anm. 236. Anm. 1.); eine völlige Umarbeitung hat §. 164. erfahren.

Die Uebungsbeispiele sind nicht unerheblich vermehrt worden. Die neuen Beispiele erläutern das dem Buche neu Hinzugefügte, oder sie ergänzen die früheren Beispiele (z. B. §. 176. 223.), oder sie haben nur den Zweck, dem Leser einen erweiterten Uebungsstoff zu bieten. Auch diese Beispiele hat, wie die früheren, der Verfasser selbst neu gebildet; eine Ausnahme machen zwei, bei welchen die Quellen angeführt sind. Der Verfasser, welcher die Uebungsbeispiele als einen wesentlichen Bestandtheil des Buches ansieht, hofft durch die reichere Auswahl derselben die praktische Brauchbarkeit des Buches, namentlich für Diejenigen, welche es zum Selbstunterricht benutzen, erhöht zu haben.

Berlin, im Februar 1867.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Die Buchstaben- und Ziffernrechnung.

§. 7. bis §. 129.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Sechstes Kapitel.

Zweiter Abschnitt.

Die Algebra.

§. 130. bis §. 167.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Uebungs-Aufgaben.

Beispiele über einzelne Sätze und Aufgaben suche man bei diesen auf.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

Allgemeine Einleitung.

§. 1.

Die Zahl ist ein uns gegebener einfacher Begriff; durch sie unterscheiden wir die Mehrheit von der Einheit und drücken erstere als Vielfaches der Einheit aus.

Wenn die Einheit ein bestimmtes Ding ist, z. B. ein Thaler, ein Pfund, so fügt man dieses Ding, den Thaler, das Pfund, der Zahl, welche die Menge solcher gleichen Einheiten angiebt, als Benennung hinzu, sagt also etwa: 8 Thaler, 6 Pfund, und nennt nun die Zahl eine benannte Zahl. Eine Zahl ohne Benennung heißt eine unbenannte oder abstracte Zahl, und eine solche (6, 8, 12, u. s. w.) zählt nur eine Menge völlig unbestimmter Einheiten. Die 1 ist diese Einheit der abstracten Zahl und ist also in der 2 zweimal enthalten, in der 3 dreimal, u. s. w.

Die benannte Zahl dient zum Erkennen der Größe; denn wir nennen jedes Ding eine Größe, welches durch eine benannte Zahl ausgedrückt ist, oder doch ausgedrückt werden kann.

Eine Größe messen heißt angeben, wie oft eine andere Größe, das Gemäß oder die Einheit genannt, in der ersteren enthalten ist. Beide Größen müssen daher von gleicher Art sein. Man kann also eine Geldsumme nur wieder durch eine Geldsumme messen, etwa durch den Thaler; das Gewicht eines Körpers nur wieder durch ein solches Gewicht, etwa durch das Pfund u. s. w. Durch das Messen drückt man eine Größe als eine benannte Zahl aus; das Gemäß ist die Benennung, und die benannte Zahl selbst heißt das Maß der Größe.

§. 2.

Die Mathematik ist die Wissenschaft, welche sich mit dem Vergleichen der Größen beschäftigt und mit den zu dieser Vergleichung

nöthigen Eigenschaften der Größen. Da nun aber das Vergleichen der Größen mit Hülfe der Zahlen geschieht, so beschäftigt sich die Mathematik:

1) mit den unbenannten Zahlen (Zahlenlehre),
2) mit den Größen (Größenlehre).

Alle Größen haben die allgemeine Eigenschaft, daß sie sich durch benannte Zahlen ausdrücken lassen; dann aber haben noch einzelne Größen besondere gemeinsame Eigenschaften, durch welche sie sich von anderen Größen unterscheiden.

Die Größenlehre zerfällt daher in zwei Theile:

1) die allgemeine Größenlehre oder die Lehre von den benannten Zahlen, und
2) die besondere Größenlehre oder die Lehre von den Größen besonderer Art.

Die allgemeine Größenlehre, d. h. die Lehre von den benannten Zahlen, hängt aber so eng mit der Lehre von den unbenannten Zahlen zusammen, daß sie aus dieser unmittelbar folgt. Beide Lehren können daher in Verbindung mit einander in einem Abschnitte vorgetragen werden.

Unter den Größen besonderer Art sind hauptsächlich zwei Gegenstand mathematischer Untersuchung: die Raumgrößen und die Kraftgrößen; daher zerfällt die besondere Größenlehre in zwei diesen Größen entsprechende Abschnitte.

Aus dem Gesagten ergiebt sich nun die Eintheilung der Mathematik in drei Haupttheile:

I. Die Arithmetik oder die Lehre von den Zahlen, mit Einschluß der allgemeinen Größenlehre.
II. Die Geometrie oder die Lehre von den Raumgrößen.
III. Die Mechanik oder die Lehre von den Kraftgrößen.

Erster Theil.

Die Arithmetik.

Einleitung.

§. 3.

Die Arithmetik lehrt die Eigenschaften der Zahlen kennen und die Zahlen bestimmten Zwecken gemäß verbinden. Sie setzt den einfachen Begriff „Zahl" voraus, d. h. die Kenntniß der Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . . . Diese Zahlen nennen wir die natürlichen Zahlen, im Gegensatz zu solchen Zahlen, welche aus ihnen nach bestimmten Erklärungen gebildet und dann besonders benannt werden (z. B. negative, gebrochene, irrationale Zahlen).

Zur Bezeichnung der Zahlen bedient man sich der Buchstaben a, b, c, α, β u. s. w., um Gesetze, welche für alle Zahlen gelten, beweisen, oder Untersuchungen, welche auf beliebige Zahlen sich erstrecken sollen, führen zu können.

Wenn man nun aus den natürlichen Zahlen auf eine bestimmte Art, d. h. einer bestimmten Erklärung gemäß, sich neue Zahlen zusammengesetzt denkt, so braucht man Zeichen oder Bilder, um diese neuen Zahlen auszudrücken. Solche Bilder müssen zunächst die Zahlen, aus welchen sie zusammengesetzt sind, enthalten, dann aber auch die Art ihrer Zusammensetzung deutlich erkennen lassen, und dieses Charakteristische giebt man ihnen entweder durch eine besondere Stellung der Zahlen oder Buchstaben (ab, 4^7, a_n), oder durch besondere Operationszeichen: $+$, $-$, $\times$ u. s. w., durch welche man die Zahlen oder Buchstaben verbindet ($a+b$, $20-7$, $c \times d$). Dieser Charakter des Bildes, den man seine Form nennt, während das Bild selbst ein Zahlen- oder Buchstabenausdruck oder auch nur ein Ausdruck heißt, unterwirft es immer einer bestimmten Erklärung und entscheidet über seinen Namen.

§. 4.

Bezeichnen zwei Ausdrücke a und b dieselbe Zahl, so nennt man sie gleich, schreibt $a = b$ (a gleich b), nennt diese Darstellung eine Gleichung und a die linke, b die rechte Seite derselben. Bezeichnen aber a und b ungleiche Zahlen, so nennt man diejenige, etwa a, welche in der Reihe der natürlichen Zahlen später vorkommt, also mehr Einheiten enthält, als die andere b, die größere, schreibt $a > b$ (a größer als b), oder $b < a$ (b kleiner als a), und nennt jede solche Darstellung eine Ungleichung, a und b ihre Seiten. Ist nun: 1) $a = b$ und $b = c$, so folgt $a = c$.

2) $a > b$ und $b = c$, so folgt $a > c$.

3) $a > b$ und $a = c$, so folgt $c > b$.

4) $a > b$ und $b > c$, so folgt $a > c$.

§. 5.

Die sieben Zahlenverbindungen oder Rechnungsarten.

1) Die Addition. Sie entsteht, wenn man die Einheiten einer Zahl a zu denen einer Zahl b hinzuzählt. Die Zahl, welche dadurch entsteht, bezeichnet man durch $a + b$ (a plus b), sagt „a ist zu b addirt", nennt diesen Ausdruck eine Summe und a und b ihre Summanden. Zu einer solchen Summe kann man eine dritte Zahl c addiren und so fortfahren, also eine Summe beliebig vieler Summanden erzeugen, z. B. $a + b + c + d + e$.

2) Die Multiplication. Sind alle Summanden einander gleich, etwa jeder $= b$, und ist ihre Anzahl $= a$, so schreibt man kürzer $a \times b$ oder $a \cdot b$ (a mal b), sagt „b ist mit a multiplicirt", nennt den Ausdruck ein Product und a und b seine Factoren.

z. B. $3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12$.

$4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$.

Mit dem Product $a \times b$ kann man eine dritte Zahl c multipliciren und so fortfahren, also ein Product beliebig vieler Factoren erzeugen, z. B. $a \times b \times c \times d \times e$.

3) Die Potenzirung. Sind alle Factoren einander gleich, etwa jeder $= a$, und ist ihre Anzahl $= n$, so schreibt man kürzer a^n (a hoch n), sagt „a ist mit n potenzirt" oder „auf die nte Potenz erhoben" und nennt den Ausdruck eine Potenz, a den Dignanden (die Basis) und n den Exponenten.

z. B. $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$; $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

Aus diesen drei directen Rechnungsarten ergeben sich vier indirecte.

4) Die Subtraction. Man kann sich eine Zahl a als Summe denken, den einen Summand b geben und den andern zu bestimmen suchen. Man bezeichnet ihn durch $a - b$ (a minus b), sagt „b ist von a subtrahirt oder abgezogen" und nennt den Ausdruck eine Differenz, a den Minuend und b den Subtrahend.

z. B. $12 - 7 = 5$, weil $7 + 5 = 12$ ist.

5) Die Division. Man kann a als Product betrachten, den einen Factor b geben und den andern zu bestimmen suchen. Man bezeichnet ihn durch $\frac{a}{b}$ oder $a:b$ (a durch b), sagt „a ist durch b dividirt" und nennt den Ausdruck einen Quotienten, a den Dividendus und b den Divisor.

z. B. $24:6 = 4$, weil $6 \times 4 = 24$ ist.

6) Die Radication oder Wurzelausziehung. Man kann a als Potenz betrachten, den Exponenten n geben und den Dignanden zu bestimmen suchen. Man bezeichnet ihn durch $\sqrt[n]{a}$ (nte Wurzel aus a), sagt „a ist durch n radicirt" oder „aus a ist die nte Wurzel gezogen" und nennt den Ausdruck eine Wurzel, a den Radicanden und n den Wurzelexponenten.

z. B. $\sqrt[3]{8} = 2$, weil $2^3 = 8$ ist.

7) Die Logarithmation. Man kann a abermals als Potenz betrachten, den Dignanden b geben und den Exponenten zu bestimmen suchen. Man bezeichne ihn durch $\overset{b}{\log} a$ (Logarithmus a für die Basis b), sagt „a ist durch b logarithmirt" und nennt den Ausdruck einen Logarithmus, a den Logarithmand und b die Basis.

z. B. $\overset{4}{\log} 16 = 2$, weil $4^2 = 16$ ist.

Anmerk. Von der Summe führt dieselbe Rechnungsart zu jedem der beiden Summanden zurück, wenn der andere gegeben ist; dasselbe gilt vom Product in Beziehung auf jeden Factor, nicht aber von der Potenz in Beziehung auf Dignand und Exponent. Daher entspringen aus der Potenz zwei indirecte Rechnungsarten, hingegen aus der Summe und dem Product nur je eine. Den Grund finden wir später in den Sätzen: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$; hingegen ist a^b nicht $= b^a$.

§. 6.

Nicht nur einfache Zahlen, sondern auch Ausdrücke, welche aus ihnen durch die sieben Rechnungsarten entstehen, können wieder zu Summen, Differenzen u. s. w. verbunden werden. Solche Verbindungen ausführen und die Resultate auf die einfachste Form bringen,

heißt rechnen, und wenn man sich zur Bezeichnung der Zahlen der Buchstaben bedient, heißt die Rechnung Buchstabenrechnung, im Gegensatz zur Rechnung mit bestimmten Zahlen.

Verbindet man natürliche Zahlen mit einander, so findet man bald, daß nicht jede Verbindung wieder eine natürliche Zahl ist. Allerdings ist dies bei der Summe, dem Product und der Potenz der Fall, aber die indirecten Rechnungsarten geben sehr häufig neue Zahlenformen. So sind $6 - 9$, $\frac{7}{4}$, $\sqrt[3]{2}$, $\overset{3}{\log}\, 5$ nicht natürliche Zahlen. Die Arithmetik hat die Bedeutung dieser Zahlenformen zu erklären, die für sie gültigen Gesetze zu suchen und zu beweisen und ihren Nutzen in der Wissenschaft, so wie ihre Anwendbarkeit auf das praktische Leben zu zeigen.

Die Einführung solcher Zahlenformen hat eine Folge, auf welche wir schon jetzt hinweisen wollen. Man findet nämlich, daß jeder Ausdruck, so lange nur natürliche Zahlen in Betracht kommen, eine einzige Zahl bedeuten, hingegen mehr als eine Bedeutung haben kann, wenn man andere Zahlenformen (negative und imaginäre) zuläßt. Man richte daher bei den folgenden Untersuchungen seine Aufmerksamkeit auf zweierlei:

1) Man untersuche bei jedem durch eine Erklärung festgestellten Buchstabenausdruck, ob derselbe, wenn für die Buchstaben entweder natürliche Zahlen, oder auch bereits eingeführte andere Zahlenformen gesetzt werden, zu einer neuen Zahlenform führt, oder nicht.

2) Man beurtheile, ob ein solcher Ausdruck immer nur eine Zahl bedeutet, also eindeutig ist, oder ob er immer, oder unter gewissen Bedingungen, zwei oder mehrere Zahlen vorstellt, d. h. mehrdeutig ist.

Erster Abschnitt.

Die Buchstaben- und Ziffernrechnung.

(Arithmetik im engeren Sinne.)

Erstes Kapitel.

Die Summen und Differenzen.

§. 7.

Erklärung.

Die Summe $a + b$ bezeichnet die Zahl, welche so viel Einheiten enthält, als die Summanden a und b zusammengenommen.

Die Differenz $a - b$ bezeichnet die Zahl, welche zum Subtrahend b addirt, den Minuend a giebt.

Sind a und b natürliche Zahlen, so ist $a + b$ wieder eine solche, und immer nur eine, hingegen $a - b$ nur dann, wenn $a > b$ ist, was vorläufig vorausgesetzt wird.

Ist daher $a = b$ und $c = d$, so folgt:

1) $a + c = b + d$, 2) $a - c = b - d$, d. h. gleiche Zahlen zu gleichen addirt, oder von solchen abgezogen, geben wieder gleiche Zahlen.

Anmerk. Summen und Differenzen klammert man ein, wenn sie mit einander oder mit anderen Zahlen durch + und − verbunden werden, und diese Klammern sind nur dann fortzulassen, wenn nachgewiesen wird, daß hierdurch keine Undeutlichkeit entstehen kann.

§. 8.

Gesetze über Summen.

Unmittelbar aus der Erklärung der Summe folgt:

1) $a + b = b + a$,

2) $a + (b + c) = (a + b) + c$.

d. h. 1) Man kann die Summanden einer Summe vertauschen, und 2) eine Zahl wird zu einer Summe addirt, wenn man sie zu dem einen Summanden addirt und das, was herauskommt, noch zu dem andern.

3) Schreibt man nun $a + b + c$ ohne Klammern, so kann dieser Ausdruck doch nur im Sinne $a + (b + c)$, oder $(a + b) + c$ aufgefaßt werden, und weil diese Ausdrücke einander gleich sind, so hat man die Regel: Ist ein Summand einer Summe selbst eine Summe, so kann man ihn ohne Klammern schreiben.

So entsteht die Summe von drei und mehr Summanden, und aus 1. und 2. folgt, daß auch in einer solchen Summe die Summanden vertauscht werden dürfen;

z. B. $a + b + c + d + e = d + c + a + e + b$.

Anmerk. Jede Gleichung zwischen zwei Buchstabenausdrücken, welche ein allgemeines Gesetz enthält, wie $a + b = b + a$, wird eine Formel genannt.

§. 9.

Grundformeln für Summen und Differenzen.

I. $(a - b) + b = a$. II. $(a + b) - b = a$.

d. h. 1) Eine Differenz, zu ihrem Subtrahend addirt, giebt den Minuend.

2) Zieht man von einer Summe den einen Summand ab, so erhält man den anderen.

Die Richtigkeit der Formel I. folgt unmittelbar aus der Erklärung der Differenz $a - b$. Um II. zu beweisen, weiß man, daß die linke Seite die Zahl bedeutet, welche zu b addirt, $a + b$ giebt, und diese Zahl ist a, also die rechte Seite.

§. 10.

Diese beiden Formeln bilden die Grundlage für die Beweise der folgenden Gesetze. Man führt diese Beweise in der Regel dadurch, daß man zu jeder Seite der betreffenden Gleichung dieselbe Zahl addirt und zeigt, daß dadurch gleiche Summen entstehen. Man schließt also: es muß $a = b$ sein, wenn $a + x = b + x$ ist. Die Richtigkeit dieses Schlusses geht aus §. 7. 2 und §. 9. II. hervor. Es fragt sich nur: welche Zahl soll man addiren, um auf gleiche Summen zu kommen? Ist aber die eine Seite eine Differenz, so giebt die Erklärung derselben den nöthigen Rath. Man addirt zu beiden Seiten den Subtrahend der Differenz. Die eine Seite geht dann in den Minuend über (§. 9. I.), und man hat nur zu zeigen, daß dies auch die andere Seite thut. Soll z. B. die Richtigkeit der Gleichung $a - (a - b) = b$ bewiesen werden, so addire man zu beiden Seiten $a - b$; dann entsteht: $a = b + (a - b)$ oder $a = a$ (§. 9. I.).

§. 11.

Gesetze über Differenzen.

I. $a - b = (a + x) - (b + x)$.

II. $a - b = (a - x) - (b - x)$.

d. h. Eine Differenz bleibt (dem Werthe nach) unverändert, wenn man zum Minuend und Subtrahend dieselbe Zahl addirt, oder von beiden dieselbe Zahl abzieht.

Beweis zu I. Addirt man zu beiden Seiten $b + x$, so folgt:

$$(a - b) + b + x = a + x \text{ oder}$$
$$a + x = a + x.$$

II. folgt aus I.; denn addirt man zum Minuend und Subtrahend der rechten Seite (in II.) x, so geht sie in $a - b$ über.

§. 12.

Gesetze über die Verbindung von Summen und Differenzen mit einander und mit einfachen Zahlen.

I. $(a + b) - c = (a - c) + b$.

II. $a - (b + c) = (a - b) - c$.

III. $a - (b - c) = (a - b) + c$.

IV. $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$.

V. $(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c)$.

In jeder dieser Formeln liegen zwei Gesetze, weil man von der linken zur rechten Seite, wie von dieser zu jener übergehen kann. Man versäume nicht, diese Gesetze in Worte zu übertragen. Ein Beispiel wird genügen. Nehmen wir III. $a - (b - c) = (a - b) + c$, so enthält die Formel zwei Gesetze:

1) Eine Differenz wird von einer Zahl subtrahirt, wenn man den Minuend von ihr subtrahirt und zu der entstandenen Differenz den Subtrahend addirt.

2) Eine Zahl wird zu einer Differenz addirt, wenn man sie vom Subtrahend abzieht und die entstandene Differenz wieder vom Minuend.

Beweis. Zu beiden Seiten $b - c$ addirt, so entsteht:

$$a = (a - b) + c + (b - c)$$
$$a = (a - b) + b \text{ (§. 9. I.)}$$
$$a = a.$$

Formel V. beweist man am einfachsten, wenn man zum Minuend und Subtrahend der linken Seite $b + d$ addirt (§. 11.).

Die vorstehenden Sätze kann man erweitern, indem man sie auf Summen mehrerer Summanden anwendet; z. B.

$$a - (b + c + d) = [(a - b) - c] - d.$$
$$(a - \alpha) + (b - \beta) + (c - \gamma) + \ldots =$$
$$(a + b + c + \ldots) - (\alpha + \beta + \gamma + \ldots).$$

Von den positiven und negativen Zahlen und den algebraischen Summen.

§. 13.

Die allgemeine Differenz.

Die Differenz $a - b$ führt zu zwei neuen Zahlenformen. Sie war nur dann eine natürliche Zahl, wenn $a > b$ vorausgesetzt wurde, und diese Voraussetzung hatten wir in §. 7. gemacht. Um nun bei der Anwendung der Gesetze der Arithmetik durch Rücksichtnahme auf diese besondere Voraussetzung nicht gehemmt zu werden, müssen wir die Beschränkung $a > b$ jetzt fallen lassen, also $a - b$ für ganz beliebige Werthe von a und b als eine besondere Zahlenform in die Arithmetik einführen. Die Erklärung dieser Zahlenform ergiebt sich aus dem Zwecke ihrer Einführung. Alle für Differenzen bewiesenen Sätze sollen auf sie Anwendung finden, und hierzu ist nöthig, aber auch nur erforderlich, daß wir die in §. 7. für $a - b$ gegebene Erklärung (die Zahl, welche zu b addirt, a giebt), also die Formel

$$(a - b) + b = a$$

für ganz beliebige Werthe von a und b gelten lassen; denn alle für Differenzen bewiesenen Sätze folgten unmittelbar aus dieser Formel, sind mithin dann auch für beliebige Werthe von a und b richtig, d. h. ihre Anwendung kann niemals zu einem Widerspruch führen. Umgekehrt werden wir aus diesen Sätzen die Bedeutung der besonderen Zahlenformen, welche sich aus $a - b$ ergeben, wenn dieser Ausdruck keine natürliche Zahl ist, namentlich ihr Verhältniß zu den natürlichen Zahlen, dann auch die Regeln, nach denen man mit ihnen zu rechnen hat, ableiten müssen.

Wir führen also jetzt $a - b$ in dieser allgemeinen Bedeutung in die Arithmetik ein, nennen diesen Ausdruck die allgemeine Differenz und a ihren Minuend, b ihren Subtrahend.

In der allgemeinen Differenz $a - b$ unterscheiden wir drei Fälle:

1) Ist $a > b$, so ist $a - b$ eine natürliche Zahl, z. B. $9 - 5 = 4$, $12 - 7 = 5$. Allgemein können wir in diesem Falle, wenn r eine natürliche Zahl bedeutet, $a = b + r$ setzen, und erhalten:

$$a - b = (b + r) - b = r \quad (§. 9. II.).$$

2) Ist $a = b$, so ist $a - b$ keine natürliche Zahl. Wenden wir auf die Differenz $a - a$ das Gesetz der Differenz in §. 11. an, so finden wir:

$$a - a = (a + x) - (a + x),$$

z. B. $5 - 5 = 6 - 6 = 7 - 7$ u. s. w. Die nächste Folge der Einführung der allgemeinen Differenz in die Arithmetik ist also die, daß wir alle Differenzen gleicher Zahlen als gleich gelten lassen müssen, und jede solche Differenz bezeichnen wir mit 0 (Null); es ist also

$$a - a = 0.$$

3) Ist $a < b$, so ist $a - b$ auch keine natürliche Zahl. Die Anwendung des Gesetzes in §. 11. giebt dann:

$$a - b = (a - a) - (b - a) = 0 - (b - a).$$

Da $a < b$ ist, so ist $b - a$ eine natürliche Zahl; folglich ist jede Differenz, deren Minuend kleiner als der Subtrahend ist, einer Differenz gleich, deren Minuend 0 und deren Subtrahend eine natürliche Zahl ist, nämlich diejenige, um welche der Subtrahend der ursprünglichen Differenz größer als der Minuend ist. z. B.

$$7 - 12 = (7 - 7) - (12 - 7) = 0 - 5,$$
$$5 - 16 = 0 - (16 - 5) = 0 - 11.$$

Auch die Anwendung des Gesetzes §. 12. II. führt zu diesem Resultat. Ist r eine natürliche Zahl, so können wir, wenn $a < b$ ist, $b = a + r$ setzen, und erhalten:

$$a - b = a - (a + r) = (a - a) - r = 0 - r.$$

§. 14.

Die Null, die negative und die positive Zahl.

Die Bedeutung der Null ($a - a$, d. h. die Zahl, welche zu a addirt, a giebt) ist in der Gleichung

$$\text{I.} \quad 0 + a = a$$

ausgesprochen. — Die zweite Zahlenform, auf welche die Differenz führt, $0 - a$ bezeichnen wir durch $-a$, nennen sie eine negative Zahl, a ihr Glied und $-$ ihr Vorzeichen. Sie bedeutet die Zahl, welche zu a addirt, 0 giebt, d. h. ihre Bedeutung ist in der Gleichung ausgesprochen:

$$\text{II.} \quad (-a) + a = 0.$$

Die in §. 13. Nr. 3. angegebene Umformung führt sonach zu folgender Formel:

$$\text{III.} \quad a - b = -(b - a).$$

So wie nun die Subtraction (Verminderung) der Gegensatz der Addition (Vermehrung) ist, so erscheint $0 - a$ als Gegensatz von $0 + a$. Dies giebt Veranlassung, die Summe $0 + a$ durch $+a$ zu bezeichnen und eine positive Zahl zu nennen, a ihr Glied und $+$ ihr Vorzeichen. Endlich nennt man $-a$ und $+a$ ent-

gegengesetzte Zahlen, — und + entgegengesetzte Vorzeichen und jede Zahl ohne Vorzeichen eine absolute Zahl.

Ehe wir das Verhältniß der Null und der negativen Zahl zur natürlichen Zahl und ihre Anwendung auf Größen erläutern, wollen wir die Gesetze entwickeln, nach welchen man mit diesen Zahlenformen zu rechnen hat. Sie ergeben sich unmittelbar aus den für Differenzen bewiesenen Formeln, wenn man die Differenz zweier gleichen Zahlen statt 0, und $0 - a$ statt $-a$ setzt.

§. 15.

Für die Null findet man:

1) $a + 0 = 0 + a = +a = a$,

2) $a - 0 = a$, 3) $0 + 0 = 0$, 4) $0 - 0 = 0$.

Zum Beweise setze man für 0 die Differenz gleicher Zahlen. — Aus 1) und §. 14. II. folgt noch: 5) $(-a) + (+a) = 0$.

§. 16.

Gesetze der Addition und Subtraction positiver und negativer Zahlen.

I. $\begin{cases} (+a) + (+b) = +(a+b). \\ (-a) + (-b) = -(a+b). \end{cases}$

d. h. Zahlen mit gleichen Vorzeichen addirt man, wenn man ihre Glieder addirt und der Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen der Glieder giebt;

z. B. $(+3) + (+5) = +8$, $(-6) + (-8) = -14$.

II. $\begin{cases} (+a) + (-b) = +(a-b). \\ (+a) + (-b) = -(b-a). \end{cases}$

d. h. Zwei Zahlen mit ungleichen Vorzeichen addirt man, wenn man ihre Glieder von einander abzieht und der Differenz das Vorzeichen giebt, welches der Minuend hatte. Bei natürlichen Zahlen zieht man zweckmäßig das kleinere Glied von dem größeren ab und giebt dem Rest das Vorzeichen des größeren Gliedes;

z. B. $(+12) + (-7) = +(12-7) = +5$.

$(+12) + (-17) = -(17-12) = -5$.

Zum Beweise (I. und II.) setze man die absolute Zahl für die positive (§. 15. 1) und $0 - a$, $0 - b$ statt $-a$, $-b$.

III. $\begin{cases} (\pm a) - (+b) = (\pm a) + (-b). \\ (\pm a) - (-b) = (\pm a) + (+b). \end{cases}$

d. h. Zwei Zahlen mit beliebigen Vorzeichen werden von einander subtrahirt, wenn man das Vorzeichen des Subtrahendus in das entgegengesetzte verwandelt und nun die Zahlen nach den vorhergehenden Regeln addirt.

In Bezug auf die Bedeutung der Doppel-Vorzeichen ($\pm a$) gilt als Regel: Jede Formel mit Doppel-Vorzeichen enthält zwei Formeln; die eine erhält man, wenn man nur die oberen, die andere, wenn man nur die unteren Vorzeichen gelten läßt. Die vier Gleichungen, welche hiernach in den beiden Formeln in III. enthalten sind, kann man nach dieser Regel auch so schreiben:

$$(+a) - (\pm b) = (+a) + (\mp b)$$
$$(-a) - (\pm b) = (-a) + (\mp b)$$

Beispiele. $(+7) - (-3) = (+7) + (+3) = +10$
$(-7) - (+3) = (-7) + (-3) = -10$
$(+5) - (+6) = (+5) + (-6) = -1$
$(-5) - (-10) = (-5) + (+10) = +5.$

Zum Beweise der Formeln III. addire man zu beiden Seiten den Subtrahend der linken Seite und wende §. 15. 5. an.

§. 17.

Zusatz.

Die vorstehenden Gesetze geben in folgender Form recht praktische Regeln:

1) $n + (+a) = n + a$
2) $n + (-a) = n - a$
3) $n - (+a) = n - a$
4) $n - (-a) = n + a.$

d. h. Eine positive Zahl wird addirt oder subtrahirt, wenn man ihr Glied addirt oder subtrahirt; eine negative aber, wenn man umgekehrt ihr Glied subtrahirt oder addirt.

Setzt man $n = 0$, so folgt:

1) $+(+a) = +a$
2) $+(-a) = -a$
3) $-(+a) = -a$
4) $-(-a) = +a.$

d. h. Neben einander stehende gleiche Vorzeichen geben $+$, ungleiche $-$.

§. 18.

Die Null und die negativen Zahlen in Beziehung zu den natürlichen Zahlen.

Fangen wir von 1 zu zählen an, so erzeugen wir alle natürlichen Zahlen durch fortwährendes Addiren der Einheit: $1+1=2, 2+1=3, 3+1=4$, u. s. w. Wir können auch rückwärts zählen durch fortwährendes Subtrahiren der Einheit. Beginnen wir z. B. mit 20:

$20-1=19$, $19-1=18$, $18-1=17$, u. s. w. Vorher konnten wir ohne Aufhören fortzählen, jetzt setzt uns die 1 eine Grenze; wir schließen: $2-1=1$. Die 0 und die negativen Zahlen gestatten aber, das Subtrahiren der Einheit fortzusetzen; also: $1-1=0$, $0-1=-1$, $(-1)-1=-2$, $(-2)-1=-3$, u. s. w. ohne Aufhören. So beseitigen die Null und die negativen Zahlen die Grenze, welche die natürliche Zahlenreihe nach der einen Seite hin hat, und wir erhalten eine Zahlenreihe, in welcher sich die negativen Zahlen mittelst der Null den natürlichen Zahlen oder, wie wir jetzt sagen wollen, den positiven Zahlen anreihen.

Wir können uns diese Zahlenreihe auf folgende Weise versinnlichen: Wählen wir in einer Linie PQ einen Punkt A und tragen von ihm aus etwa nach rechts hin lauter gleiche Theile ab, welche wir durch Punkte markiren, und setzen an jeden Punkt die Zahl, welche die Theile von A bis zu diesem Punkte zählt, so versinnlichen diese Punkte die Zahlen 1, 2, 3, 4, u. s. w.

P A Q

−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Will man nun mit Hülfe dieser Darstellung addiren, z. B. 3 und 5, so muß man vom Punkte 3 nach rechts hin um fünf Längen weiter gehen, oder vom Punkte 5 um drei Längen; jedesmal gelangt man zu 8, d. h. es ist $3+5=5+3=8$. Um zu subtrahiren, z. B. 2 von 5, muß man vom Punkte 5 aus zwei Längen nach links gehen und gelangt zu 3, d. h. es ist $5-2=3$. Um 5 von 5 abzuziehen, müßte man vom Punkte 5 fünf Längen nach links gehen und würde zum Punkte A kommen, und weil $5-5=0$ ist, würde A die 0 versinnlichen. Um endlich eine größere Zahl von einer kleineren abziehen zu können, z. B. 8 von 5, müßten links von A noch Punkte liegen, zu welchen man dann durch Fortschreiten nach links gelangen würde. Trägt man also von A aus nach links wieder ebenso große gleiche Längen, als vorher, auf PQ ab, so würden deren Endpunkte die Zahlen -1, -2, -3, ꝛc. versinnlichen, d. h. von A aus 1, 2, 3 ꝛc. negative Einheiten abzählen. Geht man jetzt von 5 um acht Längen nach links, so gelangt man zu -3, d. h. es ist $5-8=-3$. Von jeder Zahl a der (so versinnlichten) Zahlenreihe, welche alle positiven und negativen Zahlen und die 0 umfaßt, kann man also nach zweierlei Richtungen zählen: vorwärts und rückwärts. Ersteres entspricht der Addition, letzteres der Subtraction. Nun war aber $a+b=a+(+b)$ und $a-b=a+(-b)$, daher heißt eine positive Zahl addiren „vorwärts zählen", eine negative Zahl addiren: „rückwärts zählen". Hieraus folgt nun die Erklärung der Summe $a+b$,

deren Summanden beliebige Zahlen jener Reihe sind: $a + b$ bedeutet die Zahl, welche entsteht, wenn man von dem einen Summanden aus in dem Sinne weiter zählt, welcher dem Vorzeichen des andern Summanden entspricht, und um so viel Einheiten, als das Glied des andern Summanden Einheiten hat. Ist der andere Summand 0, so heißt das, man soll nicht weiter zählen, sondern bei dem ersten Summanden stehen bleiben ($a + 0 = a$). Nach dieser Erklärung ist noch $a + b = b + a$. So ist z. B. $(+3) + (-8) = (-8) + (+3)$; denn zählt man von $+3$ acht Einheiten rückwärts, oder von -8 drei Einheiten vorwärts, so gelangt man beide Mal zu -5.

§. 19.

Erklärung. Folgerungen.

Die Null und die negativen Zahlen machen eine Erweiterung der in §. 4. gegebenen Erklärung nothwendig.

Sind a und b beliebige positive oder negative Zahlen oder 0, so heißt a größer als b, wenn die Differenz $a - b$ einer positiven Zahl gleich ist;

z. B. $12 > 7$, weil $12 - 7 = +5$.
$-4 > -6$, weil $(-4) - (-6) = +2$.
$0 > -1$, weil $0 - (-1) = +1$.

Hieraus folgt noch: $a < b$, wenn $a - b$ negativ ist, und $a = b$, wenn $a - b = 0$ ist. — Sind n und m absolute Zahlen, so ist:

1) $+n > 0$, 2) $-n < 0$, 3) $+n > -m$.

Ist noch $n > m$, so folgt:

4) $+n > +m$, 5) $-n < -m$.

Jede positive Zahl ist also größer, jede negative kleiner als Null; jede positive Zahl ist größer als jede negative; von zwei positiven Zahlen ist diejenige die größere, welche das größere Glied hat, von zwei negativen Zahlen aber diejenige, welche das kleinere Glied hat. — In Bezug auf die in §. 18. versinnlichte Zahlenreihe ist von zwei beliebigen Zahlen die mehr nach rechts liegende die größere, die mehr nach links liegende die kleinere.

§. 20.

Die algebraische Summe.

Eine Summe, deren Summanden beliebig positive oder negative Zahlen sind, heißt eine algebraische Summe. z. B.

$$(+a) + (-b) + (-c) + (+d) + (-f).$$

Man nennt a, b, c, ... ihre Glieder, hingegen $+a, -b, -c, \ldots$ ihre Summanden. — Dem Begriffe der algebraischen Summe, der

algebraischen Addition, entsprechend nennt man auch häufig die positiven und negativen Zahlen algebraische Zahlen. — Läßt man die Klammern und die sie verbindenden Additionszeichen fort, so erhält man die gewöhnliche Schreibart:

$$a - b - c + d - f.$$

Um also diesen Ausdruck richtig zu verstehen, darf man ein Glied nicht von seinem Vorzeichen trennen, sondern muß Glied und Vorzeichen zusammen als Summand einer Summe betrachten. z. B. $9 - 5 - 8 + 3 - 2 = -3$; denn $+9$ zu -5 giebt $+4$, hierzu -8 giebt -4, hierzu $+3$ giebt -1, hierzu -2 giebt -3.

Man kann aber die algebraische Summe $a - b - c + d - f$ auf eine zweite Art richtig auffassen, wenn man die Glieder von ihren Vorzeichen trennt und letztere als Additions- und Subtractionszeichen versteht. Dann aber muß man die Verbindung der Glieder nur von links nach rechts ausführen, d. h. von a ist b abzuziehen, hiervon c, zu dem, was heraus kommt, ist d zu addiren, endlich ist von dieser Summe f abzuziehen. Addirt man nämlich die Summanden nach den vorhergehenden Gesetzen, so entsteht:

$$a - b - c + d - f = ([(a - b) - c] + d) - f.$$

Da man die Summanden einer Summe vertauschen kann, so ist

$$a - b - c + d - f = -c + d + a - b - f$$
$$= a + d - b - c - f, \text{ u. s. w., d. h.}$$

man kann die Glieder in beliebiger Ordnung schreiben, wenn man jedem Gliede sein Vorzeichen läßt; z. B.

$$9 - 12 + 3 - 7 + 8 = 9 + 3 + 8 - 12 - 7 = +1.$$
$$-5 + 9 - 2 + 6 - 12 = -5 - 2 - 12 + 9 + 6 = -4.$$

§. 21.

Addition und Subtraction algebraischer Summen.

1) Algebraische Summen werden zu einander addirt, wenn man die Glieder der einen Summe zu den Gliedern der andern hinzuschreibt und jedem Gliede sein Vorzeichen läßt.

$$(a - b - c) + (d - e - f + g) = a - b - c + d - e - f + g.$$

2) Zwei algebraische Summen werden von einander subtrahirt, wenn man jedem Gliede des Subtrahendus das entgegengesetzte Vorzeichen giebt und die Glieder dann zu den Gliedern des Minuendus hinzuschreibt.

$$(a - b - c) - (d - e - f + g) = a - b - c - d + e + f - g.$$

Das erste Gesetz folgt unmittelbar aus §. 20.; um das zweite zu beweisen, addire man zu beiden Seiten den Subtrahend der linken Seite (§. 14. II.).

§. 22.

Klammern bei algebraischen Summen.

Die vorstehenden Gesetze kann man als Regeln auffassen, welche man bei dem Fortlassen (Auflösen) der Klammern, in welchen algebraische Summen stehen, zu befolgen hat. Steht vor den Klammern +, so behält, wenn man die Klammern auflöst, jedes Glied in den Klammern sein Vorzeichen; steht — vor den Klammern, so erhält jedes Glied, welches in den Klammern war, das entgegengesetzte Vorzeichen.

z. B. $a - (b - c) = a - b + c.$

$a + (b - c) - (d - f - g) = a + b - c - d + f + g.$

$a - [b - (c - d - f) + g] = a - b + c - d - f - g.$

Eben so wichtig ist die umgekehrte Regel: Schließt man Glieder einer algebraischen Summe in Klammern, so muß man, wenn vor die Klammern + gesetzt wird, jedem Gliede in den Klammern sein Vorzeichen lassen; setzt man aber — vor die Klammern, jedem Gliede in den Klammern das entgegengesetzte Vorzeichen geben; z. B.

$$a + b - c = a + (b - c) = a - (c - b)$$
$$a - b - c - d = a - (b + c + d)$$
$$a - b + c - d - f = (a + c) - (b + d + f)$$
$$a - b + c - d + e - f = (a - b) + (c - d) + (e - f)$$
$$= a - (b - c) - (d - e) - f$$
$$a - b - c = -(b + c - a).$$

§. 23.

Addition und Subtraction benannter Zahlen. Anwendung der negativen Zahlen auf Größen.

Die Summe zweier benannten Zahlen bezeichnet diejenige benannte Zahl, welche so viel (benannte) Einheiten enthält, als die Summanden zusammengenommen. Daher müssen die zu addirenden Größen gleichbenannte Zahlen sein, oder doch sich auf gleiche Benennung bringen lassen. Dasselbe gilt von der Differenz zweier Größen, welche die Größe bezeichnet, die zum Subtrahend addirt, den Minuend giebt. Zählt man nun a benannte Einheiten zu b solchen Einheiten hinzu, so erhält man offenbar a + b solche Einheiten, d. h. zwei gleichbenannte Zahlen werden addirt, wenn man die abstracten Zahlen addirt und der Summe dieselbe Benennung giebt. z. B. 10 Pfd. + 8 Pfd. = 18 Pfd., oder allgemein, wenn E die Benennung bedeutet:

1) $aE + bE = (a + b)E.$

Hieraus fogt unmittelbar:

2) $aE - bE = (a - b)E$

z. B. 16 Thlr. — 5 Thlr. = (16 — 5) Thlr. = 11 Thlr.

Man addirt oder subtrahirt also gleichbenannte Zahlen, wenn man diese Operation mit den abstracten Zahlen ausführt und die Benennung beibehält.

Hiernach würde $aE - aE = (a - a) E = 0E$ sein, z. B. 10 Lth. — 10 Lth. = 0 Lth., d. h. die 0 in Verbindung mit einer Benennung bedeutet: Nichts.

Welche Bedeutung hat aber die negative Zahl in Verbindung mit einer benannten Einheit? Gesetzt ein Förster soll von einem Fichtenbestande 200 Fichten fällen lassen. Hat der Bestand 210 Stämme, so kann der Förster 200 Fichten von 210 Fichten abziehen, um seinen Leuten die Anweisung zu geben: laßt 10 Stämme stehen, die anderen schlagt herunter. Hat aber der Bestand nur 190 Stämme, so giebt die Subtraction: (190 — 200) Fichten = — 10 Fichten. Dies Resultat zeigt die Unmöglichkeit des Fällens der 200 Stämme; es zeigt im Besonderen, daß der Bestand wenigstens noch 10 Stämme mehr haben müßte, wenn das beabsichtigte Fällen der 200 Stämme ausführbar sein soll, und hat einen weiteren Sinn nicht.

Aber ein anderer Fall. Gesetzt ich höre, das Quecksilber im Thermometer sei seit heut Morgen 3 Grad gefallen, und erinnere mich, daß es damals 5 Grad Wärme zeigte, so ziehe ich, um den jetzigen Stand des Quecksilbers zu finden, 3 Grad von 5 Grad ab und erhalte 2 Grad Wärme. Wäre es aber 8 Grad gefallen, so würde ich durch die Subtraction — 3 Grad Wärme erhalten haben. Diese — 3 Grad bedeuten hier offenbar, daß das Quecksilber 3 Grad unter dem Punkte steht, von dem aus ich die Wärme-Grade zähle. Wenn wir nun auch solche negative Wärme-Grade „Kälte-Grade" nennen, so ist doch leicht einzusehen, daß zwar der Gegensatz zwischen + und — in diesem Falle durch die Bezeichnung „Wärme" und „Kälte" einen verständlichen Ausdruck erhält, nicht aber nothwendig aus der Natur des Gegenstandes folgt. Vielmehr ist die Sache so: Indem wir von einer bestimmten Temperatur ausgehen und von dem zugehörigen Stande des Quecksilbers aus die Wärme-Grade zählen, haben wir den Anfangspunkt bei einer so hohen Temperatur genommen, daß die absolute Zahlenreihe zur Bezeichnung der vorkommenden Temperaturen nicht ausreicht; wir müssen uns also der negativen Zahlen bedienen und thuen dies natürlich in dem Sinne der Arithmetik, in welcher durch Subtraction einer größeren Zahl von einer kleineren (hier durch Fallen um mehr Grade, als vorhanden sind)

die negative Zahl erzeugt wird. Hätten wir den Nullpunkt so weit zurückgelegt, daß der Gefrierpunkt etwa durch 100 Grad Wärme zu bezeichnen wäre, so würden wir die negativen Zahlen nicht brauchen. Daß der gebräuchliche Nullpunkt ein verständig gewählter ist, ändert an der Sache nichts. — Dies Beispiel lehrt:

1) Negative Zahlen finden bei Größen Anwendung, welche gleichmäßig wachsen oder fallen, wenn man sie in den verschiedenen Stadien ihrer Veränderung messen, also durch benannte Zahlen ausdrücken will. Haben solche Größen einen natürlichen Anfangspunkt nicht, oder benutzt man solchen nicht, sondern geht von einem gewählten aus (z. B. bei der Zeit; der Nullpunkt in der christlichen Zeitrechnung: Christi Geburt), so wird man immer durch Subtraction zu einer negativen Zahl gelangen können, welche dann einem Zustande der Größe vor dem gewählten Anfangspunkte zukommt. z. B. Ein Ereigniß fand im Jahre 312 Statt, ein anderes 400 Jahre früher: so geschah es im Jahre $312 - 400 = -88$, d. h. im Jahre 88 **vor** Christi Geburt (vergl. §. 18.).

Von dem gewählten Anfangspunkte zählt man bei den Größen der angeführten Art nach zwei Richtungen hin. Jede Richtung kann als die positive angesehen werden, die negative Zahl führt dann zu der andern Richtung. So würden also negative Kälte-Grade „Wärme-Grade" sein; fand ein Ereigniß im Jahre 34 vor Christi Geburt Statt, ein anderes 40 Jahre später, so geschah es im Jahre -6 **vor** Christi Geburt, d. h. im Jahre 6 **nach** Christi Geburt.

2) Die negativen (also natürlich auch die positiven) Zahlen finden ferner auf Größen Anwendung, welche, obwohl sie gleichbenannte Zahlen und in dieser Beziehung gleichartig sind, doch in einem solchen Gegensatz zu einander stehen, daß ihre Addition durch die Subtraction ihrer abstracten Zahlen ausgeführt wird. Sie entsprechen also dem Gesetz der abstracten Zahlen $(+a) + (-b) = +(a-b) = -(b-a)$, oder, wenn die Zahlen gleich sind: $(+a) + (-a) = 0$. Man nennt sie **entgegengesetzte Größen**, und solche sind z. B. Vermögen und Schulden, Gewinn und Verlust (ganz gebräuchlich beim Spiel durch + und — notirt), nach entgegengesetzten Richtungen zurückgelegte Wege, u. s. w. Addirt man solche Größen in dem Sinne, daß dieser Gegensatz in Betracht gezogen werden muß, so behandelt man sie wie entgegengesetzte Zahlen (d. h. man subtrahirt die abstracten Zahlen); kommt dieser Gegensatz aber nicht in Betracht, wie absolute Zahlen. Wenn z. B. in einem Gefechte ein Regiment 6000 Fuß vordringt, dann 2000 Fuß zurückgedrängt wird und sich hier behauptet, so kann man sagen, das Regiment habe, um 4000

Fuß vorzudringen, 8000 Fuß zurücklegen müssen; denn in Bezug auf das Vordringen addirt man: $6000 + (-2000) = 4000$, aber in Bezug auf den überhaupt zurückgelegten Raum: $6000 + 2000 = 8000$.

Zweites Kapitel.

Die Producte und Quotienten.

§. 24.

Erklärung.

Das Product $n \times a$ oder $n \cdot a$ oder na bezeichnet eine Summe von n gleichen Summanden, von denen jeder $= a$ ist. Man nennt a den Multiplicandus und n den Multiplicator (Coefficient), beide auch ohne Unterschied die Factoren des Products. Hiernach kann a jede beliebige Zahl sein, n aber nur eine absolute Zahl und > 1. na ist ein eindeutiger Ausdruck, und wenn also:

1) $a = b$ ist, so folgt $na = nb$.
2) Ist $a > b$, so folgt $na > nb$.
3) Ist $na = nb$, so folgt $a = b$.
4) $a \cdot 1 = a$, 5) $a \cdot 0 = 0$, 6) $na + a = (n + 1) \cdot a$,
7) $na - a = (n - 1) \cdot a$.

Nr. 2. beweist man, indem man nb von na abzieht und für diese Producte die entsprechenden Summen setzt. Die Differenz wird positiv (§. 19.).

Anmerk. Zur Ersparung der Klammern wird festgesetzt: Jeder Ausdruck, welcher Producte, Summen und Differenzen enthält, soll, wenn nicht Klammern es anders bestimmen, so zu verstehen sein, daß die Multiplication vor der Addition und Subtraction auszuführen ist.

z. B. $3 \cdot 7 + 4 = 25$; $3(7 + 4) = 33$; $8 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 28$; $8 \cdot (2 + 3 \cdot 4) = 112$; $9 - 3 \cdot 2 = 3$; $(9 - 3) \cdot 2 = 12$.

§. 25.

Gesetze der Multiplication.

I. $n(a + b) = na + nb$.
II. $n(a - b) = na - nb$.
III. $n(a + b + c + d + \ldots) = na + nb + nc + nd + \ldots$
IV. $n(a - b - c + d + \ldots) = na - nb - nc + nd + \ldots$

Sind a, b, c absolute Zahlen und > 1, so ist noch:

V. $a \cdot b = b \cdot a$.
VI. $a \cdot (bc) = b \cdot (ac) = c \cdot (ab)$.

Endlich ist noch, wenn n und m absolute Zahlen und größer als 1 sind, für jeden Werth von a:

VII. $na + ma = (n + m)a$

und wenn noch $n > m$ ist:

VIII. $na - ma = (n - m)a$.

Die Beweise zu I. bis IV. folgen aus der Erklärung des Products mit Anwendung der Sätze des ersten Kapitels, welche die Addition der Summen, Differenzen und algebr. Summen lehren. I. bis III. sind in IV. als besondere Fälle enthalten, und IV. sagt:

1) Eine algebr. Summe wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man jedes Glied multiplicirt und alle Vorzeichen unverändert läßt.

2) Producte, welche einen gemeinschaftlichen Multiplicator haben, werden zur algebr. Summe verbunden, wenn man ihre Multiplicanden zu dieser Summe verbindet und letztere mit dem gemeinschaftlichen Multiplicator multiplicirt. — Man nennt diese Umformung die Absonderung des gemeinschaftlichen Factors, und sie ist eine der wichtigsten der Arithmetik.

z. B. $3a + 3b = 3(a + b)$; $5a - 5b = 5(a - b)$;
$a - 6b + 6c - 6d = a - 6(b - c + d)$.

Satz V. sagt: Man kann die Factoren eines Products vertauschen, ohne dessen Werth zu ändern.

Beweis.

$$a \cdot b = b + b + b + b + \ldots\ldots \text{ (a Summanden)}$$
$$= b \cdot 1 + b \cdot 1 + b \cdot 1 + b \cdot 1 + \ldots\ldots \text{ (a Summ.) §. 24., 4.}$$
$$= b \cdot [1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \text{ (a Summ.)] §. 25., III.}$$
$$= b(a \cdot 1) = b \cdot a.$$

Nach VI. wird ein Product mit einer Zahl multiplicirt, wenn man nur einen Factor mit der Zahl multiplicirt und das, was herauskommt, noch mit dem anderen.

Die Sätze VII. und VIII. sind in den Sätzen I., II. und V. nicht enthalten, weil man für beliebige Werthe von a, im Besonderen, wenn a negativ oder gleich 0 oder 1 ist, a $(n \pm m)$ nicht statt $(n \pm m)a$ setzen darf. — VII. ergiebt sich unmittelbar aus der Erklärung des Products, weil eine Summe von n gleichen Summanden, von denen jeder a ist, zu einer Summe von m gleichen Summanden, von denen jeder ebenfalls gleich a ist, addirt, eine Summe von $n + m$ gleichen Summanden giebt, von denen jeder gleich a ist. — VIII. folgt, wenn man zu beiden Seiten ma addirt, unmittelbar aus VII.

§. 26.

Das Product von drei und mehr Factoren.

Schreibt man $a \cdot b \cdot c$, so kann dieser Ausdruck nur in dem Sinne $a \cdot (bc)$, oder $(ab) \cdot c$ aufgefaßt werden. Diese Ausdrücke sind aber gleich, folglich kann man, wenn ein Factor eines Products selbst ein Product ist, ihn ohne Klammern schreiben (vergl. §. 8. 3). Man erhält so das Product von drei und mehr

Factoren und kann diese in beliebiger Ordnung schreiben; z. B. $abc = cba = bac$, $abcdf = fdcba = bacfd$, u. s. w.

§. 27.

Erklärung.

Der Quotient $a:b$ oder $\frac{a}{b}$ bezeichnet die Zahl, welche mit dem Divisor b multiplicirt, den Dividendus a giebt. a kann jeden beliebigen Werth haben, b aber muß nach §. 24. eine absolute Zahl und > 1 sein. Dann ist $a:b$ ein eindeutiger Ausdruck (§. 24. 2).

1) Ist $a = b$, so folgt $\frac{a}{n} = \frac{b}{n}$ und $\frac{n}{a} = \frac{n}{b}$;

2) $\frac{a}{a} = 1$; 3) $\frac{0}{a} = 0$.

§. 28.

Grundformeln für Producte und Quotienten.

I. $b \cdot \frac{a}{b} = a$. II. $\frac{ab}{b} = a$.

Man übertrage das in §. 9. und 10. von Summen und Differenzen Gesagte auf Producte und Quotienten. Namentlich kann man die Beweise der Formel II. und der Gesetze im nächsten §. dadurch führen, daß man beide Seiten mit derselben Zahl multiplicirt und zeigt, daß die Producte gleich werden (§. 24. 3). Ist eine Seite ein Quotient, so multiplicire man mit seinem Divisor. Soll z. B. bewiesen werden, daß $a : \frac{a}{b} = b$ ist, so multiplicire man beide Seiten mit $\frac{a}{b}$; dann entsteht $a = \frac{a}{b} \cdot b$ oder $a = a$.

§. 29.

Gesetze der Division.

I. $\frac{a}{b} = \frac{na}{nb} = \frac{a:n}{b:n}$.

II. $\frac{a \pm b}{n} = \frac{a}{n} \pm \frac{b}{n}$.

III. $a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c}$.

IV. $\frac{b}{c} \pm a = \frac{b \pm ac}{c}$.

V. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$.

VI. $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{na}{b} = \frac{a}{b:n} = a \cdot \frac{n}{b}$.

VII. $\frac{a}{b} : n = \frac{a:n}{b} = \frac{a}{nb}$.

VIII. $n : \frac{a}{b} = n \cdot \frac{b}{a}$.

IX. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

X. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a:c}{b:d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

I. sagt: Ein Quotient bleibt (seinem Werthe nach) unverändert, wenn man Dividendus und Divisor mit derselben Zahl multiplicirt, oder durch dieselbe Zahl dividirt. — II. bis V. lehren, wie man Quotienten addirt und subtrahirt, und Summen und Differenzen durch eine Zahl dividirt; VI. bis X. aber, wie man Quotienten mit einander und mit einfachen Zahlen durch Multiplication und Division verbindet.

Als Erweiterungen dieser Sätze gelten folgende Gleichungen:

1) $\frac{a - b - c + d - f}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n} - \frac{c}{n} + \frac{d}{n} - \frac{f}{n}$

2) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + cbf + ebd}{bdf}$

3) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} - \frac{e}{f} + \frac{h}{g} = \frac{adfg - cbfg - ebdg + hbdf}{bdfg}$

4) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{h}{g} = \frac{aceh}{bdfg}$.

Anmerk. Die in der Anmerk. zu §. 24. gegebene Bestimmung wird dahin erweitert, daß auch die Division vor der Addition und Subtraction auszuführen ist, wenn nicht Klammern anders bestimmen; z. B.

$$30 - 4 \cdot 3 + 6 : 3 = 20.$$

$$30 - 4 \cdot (3 + 6) : 3 = 18.$$

$$30 - (4 \cdot 3 + 6) : 3 = 24.$$

$$10 : \frac{24 : 3}{4} + 3 \cdot 5 = 20.$$

$$\left[10 : \left(\frac{24 : 3}{4} + 3\right)\right] \cdot 5 = 10.$$

§. 30.

Multiplication mit negativen Zahlen, mit 1 und mit 0.

Nach der in §. 24. gegebenen Erklärung des Products $n \cdot a$ kann der Multiplicator n nur eine absolute Zahl und größer als 1 sein; hingegen läßt diese Erklärung zu, daß der Multiplicandus a jede beliebige positive oder negative Zahl oder Null ist. Namentlich findet man:

$$n \cdot (+a) = (+a) + (+a) + (+a) + \ldots = +na$$
$$n \cdot (-a) = (-a) + (-a) + (-a) + \ldots = -na.$$

Um nun die Gesetze der Multiplication auf beliebige Zahlen, also allgemein anwenden zu können, müssen wir den Begriff des Products dahin erweitern, daß auch der Multiplicator 1 oder 0 oder eine negative Zahl sein kann. Zu diesem erweiterten Begriff des Products führt die Formel §. 25. VIII.

$$na - ma = (n - m)\,a,$$

wenn wir sie für beliebige Werthe von n und m gelten lassen. Während also diese Formel in dem Falle, daß n wenigstens um 2 größer als m ist, ein von uns bewiesener Lehrsatz ist, gilt sie von jetzt an in allen anderen Fällen als Erklärung, d. h. wir verstehen fortan unter $(n - m) \cdot a$ die Differenz $na - ma$. Hieraus ergiebt sich nun die Erklärung des Products, wenn der Multiplicator 1 oder 0 oder negativ ist:

1) $1 \cdot a = [(n+1) - n] \cdot a = (n+1) \cdot a - n \cdot a$
$= na + a - na$ (§. 24. 6) $= a$, also:

I. $1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$

2) $0 \cdot a = (n - n) \cdot a = na - na = 0$; folglich:

II. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$; also auch $0 \cdot 0 = 0.$

3) $(-n) \cdot a = [m - (m + n)] \cdot a = m \cdot a - (m + n) \cdot a$
$= ma - (ma + na)$ (§. 25. VII.) $= ma - ma - na$
$= -na$; folglich:

III. $(-n) \cdot a = -na$;

d. h. *eine Zahl mit einer negativen Zahl multipliciren heißt sie mit dem Gliede dieser negativen Zahl multipliciren und dem Product das Vorzeichen — geben.*

Das Product mit negativem Multiplicator haben wir hiernach als das Resultat der Subtraction zweier Producte mit gleichen Multiplicanden von einander aufzufassen, wenn der Multiplicator des Subtrahend größer war, als der des Minuend, und wenn auf die Differenz dieser Producte nicht die Formel §. 14. III., durch die man einen negativen Multiplicator vermieden hätte, sondern die

Formel §. 25. VIII. angewandt worden ist. So ist z. B. nach der Formel §. 14. III.:

$$4a - 9a = -(9a - 4a) = -5a,$$

hingegen nach der Formel §. 25. VIII.:

$$4a - 9a = (4 - 9) \cdot a = (-5) \cdot a.$$

Die Bedeutung von $(-5) \cdot a$ kann also keine andere sein, als $-5a$.

Aus dem Gesetz III. folgt nun:

$$(-a) \cdot (+b) = -[a \cdot (+b)] = -[+ab] = -ab$$
$$(-a) \cdot (-b) = -[a \cdot (-b)] = -[-ab] = +ab.$$

Vollständiger hat man also:

$$(+a) \cdot (+b) = +ab, \quad (+a) \cdot (-b) = -ab,$$
$$(-a) \cdot (+b) = -ab, \quad (-a) \cdot (-b) = +ab;$$

d. h. zwei Zahlen mit beliebigen Vorzeichen werden mit einander multiplicirt, wenn man ihre Glieder multiplicirt und dem Product das Vorzeichen + giebt, wenn die Glieder gleiche Vorzeichen haben, aber —, wenn sie ungleiche Vorzeichen haben.

Man erkennt leicht, daß man in allen diesen Producten die Factoren vertauschen kann, daß also der Satz §. 25. V. noch richtig ist; aber auch die andern Sätze sind leicht zu beweisen; z. B.

$$(-n) \cdot (a + b) = -[n(a + b)] = -(na + nb)$$
$$= -na - nb = (-n) \cdot a + (-n) \cdot b.$$

§. 31.

Division durch 1 und 0. Division algebraischer Zahlen.

Da die Frage „welche Zahl giebt mit b multiplicirt a?" jetzt auch einen Sinn hat, wenn b beliebig positiv, negativ und 0 ist, so kann man also beliebige Zahlen durch einander dividiren und findet:

1) $\frac{a}{1} = a.$

2) $\frac{0}{0}$ ist ein unbestimmter Ausdruck, weil jede Zahl mit 0 multiplicirt 0 giebt.

3) $\frac{a}{0}$ kann keine der bis jetzt uns bekannt gewordenen Zahlen bedeuten, weil jede solche Zahl mit 0 multiplicirt, nicht a, sondern 0 giebt. Wir werden sehen, daß auch alle späteren Zahlenformen, welche bestimmte Zahlen bedeuten, mit 0 multiplicirt, 0 geben; daher schließen wir bei allen Divisionen mit bestimmten Zahlen den Fall der Division durch 0 aus.

4) Endlich findet man:

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}, \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}, \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}, \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b};$$

d. h. zwei Zahlen mit beliebigen Vorzeichen werden durch einander dividirt, wenn man ihre Glieder durch einander dividirt und in Beziehung auf das Vorzeichen des Quotienten die Regel befolgt: gleiche Vorzeichen geben +, ungleiche —.

§. 32.

Die gebrochene Zahl.

Der Quotient $\frac{a}{b}$ führt zu einer neuen Zahlenform. Sind a und b natürliche Zahlen, so giebt es in den meisten Fällen eine natürliche Zahl nicht, welche mit b multiplicirt, a giebt, also gleich $\frac{a}{b}$ ist. Um die Gesetze der Division allgemein anwenden zu können, müssen wir daher den Begriff des Quotienten erweitern und den Ausdruck $\frac{a}{b}$ als neue Zahlenform in dem Falle in die Arithmetik einführen, wenn er keine natürliche Zahl bezeichnet. Seine Erklärung liegt in dem Gesetz

$$b \cdot \frac{a}{b} = a,$$

und diese Erklärung hat die unmittelbare Folge, daß alle Gesetze der Division auf ihn anwendbar sind, d. h. zu keinem Widerspruch führen, weil sie alle aus diesem Gesetz folgten. Man nennt den Ausdruck $\frac{a}{b}$, wenn er keine natürliche Zahl ist, eine gebrochene Zahl oder einen Bruch, a seinen Zähler und b seinen Nenner; alle für Quotienten bewiesenen Sätze gelten sonach für Brüche. Ein Bruch heißt echt, oder unecht, je nachdem der Zähler kleiner, oder größer ist, als der Nenner. Im Gegensatz zur gebrochenen Zahl nennt man die natürliche Zahl jetzt eine ganze Zahl. Da der Unterschied zwischen Quotient und Bruch auf das Rechnen keinen Einfluß hat, so kann man sich beliebig beider Wörter bedienen. — Sind a und b algebraische Zahlen, so führen die Gleichungen in §. 31. Nr. 4. unmittelbar zur positiven und negativen gebrochenen Zahl.

Wie haben wir aber die gebrochene Zahl aufzufassen? Denkt man sich ein Ganzes in b gleiche Theile zerlegt, so ist das Ganze gleich der Summe dieser Theile; folglich hat jeder Theil die Eigen-

schaft, mit b multiplicirt, das Ganze zu geben. Nehmen wir das Ganze als Einheit, so ist jeder Theil $= \frac{1}{b}$ (ein btel), und sehen wir von der Benennung ab, so ist $\frac{1}{b}$ der bte Theil der abstracten Einheit. Nun ist $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 1}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$; folglich ist $\frac{a}{b}$ das afache des bten Theils der Einheit, oder auch: $\frac{a}{b}$ ist der bte Theil von a; denn ebenso wie die Einheit, können wir uns das afache der Einheit in b gleiche Theile zerlegt denken.

Wie haben wir aber Summen, Differenzen, Producte und Quotienten gebrochener Zahlen aufzufassen? Der positiven und negativen Einheit (± 1) haben wir die gebrochene Einheit $\left(\frac{1}{b}\right)$ hinzugefügt, die ebenfalls positiv und negativ ist, je nachdem die ganze Einheit positiv oder negativ ist $\left(\frac{\pm 1}{b} = \pm \frac{1}{b}\right)$, und weil b jede beliebige ganze Zahl sein kann, so giebt es unendlich viele gebrochene Einheiten. Nun können wir aber zwei Brüche unter gleiche Nenner bringen, also durch dieselbe gebrochene Einheit ausdrücken (etwa indem wir Zähler und Nenner jedes Bruches mit dem Nenner des andern multipliciren), und die Summe beider bezeichnet die Zahl, welche solcher gebrochenen Einheiten so viele enthält, als die Summanden zusammen. So sind z. B. $\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{9}$ bezüglich gleich $\frac{27}{63}$ und $\frac{28}{63}$; daher bezeichnet $\frac{3}{7} + \frac{4}{9}$ die Zahl, welche so viel 63tel enthält, als die Summanden zusammen: $\frac{3}{7} + \frac{4}{9} = \frac{55}{63}$. Dasselbe gilt von der Addition eines Bruches und einer ganzen Zahl, weil diese in einen Bruch verwandelt werden kann; z. B. $5 + \frac{2}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$. Statt $5 + \frac{2}{3}$ schreibt man gewöhnlich $5\frac{2}{3}$ und nennt solche Zahl eine *gemischte Zahl*. — Mit dem Begriff der Summe gebrochener Zahlen ist unmittelbar auch der der Differenz gegeben; die Erklärung ist dieselbe, wie in §. 7.

Betrachten wir jetzt das Product. Ist nur der Multiplicandus ein Bruch, der Multiplicator aber eine ganze Zahl, so ist der in §. 24. gegebenen Erklärung nichts hinzuzufügen; z. B. $4 \times \frac{2}{3}$ bedeutet eine Summe von 4 gleichen Summanden, von denen jeder $\frac{2}{3}$ ist, also:

$$4 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

Es fragt sich also nur, wie wir das Product aufzufassen haben, wenn der Multiplicator ein Bruch ist, z. B. das Product $\frac{a}{b} \times c$, in welchem c jede beliebige Zahl sein kann. Nun ist aber

$$(1.)\ \frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b},$$

d. h. „eine Zahl mit einem Bruch multipliciren" heißt sie mit dem Zähler multipliciren und das Product durch den Nenner dividiren. So aufgefaßt, schließt sich der Begriff der Multiplication mit einer gebrochenen Zahl an die oben gegebene Vorstellung von dieser Zahl an; denn $\frac{a}{b}$ war der bte Theil von a Einheiten; soll man also mit $\frac{a}{b}$ multipliciren und multiplicirt mit a allein, so muß das Product bmal zu groß sein, also ist der bte Theil desselben das richtige Product. Es erscheint so $\frac{a}{b} \times c$ als der bte Theil einer Summe von a gleicher Summanden, von denen jeder c ist. z. B.

$$\frac{11}{4} \times 5 = \frac{11 \times 5}{4} = \frac{55}{4}.$$

Es war aber auch:

$$(2.)\ \frac{a}{b} \times c = a \times \frac{c}{b},$$

und nach dieser Formel heißt „eine Zahl mit einem Bruch multipliciren" sie durch den Nenner dividiren und den Quotienten mit dem Zähler multipliciren. So aufgefaßt, erscheint das Product $\frac{a}{b} \times c$ als eine Summe von a gleichen Summanden, von denen jeder der bte Theil von c ist. z. B.

$$\frac{11}{4} \times 5 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \ldots \text{ (11 Summanden)}$$
$$= 11 \times \frac{5}{4} = \frac{55}{4}.$$

Ist der Multiplicator ein unechter Bruch, so können wir ihn auch in eine gemischte Zahl verwandeln und den Satz §. 25. VII. anwenden, z. B.

$$\frac{11}{4} \times 5 = \left(2 + \frac{3}{4}\right) \times 5 = 2 \times 5 + \frac{3}{4} \times 5$$
$$= (5+5) + \left(\frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4}\right).$$

Dann erscheint $\frac{11}{4} \times 5$ oder $2\frac{3}{4} \times 5$ als eine Summe, in welcher der

Multiplicandus 5 zweimal und der 4te Theil desselben dreimal als Summand vorkommt. Es ist dann $\frac{11}{4} \times 5 = 10 + \frac{15}{4} = \frac{55}{4}$.

Wie man aber auch das Product auffassen mag, man überzeugt sich leicht, daß man die Factoren vertauschen darf, daß überhaupt alle Sätze über Producte auf gebrochene Factoren anwendbar sind. Mit dem Begriff des Products ist aber auch der des Quotienten gebrochener Zahlen gegeben; z. B. $\frac{3}{\frac{5}{4}}$ ist die Zahl, welche mit $\frac{5}{4}$ multiplicirt, 3 giebt, d. h. die Zahl, deren 4ter Theil 5mal genommen, 3 giebt. Nun ist aber jener Quotient nach §. 29. VIII. gleich $3 \cdot \frac{4}{5}$, und der 4te Theil hiervon $(3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5})$ giebt auch richtig, 5mal genommen, 3.

§. 33.

Multiplication algebraischer Summen.

Soll $4a - 3b - 2c$ mit $3a - 2b + 4c$ multiplicirt werden, so erhält man: $(4a - 3b - 2c) \cdot (3a - 2b + 4c)$
$= (4a - 3b - 2c) \cdot 3a - (4a - 3b - 2c) \cdot 2b + (4a - 3b - 2c) \cdot 4c$
$= (12aa - 9ab - 6ac) - (8ab - 6bb - 4bc) + (16ac - 12bc - 8cc)$.
Man hat also jedes Glied der einen Summe mit jedem Gliede der anderen multiplicirt. Die Vorzeichen vor den Klammern sind die der Glieder der zweiten Summe, die in den Klammern die der ersten. Löst man jetzt die Klammern auf, so können sich nur die Vorzeichen ändern, wenn nämlich — vor den Klammern steht. Man erhält:

$$12aa - 9ab - 6ac - 8ab + 6bb + 4bc + 16ac - 12bc - 8cc.$$

Die Vorzeichen dieser Glieder sind nicht durch die Vorzeichen der Glieder einer Summe, sondern beider Summen bedingt, und man wird mit einiger Aufmerksamkeit leicht das Gesetz erkennen: Zwei algebraische Summen werden mit einander multiplicirt, wenn man jedes Glied der einen Summe mit jedem Gliede der anderen multiplicirt und in Beziehung auf die Vorzeichen der einzelnen Producte die Regel beobachtet: gleiche Vorzeichen geben +, ungleiche —. Zweckmäßig ist folgende Darstellung, welche die in ein Glied zusammenzuziehenden Glieder leicht erkennen läßt:

$$\begin{array}{lllll}
4a & - 3b & - 2c & & \\
3a & - 2b & + 4c & & \\
\hline
12aa & - 9ab & - 6ac & & \\
 & - 8ab & & + 6bb & + 4bc \\
 & & + 16ac & & - 12bc - 8cc \\
\hline
12aa & - 17ab & + 10ac & + 6bb & - 8bc - 8cc.
\end{array}$$

Beispiele:

$$(2a - \frac{1}{3}b + 6c) \cdot (3a + \frac{1}{2}b - 6c) = 6aa + 6ac - \frac{1}{6}bb + 5bc - 36cc;$$

$$\left(\frac{1}{a} - 2 - 3a\right) \cdot \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{6} - 4a\right) = \frac{2}{aa} - \frac{23}{6a} - \frac{31}{3} + \frac{15}{2}a + 12aa;$$

$$\left(\frac{b}{a} + 1 - \frac{3a}{b}\right) \cdot \left(\frac{2b}{a} - 2 - \frac{6a}{b}\right) = \frac{2bb}{aa} - 14 + \frac{18aa}{bb}.$$

§. 34.

Division algebraischer Summen.

Wenn eine algebraische Summe das Product zweier anderen algebraischen Summen ist, so muß sie, durch den einen Factor dividirt, den andern Factor geben. Man kann sich also die Aufgabe stellen, zwei algebraische Summen durch einander zu dividiren, und versteht hierunter nicht blos die Verbindung beider durch das Divisionszeichen, sondern noch die Umformung des Quotienten in eine algebraische Summe, indem man die Erwartung hat, es werde eine solche geben. Die Grundlage dieser Umformung ist folgender Satz:

$$\frac{A}{B} = x + \frac{A - Bx}{B};$$

d. h. ein Quotient läßt sich in eine Summe verwandeln, wenn man den ersten Summand beliebig wählt und den zweiten dadurch bestimmt, daß man den beliebig gewählten Summand mit dem Divisor multiplicirt, das Product vom Dividendus abzieht und die Differenz durch den Divisor dividirt. — Zum Beweise multiplicire man beide Seiten mit B.

Gesetzt nun, A und B sind algebraische Summen, z. B.

$$\frac{A}{B} = \frac{12aa - 17ab + 10ac + 6bb - 8bc - 8cc}{4a - 3b - 2c},$$

so kann man allerdings den ersten Summanden beliebig wählen und wird, wenn man nach der vorstehenden Regel verfährt, immer Richtiges erhalten, aber nicht gerade das, was man wünscht: eine möglichst einfache algebraische Summe. Denn der zweite Summand $\frac{A - Bx}{B}$ wird je nach der Wahl von x einfacher, oder zusammengesetzter werden, und man erkennt also, daß bei diesem Verfahren die Wahl von x entscheidend ist. Man lernt aber das richtige Wählen leicht durch genaue Beobachtung der Multiplication zweier algebraischer Summen, wenn man etwa so urtheilt: Ist der Dividendus wirklich das Product des Divisors mit einer andern algebraischen Summe, so werden die Buchstaben des Divisors auch im Dividendus vor-

kommen. Ordnet man also die Glieder des Divisors und des Dividendus nach diesen Buchstaben, hier zunächst nach dem Alphabet, und denkt sich auch die gesuchte Summe so geordnet: so muß das erste Glied des Dividendus durch Multiplication des ersten Gliedes des Divisors mit dem ersten Gliede der gesuchten Summe entstanden sein. Umgekehrt findet man also das erste Glied der gesuchten Summe, wenn man mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des Dividendus dividirt. Diesen Quotienten wähle man also zum ersten Summanden x. Man erreicht durch diese Wahl wenigstens, daß bei der Subtraction $A - Bx$ ein Glied von A gegen ein Glied von Bx sich fortheben muß, und kann also hoffen, daß der zweite Summand $\frac{A - Bx}{B}$ einfacher werden wird, als der ursprüngliche Quotient $\frac{A}{B}$. Auf diesen zweiten Summanden kann man nun dasselbe Verfahren anwenden und so fortfahren, bis man auf einen Summanden von der Form $\frac{A - Bx}{B}$ kommt, der $= 0$ ist, weil sein Dividendus $= 0$ ist. Man sagt dann: die Division geht auf oder der Dividendus ist durch den Divisor (ohne Rest) theilbar. Man pflegt die Division in folgender Form auszuführen:

$$\begin{array}{l|l|l}
4a - 3b - 2c & 12aa - 17ab + 10ac + 6bb - 8bc - 8cc & 3a - 2b + 4c. \\
 & 12aa - 9ab - 6ac & \\ \hline
 & \quad - 8ab + 16ac + 6bb - 8bc - 8cc & \\
 & \quad - 8ab \qquad\quad + 6bb + 4bc & \\ \hline
 & \qquad\quad + 16ac \qquad - 12bc - 8cc & \\
 & \qquad\quad + 16ac \qquad - 12bc - 8cc & \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad 0. &
\end{array}$$

Man hat also hier das angeführte Gesetz dreimal gebraucht und für den gegebenen Quotienten nach der Reihe erhalten:

$$3a + \frac{-8ab + 16ac + 6bb - 8bc - 8cc}{4a - 3b - 2c}$$

$$= 3a - 2b + \frac{16ac - 12bc - 8cc}{4a - 3b - 2c}$$

$$= 3a - 2b + 4c + \frac{0}{4a - 3b - 2c} = 3a - 2b + 4c.$$

Zuweilen hat man einen Grund, diese Umformung auch dann vorzunehmen, wenn die Division nicht aufgeht. Man kann dann so viele Summanden erzeugen als man will oder braucht; der letzte aber ist wieder ein Quotient. Beobachtet man hierbei die Regel, die Reste $(A - Bx)$ immer zu ordnen, so erhält man häufig eine Summe, deren Glieder leicht ein Gesetz erkennen lassen, so daß man, wenn

einige Glieder gefunden sind, die andern unmittelbar hinschreiben kann. Es sei z. B. $\frac{A}{B} = \frac{1}{1-a}$, so entsteht,

$$
\begin{array}{l}
1 - a \mid 1 \quad \mid 1 + a + aa + aaa + aaaa + \text{u. s. w.} \\
\quad 1 - a \\
\hline
\quad\quad + a \\
\quad\quad + a - aa \\
\hline
\quad\quad\quad + aa \\
\quad\quad\quad + aa - aaa \\
\hline
\quad\quad\quad\quad + aaa \\
\quad\quad\quad\quad + aaa - aaaa \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad + aaaa \\
\quad\quad\quad\quad\quad \text{u. s. w.}
\end{array}
$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-a} &= 1 + \frac{a}{1-a} \\
&= 1 + a + \frac{aa}{1-a} \\
&= 1 + a + aa + \frac{aaa}{1-a} \\
&= 1 + a + aa + aaa + \frac{aaaa}{1-a}
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Die Glieder sind die Potenzen von a (§. 5. 3) mit steigenden Exponenten, und hat man n Glieder erzeugt, so ist das letzte: $\frac{a^{n-1}}{1-a}$.

Man schreibt daher:

$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots. + a^{n-2} + \frac{a^{n-1}}{1-a}$ und sagt: $\frac{1}{1-a}$ ist in eine nach den Potenzen von a fortlaufende Reihe verwandelt. Das letzte Glied $\frac{a^{n-1}}{1-a}$ nennt man das Ergänzungsglied oder den Rest der Reihe. — Es kommen Fälle vor, in welchen es erlaubt ist, das Ergänzungsglied ganz außer Acht zu lassen; dann schreibt man:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \ldots\ldots$$

Die rechte Seite erscheint nun als eine Reihe ohne Ende oder als eine unendliche Reihe, und eine solche Reihe muß, um

brauchbar zu sein, die Eigenschaft haben, daß man dem Werthe des endlichen Ausdrucks, dessen Entwickelung sie ist $\left(\text{hier } \frac{1}{1-a}\right)$, um so näher kommt, je mehr Glieder man zusammenrechnet, und hierzu ist wieder erforderlich, daß das Ergänzungsglied bei fortgesetzter Division der Null immer mehr und mehr sich nähert, also auch nach Belieben der Null nahe gebracht werden kann. Das Weitere über solche Reihen kann erst später gelehrt werden. Daß aber die Gleichung

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \ldots$$

eben nur in solchen besonderen Fällen richtig sein kann, erkennt man augenblicklich, wenn man für a etwa den Werth 2 setzt; man erhält dann den Widerspruch:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots\ldots$$

Beispiele.

1) $(6aa + ab + 7ac - 12bb + 19bc - 5cc) : (2a + 3b - c)$
$= 3a - 4b + 5c.$

2) $(15xx - 29xy + 12yy - 22yz - 60zz) : (5x - 3y + 10z)$
$= 3x - 4y - 6z.$

3) $\left(\frac{2}{aa} + \frac{5}{a} - 27aa\right) : \left(\frac{2}{a} + 3 - 9a\right) = \frac{1}{a} + 1 + 3a.$

§. 35.

Erklärung. Folgerungen.

Durch die Verbindung der natürlichen Zahlen mittelst der vier bis jetzt betrachteten Rechnungsarten haben wir die positive und negative, die ganze und gebrochene Zahl und die Null erhalten. Alle diese Zahlen faßt man unter dem Namen der **reellen Zahlen** zusammen. — Die Erklärung im §. 19., nach welcher $a > b$ heißt, wenn $a - b$ einer positiven Zahl gleich ist, soll nun für alle reellen Zahlen gelten. Zunächst folgt hieraus für absolute Brüche:

1) Jeder echte Bruch $\frac{a}{b}$ ist kleiner als 1, jeder unechte $\frac{b}{a}$ ist größer als 1.

Beweis. $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{a}$, also positiv, wenn $b > a$.

2) Von zwei Brüchen mit gleichen Nennern ist derjenige der größere, welcher den gröẞereren Zähler hat; von zwei Brüchen mit gleichen Zählern aber derjenige, welcher den kleineren Nenner hat.

Beweis. $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$, und $\frac{c}{a} - \frac{c}{b} = \frac{c(b-a)}{ab}$.

3) Ein echter Bruch wird größer, wenn man zum Zähler und Nenner dieselbe Zahl addirt, hingegen kleiner, wenn man sie subtrahirt, nur muß in diesem Falle der Nenner positiv bleiben. Bei einem unechten Bruch findet das Umgekehrte Statt.

Beweis. $\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} = \frac{c(b-a)}{b(b+c)}$.

$$\frac{a-c}{b-c} - \frac{a}{b} = \frac{(a-b) \cdot c}{(b-c) \cdot b}.$$

4) Die Ungleichungen No. 1. bis 5. in §. 19. sind auch richtig, wenn n und m gebrochene Zahlen sind.

§. 36.

Gesetze.

1) Ist $a > b$, so folgt: $a + c > b + c$
$a - c > b - c$
$c - a < c - b$.

2) Ist $a > b$, so folgt: $na \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} nb$, je nachdem $n \begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}$ ist.

3) Ist $a > b$, folgt: $\frac{a}{n} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{b}{n}$, je nachdem $n \begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix}$ ist.

4) Ist $a > b$ und sind a, b, n positive Zahlen, so folgt $\frac{n}{a} < \frac{n}{b}$.

5) Ist $a > b$ und $c > d$, so folgt $a + c > b + d$
$a - d > b - c$.

6) Ist $a > b$ und $c > d$, und sind a, b, c, d positive Zahlen, so folgt: $ac > bd$
$\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

Die Beweise zu 1) bis 5) sind nach §§. 19. und 35. zu führen.
Beweis zu 6. Aus der Voraussetzung folgt, daß man $a = b + \beta$ und $c = d + \delta$ setzen darf, wenn β und δ positive Zahlen bezeichnen.
Dann ist aber:
$ac - bd = (b + \beta)(d + \delta) - bd = b\delta + d\beta + \beta\delta$, also positiv, folglich $ac > bd$.

§. 37.

Die reelle Zahlenreihe.

Die Zahlenreihe, welche die positiven und negativen ganzen Zahlen und die 0 umfaßte, wurde in §. 18. durch Punkte versinnlicht,

welche in einer Linie und in gleichen Abständen von einander lagen. Die reelle Zahlenreihe umfaßt außer diesen Zahlen noch alle positiven und negativen Brüche, und diese können wir ebenfalls durch Punkte versinnlichen, welche wir zwischen die Punkte der Linie in §. 18. wieder in gleichen Abständen von einander einschalten (interpoliren).

$-\frac{8}{3}\;-\frac{7}{3}\quad -\frac{5}{3}\;-\frac{4}{3}\quad -\frac{2}{3}\;-\frac{1}{3}\quad \mathrm{A}\;+\frac{1}{3}\;+\frac{2}{3}\quad +\frac{4}{3}\;+\frac{5}{3}\quad +\frac{7}{3}\;+\frac{8}{3}$

$-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3$

Sollen z. B. alle Brüche mit dem Nenner 3 zur Anschauung gebracht werden, so schalten wir zwischen 0 und $+1$, $+1$ und $+2$, ꝛc., dann zwischen 0 und -1, -1 und -2 ꝛc. in gleichen Abständen von einander immer zwei Punkte ein. Jeder Punkt stellt dann eine dem Nenner 3 zugehörige gebrochene Zahl vor, d. h. er zählt vom Nullpunkt aus nach rechts oder links eine bestimmte Menge positiver oder negativer gebrochener Einheiten (Drittel) ab. Dies thuen auch die ursprünglichen Punkte, weil die ganzen Zahlen in gebrochene verwandelt werden können. Je größer der Nenner der Brüche ist, desto näher rücken die Punkte an einander, und man erkennt leicht, daß das räumliche Intervall zwischen zwei Punkten um so kleiner wird, je kleiner das arithmetische Intervall, d. h. die Differenz der zugehörigen Zahlen ist.

§. 38.

Die reciproke, die unendlich große und die unendlich kleine Zahl.

Ist a eine beliebige Zahl, so nennt man $\frac{1}{a}$ ihren reciproken Werth oder ihre Reciproke, und umgekehrt ist auch a die Reciproke von $\frac{1}{a}$, weil $1 : \frac{1}{a} = a$ ist.

Sind a, b, c, ... Zahlen, welche nach und nach immer größer werden, so werden ihre reciproken Werthe $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots$ nach und nach immer kleiner (§. 35. 2). Betrachten wir nun die reciproken Werthe der natürlichen Zahlen

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\ldots,$$

so sind solche:

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{7}, \ldots\ldots$$

Während wir bei den natürlichen Zahlen keine Grenze finden, der sich die immer größer und größer werdenden Zahlen nähern, erkennen wir bei ihren immer kleiner und kleiner werdenden Reciproken

sehr deutlich eine solche Grenze, nämlich die 0; wir sagen also: $\frac{1}{a}$ kommt der Null um so näher, je größer a wird. Diese Grenze Null des immer kleiner werdenden Bruches $\frac{1}{a}$ führt zu der Vorstellung einer entsprechenden Grenze der immer größer werdenden Zahl a, d. h. zu dem Begriff des „Unendlichen" oder „unendlich Großen", für den man das Zeichen ∞ gewählt hat. Denken wir uns nun eine im steten Wachsen begriffene Zahl, welche sich der Grenze ∞ ohne Aufhören nähert und bereits größer ist, als jede in Ziffern angebbare Zahl: so nennen wir solche Zahl eine unendlich große Zahl; ihre Reciproke, also eine im steten Abnehmen begriffene (echt gebrochene) Zahl, die sich der Grenze 0 ohne Aufhören nähert, wenn sie bereits so klein ist, daß der Unterschied zwischen ihr und der 0 auch in Ziffern nicht mehr angebbar ist, heißt eine unendlich kleine Zahl. — Die unendlich große und die unendlich kleine Zahl sind nicht quantitativ zu bestimmen; denn erstere enthält nicht mehr eine bestimmte Menge von Einheiten, letztere ist nicht mehr ein bestimmter Theil der Einheit; sie sind vielmehr im steten Wachsen oder Abnehmen begriffene Zahlen, die den Grenzen ∞ und 0 bereits unendlich nahe gekommen sind. Die unendlich kleine Zahl nennt man auch häufig eine verschwindende oder im Verschwinden begriffene Zahl.

Setzt man für die unendlich große und unendlich kleine Zahl als Zeichen die Symbole ihrer Grenzen, so hat man: $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$,
d. h. wenn eine Zahl sich ohne Aufhören der Grenze ∞ nähert, so nähert sich ihre Reciproke ebenso der Grenze 0, und umgekehrt.

Wenn nun ein Ausdruck einen Buchstaben, etwa x, enthält und man fragt, was aus diesem Ausdruck wird, wenn man für x eine unendlich große oder unendlich kleine Zahl setzt: so will man erfahren, ob der Ausdruck, während x der Grenze ∞ oder der Grenze 0 immer näher kommt, auch einer bestimmten Grenze sich nähert, sei diese ∞, oder 0, oder eine andere, bestimmte Zahl. Ein Beispiel mag dies erläutern. Es sei $\frac{2x-1}{4x+1}$ der gegebene Ausdruck. Setzt man für x die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, u. s. w., so erhält der Ausdruck folgende Werthe: $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{7}{17}$, $\frac{9}{21}$, $\frac{11}{25}$, $\frac{13}{29}$, $\frac{15}{33}$, u. s. w. Man erkennt leicht, daß diese Brüche immer echt bleiben, mit einiger Aufmerksamkeit aber auch, daß sie dem Bruche $\frac{1}{2}$ sich

immer mehr und mehr nähern. Letzteres sieht man aber klarer, wenn man statt x die Reciproke $\frac{1}{x}$ einführt. Dividirt man nämlich Zähler und Nenner des Quotienten $\frac{2x-1}{4x+1}$ durch x, so entsteht $\frac{2-\frac{1}{x}}{4+\frac{1}{x}}$. Setzt man nun für x immer größere und größere Zahlen, so wird $\frac{1}{x}$ immer kleiner und kleiner und nähert sich ohne Aufhören der 0; folglich nähert sich $\frac{2-\frac{1}{x}}{4+\frac{1}{x}}$ immer mehr und mehr dem Bruche $\frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$. Geht man zur Grenze über, so wird also $\frac{2x-1}{4x+1}$ für $x = \infty$ dem Werthe $\frac{1}{2}$ gleich.

Setzt man in folgende Ausdrücke für x immer größere Zahlen und geht endlich zur Grenze ∞ über:

$$x \pm a, \quad a - x, \quad a \cdot x, \quad \frac{x}{a}, \quad \frac{a}{x},$$

so erhält man bezüglich die Werthe:

$$\infty, \quad -\infty, \quad \infty, \quad \infty, \quad 0,$$ d. h. es ist

$$\infty \pm a = \infty, \; a - \infty = -\infty, \; a \cdot \infty = \infty, \; \frac{\infty}{a} = \infty, \; \frac{a}{\infty} = 0.$$

Setzt man aber für x immer kleinere Zahlen und geht zur Grenze 0 über, so entstehen bezüglich die Werthe:

$$\pm a, \quad a, \quad 0, \quad 0, \infty,$$ d. h. es ist, wenn 0 als Grenze der unendlich kleinen Zahl aufgefaßt wird:

$$0 \pm a = \pm a, \; a - 0 = a, \; a \cdot 0 = 0, \; \frac{0}{a} = 0, \; \frac{a}{0} = \infty.$$

Da die ersten vier dieser fünf Gleichungen auch richtig sind, wenn man unter 0 die Differenz zweier gleichen Zahlen versteht, so können diese Gleichungen in einem doppelten Sinne aufgefaßt werden. So sagt z. B. die Gleichung $a \cdot 0 = 0$ sowohl „multiplicirt man die Differenz zweier gleichen Zahlen (Null) mit einer beliebigen (endlichen) Zahl, so erhält man wieder eine Differenz zweier gleichen Zahlen", als auch: „multiplicirt man eine unendlich kleine Zahl mit einer endlichen Zahl, so erhält man wieder eine unendlich kleine Zahl." Hingegen gilt die Gleichung $\frac{a}{0} = \infty$ nur, wenn 0 als eine unendlich kleine Zahl aufgefaßt wird, und sagt: „der Quotient $\frac{a}{x}$ kommt der Grenze

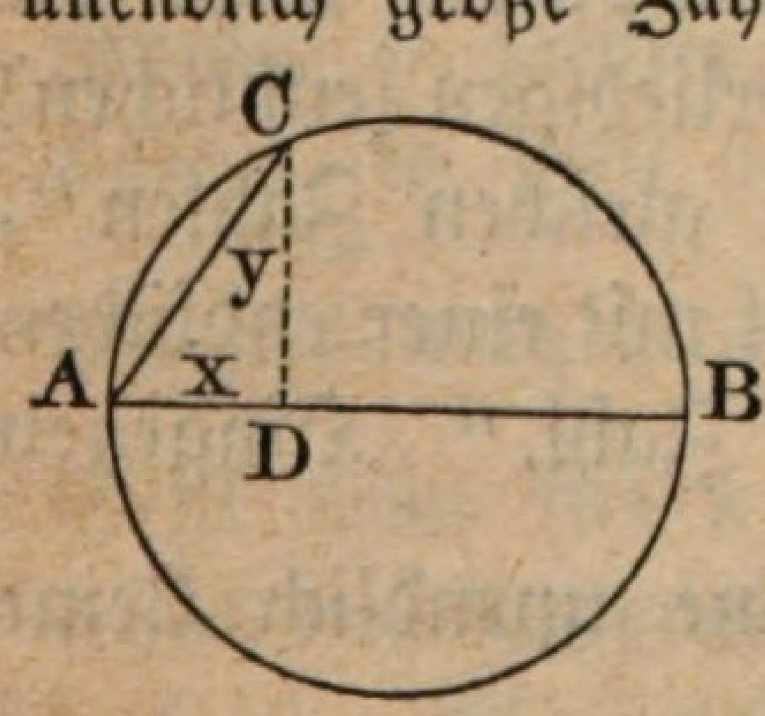
∞ um so näher, je näher x der Grenze Null rückt" oder „dividirt man eine endliche Zahl durch eine unendlich kleine Zahl, so erhält man eine unendlich große Zahl."

So aufgefaßt, steht die Geichung $\frac{a}{0} = \infty$ mit §. 31. 3 nicht im Widerspruch.

Endlich findet man noch: $\infty + \infty = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $0 + 0 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$, wenn 0 eine unendlich kleine Zahl bedeutet; hingegen sind $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$, so wie $\frac{0}{0}$ unbestimmte Ausdrücke. Sind aber ∞ und 0 Grenzwerthe bestimmter gegebener Ausdrücke, so können alle diese Formen auch bestimmte Werthe haben. So z. B. in dem oben angeführten Beispiele $\frac{2x-1}{4x+1}$. Zähler und Nenner dieses Bruches werden für $x = \infty$ selbst ∞, aber der Quotient hat den Grenzwerth $\frac{1}{2}$. Ferner werden $2x^2 - 3x$ und $4x^2 - x$ unendlich klein, wenn x unendlich klein wird, der Quotient $\frac{2x^2-3x}{4x^2-x} = \frac{2x-3}{4x-1}$ aber hat den Grenzwerth 3, wenn x im Verschwinden gedacht wird. — Das Product $(2+3x) \cdot \frac{3+x}{x+4x^2}$ nimmt für $x = \infty$ die Form $\infty \cdot 0$ an; denn der erste Factor wird ∞, der zweite aber erhält, wenn man Zähler und Nenner durch x dividirt, die Form $\frac{\frac{3}{x}+1}{1+4x}$ und geht für $x = \infty$ in $\frac{1}{\infty}$ oder 0 über. Dieses Product hat aber für $x = \infty$ den bestimmten Werth $\frac{3}{4}$, denn es läßt sich so umformen:

$$\frac{(2+3x)\,(3+x)}{x+4x^2} = \frac{\left(\frac{2}{x}+3\right)\left(\frac{3}{x}+1\right)}{\frac{1}{x}+4}.$$

Anmerk. Es kann der Quotient unendlich kleiner Zahlen sogar eine unendlich große Zahl sein. So wird z. B. in der Geometrie bewiesen, daß,



wenn AB der Durchmesser eines Kreises ist, AC eine von A aus beliebig gezogene Sehne und CD auf AB senkrecht steht, dann immer die Quotienten $\frac{AC}{AD}$ und $\frac{AB}{AC}$ gleich sind. Nimmt man etwa die Länge AB als Einheit, bezeichnet AD mit x und AC mit y, so ist also $\frac{y}{x} = \frac{1}{y}$. Denkt man sich nun x immer kleiner werdend und sich der Grenze 0 nähernd,

so wird auch y immer kleiner und nähert sich der Grenze 0; ihr Quotient ist aber $= \frac{1}{y}$, d. h. ihr Quotient wird nach und nach immer größer und für ein unendlich kleines y unendlich groß. Sind also x und y unendlich klein, so ist $\frac{y}{x} = \infty$, d. h. das unendlich kleine x ist in dem unendlich kleinen y unendlich oft enthalten. Man erkennt hieraus, daß x der Grenze 0 unendlich schneller zueilt als y, obwohl beide gleichzeitig diese Grenze erreichen müssen, in welchem Falle dann natürlich eine Vergleichung zwischen ihnen nicht mehr Statt finden kann. Man pflegt eine solche unendlich kleine Zahl x, welche im Verhältniß zu einer andern unendlich kleinen Zahl y selbst unendlich klein ist, eine **unendlich kleine Zahl höherer Ordnung** zu nennen.

§. 39.
Multiplication und Division benannter Zahlen.

Die Summanden einer Summe können gleiche und gleichbenannte Zahlen sein, die Angabe der Anzahl dieser Summanden geschieht natürlich durch eine abstracte Zahl. Daher kann der Multiplicandus eines Products eine benannte Zahl sein, der Multiplicator nur eine unbenannte; z. B. 3 × 4 Pfd. = 4 Pfd + 4 Pfd. + 4 Pfd. = 12 Pfd.

Bezeichnet E die Benennung, so folgt aus §. 23. 1:

$$\text{I.} \quad n \times aE = (n \cdot a)\, E,$$

d. h. eine benannte Zahl wird multiplicirt, wenn man die abstracte Zahl multiplicirt und die Benennung beibehält, z. B. 6 × 7 Thlr. = 42 Thlr. Jede benannte Zahl kann man jetzt als ein Product ihrer abstracten Zahl und der benannten Einheit betrachten, z. B. 6 Pfd. = 6 × 1 Pfd. — Ferner ist a × b Pfd. = b × a Pfd.; auch schreibt man wohl b Pfd. × a, versteht aber darunter die Summe von a gleichen Summanden: b Pfd. + b Pfd. + b Pfd. + ...

Von dem Product a × b Pfd. kann man zu einem jeden beider Factoren zurückkehren, d. h. es ist, wenn man (a • b) Pfd. statt a × b Pfd. setzt:

$$\frac{(a \cdot b)\,\text{Pfd.}}{a} = b\ \text{Pfd. und}\ \frac{(a \cdot b)\,\text{Pfd.}}{b\ \text{Pfd.}} = a.$$

Hieraus folgt: 1) Man kann eine benannte Zahl durch eine unbenannte dividiren, der Quotient ist dann eine benannte Zahl. 2) Man kann eine benannte Zahl durch eine gleichbenannte dividiren, der Quotient ist eine unbenannte Zahl oder, wie man gewöhnlich sagt, die Benennung hebt sich dann fort.

Beide Male dividirt man die abstracten Zahlen durch einander, muß aber im ersten Falle dem Quotienten dieselbe Benennung hinzufügen.

Es ist also: II. $\frac{aE}{b} = \frac{a}{b} E$; $\frac{aE}{bE} = \frac{a}{b}$.

Das Gesetz I. gilt auch, wenn n ein Bruch ist, z. B. $n = \frac{p}{q}$; denn es ist:

$$\frac{p}{q} \times aE = p \times \frac{aE}{q} = p \times \frac{a}{q} E = \left(p \cdot \frac{a}{q}\right) E = \left(\frac{p}{q} \cdot a\right) E.$$

Auch das Product einer benannten Zahl mit einer gebrochenen unbenannten können wir als eine Summe gleicher Summanden auffassen, z. B. $\frac{11}{4} \times 5$ Pfd. als eine Summe von 11 gleichen Summanden, von denen jeder $\frac{5}{4}$ Pfd. ist. Wir können aber auch $\frac{11}{4}$ in die gemischte Zahl $2\frac{3}{4}$ verwandeln und nun das Product $2\frac{3}{4} \times 5$ Pfd. als eine Summe auffassen, in welcher 5 Pfd. zweimal und der 4te Theil von 5 Pfd. dreimal als Summand enthalten ist (vergl. Seite 30 unten).

Bei der Division benannter Zahlen müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1) Ist der Divisor eine unbenannte Zahl, z. B. $\frac{24 \text{ Pfd.}}{3} = 8$ Pfd. oder $\frac{32 \text{ Pfd.}}{5} = \frac{52}{5}$ Pfd., so ist die Division als ein Zerlegen in gleiche Theile aufzufassen, und der Quotient ist der Theil. Ist der Divisor ein Bruch, so können wir diesen Fall auf den eben betrachteten zurückführen; denn soll eine benannte Zahl durch $\frac{7}{4}$ dividirt werden, so können wir das 4fache derselben durch 7 dividiren, also in 7 gleiche Theile zerlegen.

2) Wenn Dividendus und Divisor benannte Zahlen sind. Wie man in diesem Falle die Division aufzufassen hat, ergiebt sich am einfachsten aus einem Beispiele. Es ist $\frac{67 \text{ Pfd.}}{7 \text{ Pfd.}} = 9\frac{4}{7}$. Dieses Resultat zeigt, daß 67 Pfd. nicht so in gleiche Theile zerlegt werden kann, daß jeder Theil 7 Pfd. ist, daß also die Vorstellung des Zerlegens in gleiche Theile hier nicht zulässig ist. Es sagt vielmehr der Quotient $9\frac{4}{7}$: es läßt sich 67 Pfd. als eine Summe betrachten, in welcher 7 Pfd. 9mal und der 7te Theil von 7 Pfd. noch 4mal enthalten ist. Vergleicht man hiermit das am Schlusse des §. 1. Gesagte, so erscheint die Division $\frac{67 \text{ Pfd.}}{7 \text{ Pfd.}}$ als ein Messen der Größe 67 Pfd. durch die Größe 7 Pfd., welche letztere also als das Gemäß anzusehen ist. Der Quotient giebt dann an, wie oft 7 Pfd. in 67 Pfd. enthalten ist, oder wie oft 7 Pfd. von 67 Pfd. sich abziehen läßt; er sagt im Besonderen: 7 Pfd. läßt sich von 67 Pfd. 9mal abziehen, und es bleibt der Rest 4 Pfd., von welchem sich der 7te Theil von 7 Pfd. noch 4mal abziehen läßt.

Nur wenn der Quotient eine ganze Zahl ist, z. B. $\frac{24 \text{ Pfd.}}{3 \text{ Pfd.}} = 8$, läßt sich der Dividendus so in gleiche Theile zerlegen, daß jeder der Divisor ist, und der Quotient giebt dann die Anzahl der Theile. In diesem besonderen Falle, wenn der Quotient $\frac{aE}{bE}$ eine ganze Zahl ist, nennt man die Größe bE einen aliquoten Theil der Größe aE.

Die Division einer benannten Zahl durch eine unbenannte führt zur gebrochenen benannten Zahl und zur gebrochenen benannten Einheit; z. B. $\frac{8 \text{ Pfd.}}{7} = \frac{8}{7}$ Pfd. $= 8 \times \frac{1}{7}$ Pfd.

Der gebrochenen benannten Einheit giebt man häufig eine besondere Benennung, wenn sie zum Messen der Größen als Gemäß praktisch gebraucht wird. Man nennt z. B. $\frac{1}{30}$ Thl. einen Silbergroschen, $\frac{1}{12}$ Sgr. einen Pfenning, $\frac{1}{16}$ Scheffel eine Metze, u. s. w. — Soll eine benannte Zahl auf eine niedere Bennenung gebracht werden, so hat man sie durch die gebrochene Einheit auszudrücken, also ihre abstracte Zahl mit dem Nenner der gebrochenen Einheit zu multipliciren: $aE = \frac{ab}{b}E = ab \times \frac{1}{b}E$; 6 Thlr. $= 6 \cdot 30 \cdot (\frac{1}{30}$ Thlr.!$) = 180$ Sgr. Will man sie aber auf eine höhere Benennung bringen, so hat man zu dividiren: $aE = \frac{a}{b} \times bE$; 7 Metzen $= \frac{7}{16} \times 16$ Mtz. $= \frac{7}{16}$ Schffl.

Größen, welche sich auf dieselbe Benennung bringen lassen, heißen gleichartig, haben sie dieselbe Benennung: gleichbenannt oder auch wohl gleichnamig.

Es mag hier schon bemerkt werden, daß nur die Addition, Subtraction, Multiplication und Division auf benannte Zahlen Anwendung finden. Benannte Zahlen kann man nicht mit einander multipliciren, also kann man sie auch nicht potenziren (§. 5. 3), und die Wurzel und der Logarithmus setzen die Potenz voraus.

Von den Proportionen.

§. 40.

Erklärung.

Vergleicht man zwei Zahlen a und b mit einander, um zu ermitteln, um wie viel die eine größer ist, als die andere, so sucht man ihr arithmetrisches Verhätniß; will man aber ermitteln, wie viel Mal so groß, als die andere, die eine ist, so sucht man ihr geometrisches Verhältniß. Man nennt daher die Differenz

$a - b$ und den Quotienten $\frac{a}{b}$ oder $a:b$ bezüglich das arithmetische und geometrische Verhältniß von a zu b, a das **Vorderglied**, b das **Hinterglied**, und das Verhältniß **steigend** oder **fallend**, je nachdem $a < b$ oder $a > b$ ist. Zwei gleiche arithmetische Verhältnisse bilden eine **arithmetische Proportion** $a - b = c - d$ (a verhält sich arithmetisch zu b, wie c zu d); zwei gleiche geometrische Verhältnisse eine **geometrische Proportion** $a:b = c:d$ (a verhält sich zu b, wie c zu d). In beiden Proportionen nennt man a und c, so wie auch b und d **homologe** Glieder; ferner a und d die **äußeren**, b und c die **inneren** (mittleren) Glieder. — Sind die inneren oder äußeren Glieder gleich, so heißt die Proportion eine **stetige**, z. B. $a - b = b - c$, $a:b = b:c$.

Alle Gesetze für Proportionen folgen aus den Gesetzen für Differenzen und Quotienten.

§. 41.

Die arithmetischen Proportionen.

Aus $a - b = c - d$ folgt, wenn man zu beiden Seiten $b + d$ addirt: $a + d = b + c$, d. h. es ist die Summe der inneren Glieder gleich der der äußeren. Ist die Proportion stetig: $a - b = b - c$, so ist also $2b = a + c$, folglich $b = \frac{a+c}{2}$, und diesen Ausdruck nennt man das **arithmetische Mittel** von a und c. Will man die Summe zweier Zahlen a und c in die Summen zweier **gleichen** Summanden zerlegen, so ist offenbar jeder Summand $= \frac{a+c}{2}$. Diese Aufgabe gestattet eine Erweiterung. Will man eine Summe von 3, 4, u. s. w. Summanden in eine Summe von 3, 4, u. s. w. **gleichen** Summanden verwandeln, so sind $\frac{a+b+c}{3}$, $\frac{a+b+c+d}{4}$, u. s. w. die entsprechenden Summanden. Man nennt daher $\frac{a+b+c}{3}$ das arithmetische Mittel von a, b und c; $\frac{a+b+c+d}{4}$ das arithmetische Mittel von a, b, c und d, u. s. w.

Beispiel. Bei der Vermessung einer Feldmark wurde eine Hauptlinie 6mal gemessen, und man erhielt für ihre Länge die 6 Werthe: $604\frac{2}{3}$ Ruthen, $604\frac{1}{2}°$, $604\frac{5}{6}°$, $604\frac{3}{4}°$, $604\frac{5}{12}°$ und $604\frac{1}{3}°$. Wie schließt man auf die wahre Länge? Da die geringe Verschiedenheit der 6 Werthe durch die Unebenheit des Bodens hinreichend erklärt ist, so kann man annehmen, daß jeder

einzelne Werth von der wahren Länge wenig abweicht; einige Werthe werden zu groß, andere zu klein sein. Bezeichnen a, b, c, d, e, f die 6 Werthe und α, β, γ, δ, ε und φ die negativen oder positiven Differenzen dieser Werthe und der wahren Länge x, so daß

$$x = a + \alpha = b + \beta = c + \gamma = d + \delta = e + \varepsilon = f + \varphi$$

ist: so folgt

$$6x = a + b + c + d + e + f + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \varphi,$$

also $x = \frac{a + b + c + d + e + f}{6} + \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \varphi}{6}$.

Nun sind α, β, γ, δ, ε und φ sehr klein im Verhältniß zu a, b, c rc., überdies wahrscheinlich theils positiv, theils negativ; folglich ist ihre Summe, und um so mehr der 6te Theil derselben, sehr klein; man kann daher $\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \varphi}{6}$ als unbedeutend gegen den ersten Summand $\frac{a + b + c + d + e + f}{6}$ vernachlässigen, und erhält $x = \frac{a + b + c + d + e + f}{6}$, d. h. gleich dem arithmetischen Mittel der gefundenen Werthe. Es ist also

$$x = \tfrac{1}{6}[6 \cdot 604 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{6} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{5}{12} + \tfrac{1}{3}]^\circ = 604\tfrac{7}{12}{}^\circ.$$

Die geometrischen Proportionen.

§. 42.

Lehrsätze.

Aus $a : b = c : d$ folgt, wenn man beide Seiten mit bd multiplicirt, $ad = bc$; auch kann man die erste Gleichung aus der zweiten herleiten, wenn man beide Seiten der letzteren durch bd dividirt. Hieraus folgt:

1) In jeder geometrischen Proportion ist das Product der äußeren Glieder dem Producte der inneren gleich.

2) Jede geometrische Proportion ist richtig, wenn das Product der äußeren Glieder dem Producte der inneren gleich ist.

Ist die Proportion stetig $a : b = b : c$, so folgt $b^2 = ac$, folglich $b = \sqrt[2]{ac}$ (§. 5., 6). Den Ausdruck $\sqrt[2]{ac}$ nennt man die mittlere geometrische Proportionale zwischen a und c.

Soll ein Product ac in ein Product zweier gleichen Factoren verwandelt werden, so ist offenbar jeder Factor $= \sqrt[2]{ac}$, und will man ein Product von 3, 4, ... Factoren in ein Product von 3, 4, ... gleichen Factoren zerlegen, so sind $\sqrt[3]{abc}$, $\sqrt[4]{abcd}$, ... die

entsprechenden Factoren, welche man dann analog die mittlere geometrische Proportionale zwischen a, b, c, zwischen a, b, c, d, u. s. w. nennt.

Die arithmetischen Proportionen finden eine sehr geringe Anwendung, die geometrischen aber eine so bedeutende, namentlich auch in der Geometrie (daher der Namen), daß wir unter einer Proportion immer eine geometrische verstehen wollen, wenn nicht ausdrücklich „arithmetische" hinzugefügt ist.

§. 43.

Folgerungen.

Mit einer Proportion kann man manche Veränderungen vornehmen, ohne ihre Richtigkeit zu stören. So kann man die innern Glieder mit einander vertauschen, oder die äußern; homologe Glieder kann man mit derselben Zahl multipliciren oder durch dieselbe Zahl dividiren, u. s. w. Hat man z. B. $a:b = c:d$, so folgt:

$$a:c = b:d$$
$$d:b = c:a$$
$$b:a = d:c$$
$$na:b = nc:d$$
$$na:b = c:\frac{d}{n}$$
$$na:nb = mc:md$$
$$\frac{a}{n}:b = \frac{c}{n}:d$$
$$a:\frac{b}{n} = c:\frac{d}{n}, \text{ u. s. w.}$$

Bei allen solchen Umformungen hat man nur darauf zu achten, daß das Product der inneren Glieder dem der äußeren gleich bleibt (§. 42. 2).

Von besonderer Wichtigkeit ist auch das Bilden einer Proportion aus zwei gleichen Producten: man macht die Factoren des einen Products zu inneren, die des anderen zu äußeren Gliedern. Ist z. B. $nm = pq$, so folgt $n:p = q:m$ oder $p:m = n:q$, u. s. w.

§. 44.

Lehrsatz.

Hat man beliebig viele gleiche Brüche, so giebt die algebraische Summe der Zähler durch die entsprechende algebraische Summe der Nenner dividirt, wieder denselben Bruch.

Es ist z. B. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{14}{21} = \frac{10}{15}$, folglich

$$\frac{2+4+6-14+10}{3+6+9-21+15} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Beweis. Es sei $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} =$ ꝛc., und t bezeichne jeden dieser Brüche, so folgt:

$$a_1 = b_1 \cdot t$$
$$a_2 = b_2 \cdot t$$
$$a_3 = b_3 \cdot t, \text{ u. s. w.},$$

folglich, wenn man beliebig addirt oder subtrahirt:

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots = t \cdot [\pm b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots],$$

daher $\frac{\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots}{\pm b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots} = t = \frac{a_1}{b_1}$. — Die Vorzeichen sind beliebig zu wählen, nur muß man jedem Summanden im Nenner dasselbe Vorzeichen geben, welches der entsprechende Summand im Zähler hat. — Man kann vor der Anwendung des Satzes Zähler und Nenner jedes Bruches mit derselben Zahl multipliciren, also die Summe der beliebig vielfachen Zähler durch die Summe der entsprechend vielfachen Nenner dividiren. Bei der oben angegebenen Voraussetzung ist also auch $\frac{na_1 - ma_2 + pa_3}{nb_1 - mb_2 + pb_3} = \frac{a_1}{b_1}$

§. 45.

Die Summen- und Differenzensätze bei Proportionen.

Der vorstehende Lehrsatz findet auf Proportionen Anwendung. Verhält sich $a : b = c : d$, so kann man die mittleren Glieder vertauschen, $a : c = b : d$, und nun den Satz auf die gleichen Brüche $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ und $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ anwenden.

So erhält man aus der Voraussetzung:

$$a : b = c : d$$

folgende Proportionen:

$$a \pm b : c \pm d = \begin{cases} a : c \\ b : d \end{cases}$$

oder, wenn man die mittleren Glieder vertauscht:

1) $a \pm b : \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = c \pm d : \begin{Bmatrix} c \\ d \end{Bmatrix}$, folglich auch

2) $a + b : a - b = c + d : c - d$, und dann noch

3) $a \pm c : b \pm d = \begin{cases} a : b \\ c : d \end{cases}$,

d. h. in jeder Proportion verhält sich:

I. die Summe oder Differenz des ersten und zweiten Gliedes zum ersten oder zweiten Gliede, wie die Summe oder Differenz des dritten und vierten Gliedes zum dritten oder vierten Gliede;

II. die Summe des ersten und zweiten Gliedes zu ihrer Differenz, wie die Summe des dritten und vierten Gliedes zu ihrer Differenz;

III. die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Anmerk. 1. Ganz allgemein folgt aus $a : b = c : d$,

$$na + mb : pa + qb = nc + md : pc + qd.$$

Die Factoren n, m, p und q können beliebig positiv oder negativ oder Null sein.

Beispiele. 1) Aus $a : a + x = c : d$ folgt $a : x = c : d - c$.

2) Aus $\frac{y - b}{y - b_1} = \frac{x - a}{x - a_1}$ folgt $\frac{y - b}{b_1 - b} = \frac{x - a}{a_1 - a}$.

3) Aus $2x + 3 : x + 1 = 8 : 3$ folgt:

$$(2x + 3) - 2(x + 1) : x + 1 = 8 - 2 \cdot 3 : 3$$ oder:

$$1 : x + 1 = 2 : 3;$$ hieraus folgt wieder:

$$1 : x = 2 : 1.$$

Diese Proportion, also auch die ursprüngliche, ist nur richtig, wenn $x = \frac{1}{2}$ ist (§. 42.).

Anmerk. 2. Bei Proportionen ist es Gebrauch, die Glieder ohne Klammern zu schreiben, auch wenn sie zusammengesetzte Ausdrücke sind.

§. 46.

Das Zusammensetzen der Proportionen.

Multiplicirt man alle ersten, zweiten, dritten und vierten Glieder beliebig vieler Proportionen mit einander, so erhält man wieder eine richtige Proportion. Man nennt dies: Proportionen zusammensetzen. Aus

$$a : b = \alpha : \beta$$
$$c : d = \gamma : \delta$$
$$e : f = \varepsilon : \varphi$$ folgt
$$ace : bdf = \alpha\gamma\varepsilon : \beta\delta\varphi.$$

Sind Proportionen von folgender Form gegeben:

$$a : b = \alpha : \beta$$
$$b : c = \gamma : \delta$$
$$c : d = \varepsilon : \varphi$$
$$d : e = \mu : \nu,$$

so folgt, wenn man die ersten beiden, dann die ersten drei, dann alle vier Proportionen zusammensetzt:

$$a : c = \alpha\gamma : \beta\delta$$
$$a : d = \alpha\gamma\varepsilon : \beta\delta\varphi$$
$$a : e = \alpha\gamma\varepsilon\mu : \beta\delta\varphi\nu.$$

§. 47.

Die laufenden Proportionen.

Hat man Proportionen von folgender Form:

$$1) \begin{cases} a : b = \alpha : \beta \\ b : c = \beta : \gamma \\ c : d = \gamma : \delta \\ d : e = \delta : \varepsilon, \end{cases}$$

so erhält man durch Zusammensetzen:

$$2) \begin{cases} a : b = \alpha : \beta \\ a : c = \alpha : \gamma \\ a : d = \alpha : \delta \\ a : e = \alpha : \varepsilon, \end{cases}$$

und vertauscht man noch die innern Glieder, so entstehen die gleichen Brüche:

$$3) \ \frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = \frac{d}{\delta} = \frac{e}{\varepsilon}.$$

Die Proportionen in 1) und 2) und die gleichen Brüche in 3) faßt man durch folgende Schreibart zusammen:

$$4) \ a : b : c : d : e = \alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon,$$

nennt diese Darstellung eine **laufende Proportion**, jede Seite ein **laufendes Verhältniß** und a, b, c, ... die **Vorderglieder**, α, β, γ, ... die **Hinterglieder**.

Für laufende Proportionen merke man die Gesetze:

I. Es verhalten sich zwei beliebige Vorderglieder zu einander, wie die entsprechenden Hinterglieder; z. B. $e : b = \varepsilon : \beta$.

Der Beweis folgt entweder unmittelbar aus einer der Proportionen in 1), oder durch Zusammensetzen dieser Proportionen.

II. Es verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede; also
$a + b + c + d + e : \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = a : \alpha = b : \beta =$ ꝛc.

Beweis aus 3) und §. 44.

III. Die laufende Proportion bleibt richtig, wenn man alle Hinterglieder (oder auch alle Vorderglieder) mit derselben Zahl multiplicirt, oder durch dieselbe Zahl dividirt; z. B.

$$a : b : c : d : e = n\alpha : n\beta : n\gamma : n\delta : n\varepsilon.$$

Der Beweis folgt aus 1) oder 2) und §. 29. I. — Uebrigens ergeben sich auch die Sätze I. und III. sehr einfach aus 3).

Aus III. folgt, daß man eine Verhältnißzahl in 1 verwandeln kann, wenn man alle Verhältnißzahlen durch diese eine dividirt; z. B.

$$a : b : c : d : e = \frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\beta}{\gamma} : 1 : \frac{\delta}{\gamma} : \frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

§. 48.

Aufgabe.

Das laufende Verhältniß zwischen n Buchstaben a, b, c, ... zu finden, wenn n — 1 von einander unabhängige Verhältnisse zwischen immer zwei dieser Buchstaben gegeben sind.

Auflösung. Es mögen zwischen den 6 Buchstaben a, b, c, d, e, f folgende 5 Verhältnisse gegeben sein:

$$1)\quad a : d = 4 : 3$$
$$2)\quad b : f = 5 : 9$$
$$3)\quad e : c = 3 : 5$$
$$4)\quad c : d = 5 : 6$$
$$5)\quad b : e = 20 : 9.$$

Diese Verhältnisse sind von einander unabhängig, weil keins derselben aus den anderen hergeleitet werden kann. — Man gebe nun einem Buchstaben, am zweckmäßigsten demjenigen, welcher in den gegebenen Proportionen am häufigsten vorkommt, die Verhältnißzahl 1 und bestimme demgemäß die Verhältnißzahlen der andern Buchstaben. Geben wir z. B. dem Buchstaben e die Verhältnißzahl 1, so folgt aus 3):

$$6)\quad e : c = 1 : \tfrac{5}{3}.$$

Aus 5) folgt:

$$7)\quad e : b = 1 : \tfrac{20}{9}.$$

Aus 4) folgt $c : d = 5 : 6 = \tfrac{5}{3} : 2$, also

$$8)\quad c : d = \tfrac{5}{3} : 2.$$

Aus 1) folgt $d : a = 3 : 4 = 1 : \tfrac{4}{3} = 2 : \tfrac{8}{3}$, also

$$9)\quad d : a = 2 : \tfrac{8}{3}.$$

Aus 2) folgt $b : f = 5 : 9 = 20 : 36 = \tfrac{20}{9} : 4$, also

$$10)\quad b : f = \tfrac{20}{9} : 4.$$

Stellen wir die Proportion 6) bis 10) in einer zweckmäßigen Ordnung zusammen, so haben wir:

$$\begin{aligned} e : c &= 1 : \tfrac{5}{3} \\ c : d &= \tfrac{5}{3} : 2 \\ d : a &= 2 : \tfrac{8}{3} \\ e : b &= 1 : \tfrac{20}{9} \\ b : f &= \tfrac{20}{9} : 4. \end{aligned}$$

Aus den ersten drei Proportionen folgt:

$$e:c:d:a = 1:\tfrac{5}{3}:2:\tfrac{8}{3},$$

und aus den letzten beiden:

$$e:b:f = 1:\tfrac{20}{9}:4,$$

hieraus aber:

$$e:c:d:a:b:f = 1:\tfrac{5}{3}:2:\tfrac{8}{3}:\tfrac{20}{9}:4.$$

Multipliciren wir alle Hinterglieder mit 9, so folgt

$$e:c:d:a:b:f = 9:15:18:24:20:36.$$

Auf den ersten Blick mag dieses Verfahren weitläufig erscheinen; es ist aber in der That kurz und bequem, wenn man sich der folgenden praktischen Darstellung bedient. Man schreibt die Buchstaben a, b, c, d, e, f neben einander hin, setzt über einen, etwa e, die Verhältnißzahl 1 und nun nach und nach über die andern Buchstaben die entsprechenden Verhältnißzahlen, wie sie aus den gegebenen Proportionen sehr leicht durch Kopfrechnung zu ermitteln sind. Schließlich verhalten sich die Buchstaben zu einander, wie die über sie gesetzten Verhältnißzahlen. Zur Erläuterung ein anderes Beispiel.

Beispiel 2. Gegeben
1) $e:f = 2:3$
2) $c:d = 8:9$
3) $b:a = 4:5$
4) $b:e = 12:5$
5) $d:f = 3:5$.

Auflösung.

$$\begin{matrix} \tfrac{5}{4} & 1 & \tfrac{1}{3} & \tfrac{3}{8} & \tfrac{5}{12} & \tfrac{5}{8} \\ a, & b, & c, & d, & e, & f. \end{matrix}$$

$$a:b:c:d:e:f = \tfrac{5}{4}:1:\tfrac{1}{3}:\tfrac{3}{8}:\tfrac{5}{12}:\tfrac{5}{8}.$$

Multiplicirt man rechts alle Verhältnißzahlen mit 24, so entsteht:

$$a:b:c:d:e:f = 30:24:8:9:10:15.$$

Erläuterung. Zuerst wurde für b die Verhältnißzahl 1 gewählt. Aus 3) folgt, daß a die Verhältnißzahl $\frac{5}{4}$, aus 4), daß e die Verhältnißzahl $\frac{5}{12}$ hat. Aus 1) folgt, daß f die Verhältnißzahl $\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{2} = \frac{5}{8}$ hat; endlich folgt aus 5) für d die Verhältnißzahl $\frac{3}{8}$.

Beispiel 3.
1) $a:b = 2:3$
2) $b:c = 4:3$
3) $c:d = 6:5$
4) $d:e = 2:1$.

Auflös.

$$\begin{matrix} 1 & \tfrac{3}{2} & \tfrac{9}{8} & \tfrac{15}{16} & \tfrac{15}{32} \\ a, & b, & c, & d, & e \end{matrix}$$

$$a:b:c:d:e = 32:48:36:30:15.$$

Beispiel 4.
1) $a:b = 6:5$
2) $a:c = 3:4$
3) $a:d = 5:1$
4) $a:e = 12:11$.

Auflös. $\overset{1}{a},\ \overset{\frac{5}{6}}{b},\ \overset{\frac{4}{3}}{c},\ \overset{\frac{1}{5}}{d},\ \overset{\frac{11}{12}}{e}$

$a:b:c:d:e = 60:50:80:12:55.$

Beispiel 5. 1) $a:d = p:q$
2) $b:e = n:p$
3) $c:d = p:n$
4) $b:c = n:m.$

Auflös. $\overset{\frac{m}{q}}{a},\ \overset{1}{b},\ \overset{\frac{m}{n}}{c},\ \overset{\frac{m}{p}}{d},\ \overset{\frac{p}{n}}{e}.$

$$a:b:c:d:e = \frac{m}{q}:1:\frac{m}{n}:\frac{m}{p}:\frac{p}{n}.$$

Multiplicirt man mit npq, so folgt:

$$a:b:c:d:e = nmp : npq : mpq : nmq : p^2q.$$

Beispiel 6. Gegeben $a:b = 1:2$; $c:d = 2:3$; $e:f = 3:4$; $b:f = 1:3$; $c:e = 1:2$.

Auflös. $a:b:c:d:e:f = 8:16:18:27:36:48.$

Beispiel 7. Gegeben $a:b = 2:3$; $b:c = 5:4$; $c:d = 3:5$.

Auflös. $a:b:c:d = 10:15:12:20.$

Beispiel 8. Gegeben $b:e = 3:4$; $c:d = 10:11$; $c:a = 5:4$; $e:a = 3:2$.

Auflös. $a:b:c:d:e = 8:9:10:11:12.$

Drittes Kapitel.

Die Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.

§. 49.

Erklärung.

Die Potenz a^n bezeichnet ein Product von n gleichen Factoren, von denen jeder a ist. a^2, a^3, a^4 heißen auch bezüglich das Quadrat, der Kubus, das Biquadrat von a. — Der Dignand (auch die Basis) a kann jede beliebige Zahl sein, hingegen der Exponent n nur eine absolute ganze Zahl und größer als 1. Die Potenz ist ein eindeutiger Ausdruck; ist also

1) $a = b$, so folgt $a^n = b^n$.

Ferner folgt aus der Erklärung der Potenz:

2) $1^n = 1$; 3) $0^n = 0$; 4) $a^n \cdot a = a^{n+1}$; 5) $\frac{a^n}{a} = a^{n-1}$.

§. 50.

Die Gesetze über Potenzen.

I. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Daher auch $a^n \cdot a^m \cdot a^p \cdot a^q \ldots = a^{n+m+p+q+\cdots}$

II. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, wenn $n > m$ ist.

III. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

IV. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

V. $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{mn}$.

Die Klammern sind zur Vermeidung von Undeutlichkeiten nothwendig und werden beibehalten.

Die Sätze I. und II. lehren, wie man Potenzen mit gleichen Dignanden multiplicirt und dividirt und wie man eine Zahl mit einer Summe und Differenz potenzirt; III. und IV. zeigen, wie man ein Product und einen Bruch potenzirt und Potenzen mit gleichen Exponenten multiplicirt und dividirt; endlich sagt V., wie man eine Potenz potenzirt und eine Zahl mit einem Product potenzirt. — Die Beweise zu I., III. und V. folgen aus der Erklärung der Potenz, wenn man bei V. die Erweiterung des Satzes I. benutzt. Die Sätze II. und IV. beweist man durch Multiplication beider Seiten mit resp. a^m und b^n. — Ueber Addition und Subtraction zweier Potenzen hat man kein besonderes Gesetz; das Potenziren einer Summe oder Differenz führt zu einem nicht mehr einfachen Satze (dem binomischen), der später folgt. Man verwechsele aber die Summe und Differenz zweier Potenzen nicht mit der Potenz einer Summe oder Differenz, denn $a^n \pm b^n$ und $(a \pm b)^n$ sind ungleiche Ausdrücke.

Zur Uebung. $a^3 \cdot a^4 = a^7$; $\frac{a^{12}}{a^5} = a^7$; $a^{n-m} \cdot a^{n+m} = a^{2n} = (a^n)^2 = (a^2)^n$; $\frac{a^{n+m}}{a^{n-m}} = a^{2m}$; $a^3 \cdot a^2 = a^5$; $(a^3)^2 = a^6$; $(a^2b)^2 = a^4b^2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$; $\frac{(a^3b^2)^3}{(a^2b^3)^2} = a^5$; $3^{4-x} = \frac{81}{3^x}$; $2^{3+x} = 8 \cdot 2^x$; $3^{2x-1} = \frac{1}{3} \cdot 9^x$; $a^n\left(\frac{b}{a}\right)^{n-3} = a^3b^{n-3}$; $a^6 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^4 = a^2$; $a^{n-1} \cdot a^{n-2} = a^{2n-3}$; $\frac{a^9}{a} = a^8$; $\frac{a^9}{a^8} = a$; $\frac{a^n}{a^{n-1}} = a$ (§. 49. 4 und 5); $\frac{a^n}{a^{n-4}} = a^4$; $\frac{a^n}{a^{n-m}} = a^m$; $1 : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n$; $a^2 + a = a(a+1)$; $a^n - a^{n-3} = a^{n-3}(a^3 - 1)$; $a^n + a^{n+m} = a^n(1 + a^m)$; $a^n + b^n = a^n\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right]$; $2^n - 2^{n+1} = -2^n$; $2^n + 2^{n+2} = 5 \cdot 2^n$; $\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$; $4^n - 4^{n-2} = \frac{15}{16} \cdot 4^n$; $(a+1)^6 + a(a+1)^6 = (a+1)^7$.

Wie groß ist die Hälfte von 2^8? Antw. 2^7.

§. 51.

Als Anwendungen und Erweiterungen der vorstehenden Gesetze gelten die Gleichungen:

1) $a^{n-m+p} = \frac{a^n \cdot a^p}{a^m}$.

2) $a^{n-m-p+q-t+r} = \frac{a^{n+q+r}}{a^{m+p+t}} = \frac{a^n \cdot a^q \cdot a^r}{a^m \cdot a^p \cdot a^t}$.

3) $(abcd)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$.

4) $\left(\frac{ab}{cde}\right)^n = \frac{a^n b^n}{c^n d^n e^n}$.

5) $([(a^n)^m]^p)^q = a^{nmpq} = (a^p)^{nmq} = (a^{nq})^{mp}$.

6) $a : \left(\frac{b}{c}\right)^n = a \cdot \left(\frac{c}{b}\right)^n$.

§. 52.

Potenzen der positiven und negativen Zahlen.

Bezeichnet a eine absolute Zahl, so ist

1) $(+a)^n = +a^n$.

Ferner ist $(-a)^2 = (-a)(-a) = +a^2$,

$(-a)^3 = (-a)^2(-a) = -a^3$,

$(-a)^4 = (-a)^3(-a) = +a^4$,

$(-a)^5 = (-a)^4(-a) = -a^5$, u. s. w.

Um hieraus eine allgemeine Regel herzuleiten, müssen wir also die Zahlen 2, 4, 6, ... von den Zahlen 3, 5, 7, ... unterscheiden, d. h. die geraden Zahlen von den ungeraden. Jede gerade Zahl ist das Product aus 2 und einer ganzen Zahl. Bezeichnet n eine ganze Zahl, so ist $2 \times n$ die allgemeine Form jeder geraden Zahl, und weil auf jede gerade Zahl eine ungerade folgt, so ist $2n + 1$ die allgemeine Form jeder ungeraden Zahl. Nun ist:

2) $(-a)^{2n} = [(-a)^2]^n = (+a^2)^n = +a^{2n}$,

3) $(-a)^{2n+1} = (-a)^{2n} \cdot (-a) = (+a^{2n})(-a) = -a^{2n+1}$.

Zur besseren Uebersicht dient folgende Darstellung:

Dignand	Exponent	Potenz
+	ungerade gerade	+
—	ungerade	—
—	gerade	+

§. 53.

Gesetze.

Bezeichnen a und b absolute Zahlen und ist $a < b$, so folgt:

1) $a^n < b^n$ (§. 36. 6).

2) $\frac{a}{b} > \left(\frac{a}{b}\right)^2 > \left(\frac{a}{b}\right)^3 > \left(\frac{a}{b}\right)^4 >$ u. s. w.

3) $\frac{b}{a} < \left(\frac{b}{a}\right)^2 < \left(\frac{b}{a}\right)^3 < \left(\frac{b}{a}\right)^4 <$ u. s. w.

d. h. der echte Bruch potenzirt, wird um so kleiner, je größer der Exponent ist; der unechte um so größer.

Die Beweise zu 2) und 3) ergeben sich aus §. 36. 2., wenn man von den Ungleichungen

$$\frac{a}{b} < 1 \text{ und } \frac{b}{a} > 1$$

ausgeht und jede Seite der ersten Ungleichung wiederholt mit $\frac{a}{b}$, der zweiten wiederholt mit $\frac{b}{a}$ multiplicirt.

§. 54.

Erklärung. Folgerungen.

Die **Wurzel** $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet die Zahl, welche mit dem **Wurzelexponenten** n potenzirt, den **Radicanden** a giebt. n muß eine absolute ganze Zahl sein und größer als 1. Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man nur $\sqrt{a}$. Man nennt $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$ bezüglich auch die Quadrat-, Kubik- und Biquadratwurzel aus a. Die Wurzel ist nicht immer ein eindeutiger Ausdruck; denn aus §. 52. folgt, daß

$$(+a)^{2n} = (-a)^{2n} = +a^{2n} \text{ ist,}$$

folglich ist $\sqrt[2n]{a^{2n}}$ sowohl $= +a$, als auch $= -a$; z. B. $\sqrt{+4} = \pm 2$.

Dies ist aber auch der einzige Fall, in welchem eine Wurzel zwei verschiedenen reellen Zahlen gleich ist; denn nach §. 53. 1. sind gleichvielte Potenzen von zwei ungleichen absoluten Zahlen immer ungleich, und das Vorzeichen + oder — des Dignanden hat nur auf das Vorzeichen der Potenz, nicht aber auf ihren absoluten Zahlenwerth Einfluß. Hieraus und aus §. 52. folgt:

1) Eine Wurzel mit ungeradem Wurzelexponenten ist nur **einer** reellen Zahl gleich, und zwar einer positiven, oder negativen, je nachdem der Radicand positiv, oder negativ ist; z. B. $\sqrt[3]{+8} = +2$, $\sqrt[3]{-27} = -3$.

2) Eine Wurzel mit geradem Wurzelexponenten aus einer positiven Zahl ist immer zwei reellen Zahlen gleich, welche entgegengesetzte Vorzeichen, aber gleiche Glieder haben; z. B. $\sqrt[4]{+16} = \pm 2$.

3) Eine Wurzel mit geradem Wurzelexponenten aus einer negativen Zahl kann weder einer positiven, noch einer negativen Zahl gleich sein, ist also überhaupt keine reelle Zahl; z. B. $\sqrt[4]{-16}$.

Zur besseren Uebersicht hat man:

Radicand.	Wurzelexponent.	Wurzel.
+	ungerade	+
+	gerade	+ und —
—	ungerade	—
—	gerade	weder +, noch —

Die Wurzel führt sonach auf eine neue Zahlenform; denn ist der Radicand negativ und der Wurzelexponent gerade, so ist die Wurzel keiner reellen Zahl gleich. Die allgemeine Form einer solchen Wurzel ist $\sqrt[2n]{-a}$, und man nennt sie eine *imaginäre* Zahl. Später tritt die Nothwendigkeit ein, auch solche Wurzeln in die Rechnung einzuführen; vorläufig wollen wir die imaginären Wurzeln ausschließen, und dann *kann* $\sqrt[n]{a}$ immer einer positiven, oder negativen Zahl, oder auch einer Zahl mit jedem der beiden Vorzeichen gleich sein. Hiermit ist aber noch nicht bewiesen, daß es wirklich immer eine Zahl giebt, welche $= \sqrt[n]{a}$ ist, d. h. auf die nte Potenz erhoben, a giebt. Nehmen wir z. B. $\sqrt{12}$, so ist $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$; giebt es also eine Zahl, deren Quadrat $= 12$ ist, so muß sie nach §. 53. 1. zwischen 3 und 4 liegen. Nun liegen zwischen 3 und 4 unendlich viele gebrochene Zahlen, deren Quadrate also alle zwischen 9 und 16 liegen; ob aber eins derselben gerade $= 12$ sein muß, wäre erst nachzuweisen. Hierzu reichen aber die bisher entwickelten Gesetze nicht aus; vorläufig genügt es, einzusehen, daß es zwischen 3 und 4 eine gebrochene Zahl geben wird, deren Quadrat sehr nahe an 12 liegt, weil die Quadrate aller denkbaren reellen Zahlen von 3 bis 4, wenn man sie sich geordnet denkt, eine Reihe von Zahlen bilden, welche mit 9 anfangen und allmählich bis 16 wachsen.

§. 55.
Die absolute Wurzel.

Bezeichnet a eine absolute Zahl (oder 0) und setzen wir fest, daß $\sqrt[n]{a}$ nur die absolute Zahl (oder 0) bezeichnen soll, welche mit n potenzirt, a giebt: so ist $\sqrt[n]{a}$ ein eindeutiger Ausdruck, und wir nennen dann $\sqrt[n]{a}$ eine absolute Wurzel. Für solche Wurzeln findet man:

1) Ist $a = b$, so folgt $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$.
2) Ist $a^n = b^n$, so folgt $a = b$ (wenn a und b absolut sind).
3) $\sqrt[n]{0} = 0$; 4) $\sqrt[n]{1} = 1$.

Die Richtigkeit der Sätze dieses Kapitels wird nun für absolute Wurzeln behauptet, wenn nicht ausdrücklich diese Beschränkung aufgehoben ist. — Man beachte ferner, daß jeder zusammengesetzte Radicand in Klammern stehen muß; oder es muß das Wurzelzeichen deutlich über den ganzen Radicand reichen, z. B. $\sqrt[3]{(a+b)}$, $\sqrt[3]{a-b}$, $\sqrt[4]{ab}$, $\sqrt[5]{(a^2b^3c)}$.

§. 56.
Grundformeln über Potenzen und Wurzeln.

$$\text{I.}\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a. \qquad \text{II.}\quad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Das im §. 9. Gesagte möge man auf diese Formeln übertragen. Sie bilden die Grundlage für die Beweise der folgenden Sätze. Zu diesen Beweisen benutzt man §. 55. 2, d. h. man führt sie dadurch, daß man beide Seiten der Gleichung mit derselben Zahl potenzirt und die Gleichheit der Potenzen zeigt.

§. 57.
Gesetze über Wurzeln.

$$\text{I.}\quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}.$$

$$\text{II.}\quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}.$$

$$\text{III.}\quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$$

$$\text{IV.}\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$\text{V.}\quad \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

$$\text{VI.}\quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

$$\text{VII.}\quad \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Natürlich wird vorausgesetzt, daß alle Potenz- und Wurzelexponenten ganze Zahlen sind.

Ein einfaches Gesetz zur Umformung von $\sqrt[n]{a \pm b}$ giebt es nicht; namentlich verwechsele man $\sqrt[n]{a \pm b}$ nicht mit $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$. (Vergl. §. 50. am Ende.)

Von den Beweisen könnte vielleicht der zu II. Schwierigkeit machen. Man zeigt erst, daß $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ ist, indem man beide Seiten mit np potenzirt. Die rechte Seite giebt a^{mp}, die linke $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np} = \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^p = (a^m)^p = a^{mp}$. Hieraus folgt unmittelbar $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$, wenn man Potenz- und Wurzelexponenten der rechten Seite mit p multiplicirt.

Als Anwendungen und Erweiterungen dieser Gesetze gelten die Gleichungen:

$$1)\quad \sqrt[n]{abcd} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} \cdot \sqrt[n]{d}.$$

$$2)\quad \sqrt[n]{\frac{ab}{cdg}} = \frac{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{c} \cdot \sqrt[n]{d} \cdot \sqrt[n]{g}}.$$

$$3)\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[mnp]{a} = \sqrt[p]{\sqrt[nm]{a}},\ \text{u. s. w.}$$

$$4)\quad a : \sqrt[n]{\frac{b}{c}} = a \cdot \sqrt[n]{\frac{c}{b}}.$$

Zur Uebung. $\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}$; $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^5}$; $\sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$; $\sqrt[4]{a^6} = \sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$; $\sqrt[n]{a^{n+m}} = a\sqrt[n]{a^m}$; $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{432}$; $\sqrt[6]{a^2b^3} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = 1$; $\sqrt{3^{x-2}} = \frac{1}{3}\sqrt{3^x}$; $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt{a}$; $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^9}}\right)^8 = a^6$; $1 : \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$; $\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[mq]{a^{nq}} \cdot \sqrt[mq]{a^{mp}} = \sqrt[mq]{a^{nq+mp}}$; $\sqrt[m]{a^n} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[mq]{a^{nq-mp}}$; $\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{b^n} = \sqrt[m]{(ab)^n}$; $\frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[m]{b^n}} = \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^n}$; $\sqrt[q]{\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^p} = \sqrt[mq]{a^{np}}$.

Anmerkung. Aus $a:b = c:d$ folgt:

1) $a^n : b^n = c^n : d^n$,

2) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

d. h. Eine Proportion bleibt richtig, wenn man alle Glieder auf dieselbe Potenz erhebt, oder aus allen Gliedern dieselbe Wurzel zieht.

§. 58.

Vergleichung der Wurzeln mit ungleichen Radicanden oder ungleichen Exponenten

1) Ist $a < b$, so folgt $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$. Man kann dies indirect beweisen, indem man zeigt, daß die Annahme, $\sqrt[n]{a}$ wäre nicht kleiner als $\sqrt[n]{b}$, auf einen Widerspruch führt. Aus $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$ würde (§. 49. 1) $a = b$ folgen, aus $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ aber: $a > b$ (§. 53. 1).

2) Ist $\frac{a}{b}$ ein echter Bruch, so ist $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ wieder ein solcher, aber größer als $\frac{a}{b}$. Ist $\frac{b}{a}$ unecht, so ist auch $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ unecht, aber kleiner als $\frac{b}{a}$. Es folgt dies aus §. 35. 1 und §. 53. 2 und 3. z. B. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$; $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2} = \frac{12}{8}$.

3) Um die beiden Wurzeln $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[m]{a}$ mit einander zu vergleichen, bringe man beide unter denselben Wurzelexponenten: $\sqrt[nm]{a^m}$ und $\sqrt[nm]{a^n}$. Man erkennt dann, daß, wenn der Radicand > 1 ist, diejenige Wurzel die größere ist, welche den kleineren Wurzelexponenten hat; ist aber der Radicand < 1, so findet das Umgekehrte Statt; z. B. $\sqrt{64} > \sqrt[3]{64}$, d. i. $8 > 4$; hingegen $\sqrt{\frac{64}{729}} < \sqrt[3]{\frac{64}{729}}$, d. i. $\frac{8}{27} < \frac{4}{9}$.

4) Mag a ein echter oder unechter Bruch oder eine ganze Zahl sein, so nähert sich $\sqrt[n]{a}$ für steigende Werthe von n ohne Aufhören der 1, und hat, wenn n ∞ wird, die Grenze 1, so daß $\sqrt[\infty]{a} = 1$ ist.

Beweis. Es bezeichne x eine beliebige positive Zahl, so ist:

$$\begin{array}{rrl} & 1 + x = 1 + x & \text{folglich, wenn man addirt} \\ \text{und} & (1+x)x > \quad x & \text{und } (1+x) \text{ absondert:} \\ \hline & (1+x)^2 > 1 + 2x & \\ \text{ferner:} & (1+x)^2 \cdot x > \quad x & \text{wieder addirt:} \\ \hline & (1+x)^3 > 1 + 3x & \\ \text{ferner:} & (1+x)^3 \cdot x > \quad x & \text{wieder addirt:} \\ \hline & (1+x)^4 > 1 + 4x, & \text{u. s. w.} \end{array}$$

Hieraus folgt, daß $(1+x)^n > 1 + nx$ ist.

Nehmen wir nun zuerst an, daß $a > 1$ sei, und setzen $x = \frac{a-1}{n}$, so ist x positiv, folglich

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n > 1 + n \cdot \frac{a-1}{n}; \text{ oder}$$

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n > a. \text{ Hieraus folgt:}$$

1) $\sqrt[n]{a} < 1 + \frac{a-1}{n}$. Ferner ist schon bewiesen:

2) $\sqrt[n]{a} > 1$.

Es liegt also $\sqrt[n]{a}$ zwischen den beiden Grenzen 1 und $1 + \frac{a-1}{n}$. Wird nun n nach und nach immer größer, so wird $\frac{a-1}{n}$ nach und nach immer kleiner und die beiden Grenzen, zwischen welchen $\sqrt[n]{a}$ liegt, rücken einander immer näher. Für $n = \infty$ wird $\frac{a-1}{n} = 0$, und die Grenzen fallen zusammen; denn die eine bleibt 1, die andere wird 1; folglich muß auch $\sqrt[n]{a}$ für $n = \infty$ den Grenzwerth 1 haben, und dies ist der Sinn der Gleichung $\sqrt[\infty]{a} = 1$.

Ist aber a ein echter Bruch, so setze man $\sqrt[n]{a} = 1 : \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$. Der Divisor nähert sich nun für steigende Werthe von n der 1 ohne Aufhören, folglich auch der Quotient selbst, d. h. $\sqrt[n]{a}$.

§. 59.

Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten.

Nach der Erklärung der Potenz mußte der Exponent eine ganze positive Zahl und größer als 1 sein. Unter dieser Bedingung galten namentlich die Sätze §. 50. II. und §. 57. VII.

$$1)\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ und } 2)\ \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Um aber bei Anwendung der Gesetze über Potenzen und Wurzeln durch Rücksichtnahme auf diese besondere Bedingung nicht gehemmt zu werden, müssen wir diese Beschränkung jetzt fallen und jene Gleichungen für beliebige Werthe von n und m gelten lassen. Hierdurch erweitern wir den Begriff der Potenz dahin, daß der Exponent jede beliebige reelle Zahl sein kann.

1) Die Differenzen-Potenz a^{n-m}, in welcher beliebig $n \gtreqless m$ sein kann, bezeichnet den Bruch $\frac{a^n}{a^m}$. Je nachdem $n - m$ positiv, Null, oder negativ ist, heißt sie eine positive Potenz, die Null-Potenz, oder eine negative Potenz. Durch Anwendung der Sätze in §. 11. wird die Bedeutung von a^{n-m} nicht geändert; denn es ist $a^{(n+x)-(m+x)} = \frac{a^{n+x}}{a^{m+x}} = \frac{a^n \cdot a^x}{a^m \cdot a^x} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

2) Die gebrochene Potenz $a^{\frac{n}{m}}$ bezeichnet die Wurzel $\sqrt[m]{a^n}$. Zum Unterschiede heißt jetzt jede Potenz mit ganzem Exponenten eine ganze Potenz. Durch Anwendung des Satzes §. 29. I. wird die Bedeutung von $a^{\frac{n}{m}}$ nicht geändert; denn es ist $a^{\frac{nx}{mx}} = \sqrt[mx]{a^{nx}} = \sqrt[m]{a^n}$ (§. 57. II.) $= a^{\frac{n}{m}}$.

Die in §. 50. bewiesenen Gesetze gelten für Differenzen-Potenzen und gebrochene Potenzen, d. h. es ist

$$1)\ a^{n-m} \cdot a^{p-q} = a^{(n-m)+(p-q)} = a^{n+p)-(m+q)}$$

$$2)\ a^{n-m} : a^{p-q} = a^{(n-m)-(p-q)} = a^{(n+q)-(m+p)}$$

$$3)\ (ab)^{n-m} = a^{n-m} \cdot b^{n-m}$$

$$4)\ \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m} = \frac{a^{n-m}}{b^{n-m}}$$

$$5)\ (a^{n-m})^{p-q} = a^{(n-m)(p-q)} = a^{(np+mq)-(nq+mp)}.$$

Eben so:

$$1)\ a^{\frac{n}{m}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{p}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{nq+mp}{mq}}$$

$$2)\ a^{\frac{n}{m}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{nq-mp}{mq}}$$

$$3)\ (ab)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n}{m}} \cdot b^{\frac{n}{m}}$$

$$4)\ \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$$

$$5)\ \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{m}\cdot\frac{p}{q}} = a^{\frac{np}{mq}}.$$

Zum Beweise setze man statt der Differenzen- und gebrochenen Potenz, ihrer Erklärung gemäß, den Bruch und die Wurzel, und rechne nach den schon bekannten Gesetzen. z. B.

$$a^{n-m} : a^{p-q} = \frac{a^n}{a^m} : \frac{a^p}{a^q} = \frac{a^n}{a^m} \cdot \frac{a^q}{a^p} = \frac{a^{n+q}}{a^{n+p}} = a^{(n+q)-(p+m)}$$

$$(a^{n-m})^{p-q} = \left(\frac{a^n}{a^m}\right)^p : \left(\frac{a^n}{a^m}\right)^q = \frac{a^{np}}{a^{mp}} \cdot \frac{a^{mq}}{a^{nq}}$$

$$= \frac{a^{np+mq}}{a^{mp+nq}} = a^{(np+mq)-(mp+nq)}.$$

Die Beweise der Gesetze für gebrochene Potenzen sind die letzten fünf Beispiele in §. 57.

Die Gleichung $a^{\frac{n}{m}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{m} - \frac{p}{q}}$ führt zur negativen gebrochenen Potenz. Da die Erklärung derselben mit der Erklärung der Differenzen-Potenz zusammenfällt, die Richtigkeit der Potenz-Sätze für gebrochene Potenzen aber schon bewiesen ist, so gelten die für Differenzen-Potenzen bewiesenen Sätze auch für negative gebrochene Potenzen. Man hat nur anzunehmen, daß in den Beweisen dieser Sätze die Exponenten Brüche sind, die Beweise selbst bleiben ganz unverändert. — Daß auch die Gesetze über Wurzeln, in denen Potenzen vorkommen, richtig sind, wenn die Potenzexponenten beliebige reelle Zahlen sind, bedarf ebenfalls keines besonderen Beweises; man würde nur die früheren Beweise in unveränderter Form wiederholen müssen, z. B. $\sqrt[n]{a^{p-q}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{p-q}$. Potenzirt man beide Seiten mit n, so geht die linke Seite in a^{p-q} über; die rechte aber auch, denn es ist:

$$\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^{p-q}\right]^n = \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^{p-q} = a^{p-q}.$$

Ueber gebrochene und negative Wurzelexponenten vergleiche man die Anmerkung zum nächsten §.

Für das praktische Rechnen merke man:

$$\text{I.} \quad a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$$

$$\text{II.} \quad a^1 = a^{(n+1)-n} = \frac{a^{n+1}}{a^n} = \frac{a^n \cdot a}{a^n} \ (\text{§. 49. 4}) = a;$$

$$\text{oder: } a^1 = a^{\frac{n}{n}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\text{III.} \quad a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\text{IV.} \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$\text{V.} \quad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

VI. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

VII. $a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$

VIII. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{+n}$; d. h. man kann dem Exponenten das entgegengesetzte Vorzeichen geben, wenn man zugleich statt des Dignanden seine Reciproke setzt; z. B.: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$.

Da $a^{-n} = \frac{1}{a^{+n}}$, also auch $a^{+n} = \frac{1}{a^{-n}}$ ist, so kann man jede Potenz, welche als Factor im Zähler oder Nenner eines Bruches vorkommt, mit entgegengesetztem Exponenten resp. in den Nenner oder Zähler setzen; z. B.: $\frac{a^2}{2b} = \frac{1}{2}a^2b^{-1}$, $\frac{3b}{a^2\sqrt{c}} = 3a^{-2}b \cdot c^{-\frac{1}{2}}$,
$\frac{6a^2b^{-3}}{5n} = \frac{6a^2}{5b^3n}$, $\frac{3a}{(a+b)^2} = 3a(a+b)^{-2}$, $\frac{2a^{-3}(a+b)}{a\sqrt[4]{a+b}}$
$= \frac{2(a+b)(a+b)^{-\frac{1}{4}}}{a^4} = \frac{2(a+b)^{\frac{3}{4}}}{a^4}$.

Man kann übrigens die negative und gebrochene Potenz auch als ein Product gleicher Factoren betrachten; denn sind n und m absolute ganze Zahlen, so ist:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\ldots \text{ (n Factoren)}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{a}\ldots \text{ (n Factoren)}$$

$$a^{-\frac{n}{m}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt[m]{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt[m]{\frac{1}{a}}\ldots \text{ (n Factoren).}$$

Das in §. 52. gefundene Gesetz gilt auch für negative ganze Exponenten:
$(+a)^{-n} = +a^{-n}$, $(-a)^{-2n} = +a^{-2n}$, $(-a)^{-(2n+1)} = -a^{-(2+1)}$.

§. 60.

Die Potenz-Reihe mit reellen Exponenten.

Wir können jetzt eine Zahl a mit allen reellen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ potenziren. Zunächst wollen wir untersuchen, welche Bedeutung $a^{+\infty}$ und $a^{-\infty}$ haben, d. h. ob a^{+n} und a^{-n} sich einer Grenze nähern, und welcher, wenn n wächst und sich der Grenze ∞ nähert.

In §. 58. 4. haben wir gezeigt, daß, wenn x positiv und n ganz und positiv ist, $(1+x)^n > 1+nx$ ist. Da nun $1+nx$ für steigende Werthe von n ohne Aufhören wächst, und für $n=\infty$ selbst ∞ wird, so gilt dies auch für $(1+x)^n$, d. h. ist $a>1$, so ist $a^{+\infty}=\infty$; daher nähert sich $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ für steigende Werthe von n der 0, folglich ist $a^{-\infty}=0$. Ist aber $a<1$, so ist $\frac{1}{a}>1$, folglich $a^{+\infty}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-\infty}=0$, und $a^{-\infty}=\left(\frac{1}{a}\right)^{+\infty}=\infty$. Wir haben also:

I. wenn $a>1$ ist: $a^{+\infty}=\infty$, $a^{-\infty}=0$;

II. wenn $a<1$ ist: $a^{+\infty}=0$, $a^{-\infty}=\infty$.

Betrachten wir nun die Potenz-Reihe

$$a^{-\infty}\ldots\ldots a^{-3},\ a^{-2},\ a^{-1},\ a^0,\ a^{+1},\ a^{+2},\ a^{+3}\ldots\ldots a^{+\infty},$$

in welche wir uns alle positiven und negativen gebrochenen Potenzen, nach steigenden Exponenten geordnet, noch eingeschaltet denken wollen: so beginnt sie, wenn $a>1$ ist, mit 0 und endet mit ∞; ist aber $a<1$, so beginnt sie mit ∞ und endet mit 0. Es fragt sich nur noch, ob die Potenzen im ersten Falle nach und nach immer größer, im andern immer kleiner werden. Dies ist der Fall und kann so bewiesen werden: Ist b eine beliebige reelle Zahl, und $\frac{n}{m}$ eine positive, so ist $a^{b+\frac{n}{m}}=a^b\cdot a^{\frac{n}{m}}=a^b\cdot\sqrt[m]{a^n}$. Ob $a^{b+\frac{n}{m}}$ größer oder kleiner als a^b ist, hängt davon ab, ob $\sqrt[m]{a^n}$ größer oder kleiner als 1 ist. Je nachdem aber $a\gtrless 1$ ist, folgt $a^n\gtrless 1$, und daher auch $\sqrt[m]{a^n}\gtrless 1$; d. h. die Potenz a^b wächst mit einer Vergrößerung des Exponenten, wenn $a>1$ ist, und fällt mit einer solchen Vergrößerung, wenn $a<1$ ist; z. B. $3^{\frac{12}{7}}>3^{\frac{11}{7}}$; $3^{-\frac{11}{7}}>3^{-\frac{12}{7}}$; $(\frac{2}{3})^{\frac{3}{4}}<(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}}$; $(\frac{1}{4})^2<(\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}$.

Anmerkung. Die Einführung beliebiger reeller Potenzexponenten hat die unmittelbare Folge, daß auch der Wurzelexponent einer Wurzel eine beliebige reelle Zahl sein kann, wenn die Erklärung der Wurzel $\sqrt[n]{a}$ (die Zahl, welche mit n potenzirt, a giebt) für beliebige Werthe von n unverändert gelassen wird. Es ist z. B. $\sqrt[1]{a}=a$, weil $a^1=a$ ist; $\sqrt[-1]{a}=\frac{1}{a}$, weil $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}=a$ ist; $\sqrt[\frac{n}{m}]{a}=a^{\frac{m}{n}}$, weil $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}}=a^1=a$ ist; $\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[\frac{3}{4}]{a^{\frac{1}{2}}}$, weil $(\sqrt[3]{a^2})^{\frac{3}{4}}=\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}}=\sqrt[3]{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3}=a^{\frac{1}{2}}$ ist; $\sqrt[-n]{a}=1:\sqrt[n]{a}$, u. s. w. Die

Bedeutung solcher Wurzeln ergiebt sich am einfachsten, wenn man sie durch den Satz $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ auf Potenzen zurückführt; einen Vortheil für das praktische Rechnen gewähren sie aber nicht.

§. 61.

Das Ordnen algebraischer Summen.

Ist eine algebraische Summe, deren Glieder Potenzen von a enthalten, auf die Form gebracht: $A \cdot a^{\alpha} + B \cdot a^{\beta} + C \cdot a^{\gamma} + D \cdot a^{\delta} + \ldots.$, in welcher $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ beliebige reelle Zahlen sind, A, B, C, ... beliebige Zahlen- oder Buchstabenausdrücke, welche aber nicht mehr a enthalten: so heißt die Summe nach steigenden, oder fallenden Potenzen von a geordnet, je nachdem $\alpha, \beta, \gamma, \ldots.$ nach und nach immer größer, oder immer kleiner werden. So ist z. B.

$$3a^{-2}b^2 + \tfrac{1}{2}a^{-1}b - 6 + ab^{-1} - \tfrac{2}{3}a^2b^{-2}$$

nach steigenden Potenzen von a, aber auch nach fallenden Potenzen von b geordnet.

Die Summe $a^{n+3} - \frac{1}{2}a^{n+1} + 2a^{n-1} - \frac{3}{4}a^{n-3}$ ist nach fallenden Potenzen von a geordnet.

Um eine Summe nach den Potenzen von a zu ordnen, muß man, wenn ein Glied zwei und mehrere Potenzen von a enthält, diese in eine Potenz zusammen ziehen, $a^{\frac{n}{m}}$ statt $\sqrt[m]{a^n}$ schreiben, Potenzen von a, welche als Factoren in einem Nenner vorkommen, mit entgegengesetztem Exponenten in den Zähler setzen und endlich Glieder, welche dieselbe Potenz von a als gemeinschaftlichen Factor haben, durch Absonderung desselben in ein Glied zusammenziehen. Es sei z. B. gegeben:

$$2\sqrt[6]{a} - \sqrt[3]{b} - \frac{3\sqrt[3]{a^2}}{2b} - \frac{4\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[3]{ab^2}} + \frac{2\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{a}} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

Führt man gebrochene und negative Exponenten ein, so entsteht:

$$2a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}a^{\frac{2}{3}}b^{-1} - 4a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}} + 2a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{4}a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}.$$

Ordnet man nach steigenden Potenzen von a:

$$2a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{3}} + 2a^{\frac{1}{6}} - \frac{3}{4}a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} - 4a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}a^{\frac{2}{3}}b^{-1}.$$

Die Summe ist zugleich nach fallenden Potenzen von b geordnet. — Soll man folgende Summe nach steigenden Potenzen von b ordnen:

$$b - \frac{1}{b} + \frac{2}{3}a^2 + \frac{a}{b^2} - \frac{a}{b} - \frac{1}{2}a^3 b + a^4b^2,$$

so erhält man:

$$ab^{-2} - (a+1)b^{-1} + \frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{2}(a^3-2)\,b + a^4b^2.$$

Bei allen Rechnungen mit Summen ist das Ordnen von großer Wichtigkeit. Zunächst wenden wir es bei der Multiplication und Division an.

Zur Uebung.

1) $(a + \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[6]{a^5})\,(1 + \sqrt[3]{a} + \sqrt{a} + \sqrt[6]{a})$

$= a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{7}{6}} - a^{\frac{5}{6}} + a^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{a} - a\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{a^5} + \sqrt{a};$

2) $(1 - \frac{2}{3}a^2 + 4a^4)\cdot\left(6a^4 + a^2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{34}{3}a^4 + 24a^8;$

3) $\left(\frac{3a^2}{\sqrt[3]{b}} + \frac{a}{b} - \frac{2\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{b^2}}\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{3a^2}{\sqrt[3]{b}} + \frac{3a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^2}}\right)$

$= \left(ab^{-1} - 2a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{2}{3}} + 3a^2b^{-\frac{1}{3}}\right)\left(ab^{-1} + 3a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{2}{3}} - 3a^2b^{-\frac{1}{3}}\right)$

$= a^2b^{-2} + a^{\frac{5}{2}}b^{-\frac{5}{3}} - 6a^3b^{-\frac{4}{3}} + 15a^{\frac{7}{2}}b^{-1} - 9a^4b^{-\frac{2}{3}}$

$= \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2\sqrt{a}}{b\sqrt[3]{b^2}} - \frac{6a^3}{b\sqrt[3]{b}} + \frac{15a^3\sqrt{a}}{b} - \frac{9a^4}{\sqrt[3]{b^2}};$

4) $\left(\frac{3}{2} + 24a^{\frac{4}{3}} + \frac{34}{3}a^{\frac{2}{3}}\right):\left(\frac{3}{2} + a^{\frac{1}{3}} + 6a^{\frac{2}{3}}\right) = 1 - \frac{2}{3}\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[3]{a^2};$

5) $(a+b):\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right) = \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2};$

6) $\left(\frac{4b}{a^2\sqrt[3]{c^2}} - \frac{5\sqrt[3]{c^2}}{b} + \frac{a^2c^2}{b^3}\right):\left(\frac{2b}{\sqrt{a^3}\cdot\sqrt[3]{c^2}} + \frac{3}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{c^2}}{b}\right)$

$= \frac{2}{\sqrt{a}} - \frac{3\sqrt{a}\sqrt[3]{c^2}}{b} + \frac{\sqrt{a^3}\sqrt[3]{c^4}}{b^2}.$

§. 62.

Die reellen Wurzeln.

Bisher haben wir immer absolute Wurzeln (§. 55.) vorausgesetzt. Nehmen wir jetzt $\sqrt[n]{a}$ in ihrer reellen Bedeutung (wobei die imaginären Wurzeln wieder ausgeschlossen werden), d. h. nehmen wir, wenn n ungerade ist, a beliebig + oder —, aber wenn n gerade ist, a nur positiv, und fassen $\sqrt[n]{a}$ als die reelle Zahl auf, welche mit n potenzirt, a giebt: so ist zunächst klar, daß man die Rechnung mit

solchen reellen Wurzeln auf die mit absoluten Wurzeln zurückführen kann, d. h. man kann $\sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a}$, $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$, $\sqrt[2n]{+a} = \pm\sqrt[2n]{a}$ setzen. Hieraus folgt aber auch, daß alle Gesetze für Wurzeln so weit noch gelten, als nicht die Vorzeichen in Betracht kommen, d. h. man rechnet mit reellen Wurzeln, wie mit absoluten, muß aber bei geraden Wurzeln aus positiven Zahlen besonders untersuchen, welches Vorzeichen jeder Wurzel zu geben ist, damit die beiden Seiten einer Gleichung auch hierin übereinstimmen. Für ungerade Wurzeln (welche eindeutig sind) gelten also jene Gesetze unbedingt. So ist z. B. $\sqrt[3]{(-8)(+27)} = \sqrt[3]{-8}\cdot\sqrt[3]{+27}$, oder $\sqrt[3]{-(8\cdot 27)} = \sqrt[3]{-8}\cdot\sqrt[3]{+27} = \sqrt[3]{+8}\cdot\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[5]{(-1)(-32)} = \sqrt[5]{-1}\cdot\sqrt[5]{-32}$. Hingegen ist z. B. die Gleichung $\sqrt[4]{(+16)(+81)} = \sqrt[4]{+16}\cdot\sqrt[4]{+81}$ nur dann richtig, wenn man für $\sqrt[4]{(+16)(+81)}$ ihren positiven Werth $+6$ setzt und nun rechts für jede Wurzel ihren positiven, oder für jede Wurzel ihren negativen Werth. Man erhält dann $+6 = (+2)\cdot(+3)$, oder $+6 = (-2)\cdot(-3)$. Setzt man aber für $\sqrt[4]{(+16)(+81)}$ ihren negativen Werth -6, so muß man rechts der einen Wurzel ihren positiven, der andern ihren negativen Werth geben. Die Gleichung $\sqrt{(+4)^4} = (\sqrt{+4})^4$ oder $\sqrt{+256} = (\sqrt{+4})^4$ ist nur richtig, wenn für $\sqrt{+256}$ ihr positiver Werth gesetzt wird; denn $(\sqrt{+4})^4 = (\pm 2)^4$ ist immer positiv.

Zur Vermeidung jeder Undeutlichkeit wollen wir jede reelle Wurzel auf die absolute zurückführen; wir schreiben also $a \pm \sqrt{b}$ statt $a + \sqrt{+b}$ und verstehen in $a + \sqrt{b}$ und $a - \sqrt{b}$, $\sqrt{b}$ immer als absolute Wurzel.

§. 63.

Erklärung. Folgerungen.

Der Logarithmus $\overset{b}{\log} a$ bezeichnet die Zahl, mit welcher die Basis b potenzirt, den Logarithmand a giebt. Ist also $\overset{b}{\log} a = x$, so folgt $b^x = a$, und umgekehrt folgt jene Gleichung aus dieser.

Zunächst wollen wir untersuchen, ob $\overset{b}{\log} a$ für beliebige Werthe

von a und b reell ist. Für die Basis 1 und 0 finden wir: $\overset{1}{\log}\,1$ und $\overset{0}{\log}\,0$ sind ganz unbestimmte Werthe, und $\overset{1}{\log}\,a$ und $\overset{0}{\log}\,a$ können nicht reelle Zahlen sein, weil $1^n = 1$ und $0^n = 0$ für jeden Werth von n ist. Eben so hat $\overset{-1}{\log}\,a$ im Allgemeinen keinen reellen Werth, aber $\overset{-1}{\log}\,1$ bedeutet jede gerade, $\overset{-1}{\log}\,(-1)$ jede ungerade Zahl, weil $(-1)^{2n} = +1$, $(-1)^{2n+1} = -1$ ist. Wir schließen sonach bei den folgenden Untersuchungen 1, 0 und -1 als Basis eines Logarithmus aus.

Alle anderen Logarithmen theilen wir in zwei Abtheilungen:

I. Logarithmen, deren Basis und Logarithmand positiv sind. Ein solcher Logarithmus bezeichnet immer eine einzige reelle Zahl; denn die Potenz-Reihe

$$b^{-\infty}, \ldots\ldots, b^{-2}, b^{-1}, b^{0}, b^{+\frac{1}{n}}, b^{+2}, \ldots. b^{+\infty},$$

wenn wir alle gebrochenen Potenzen geordnet uns eingeschaltet denken, zeigt lauter ungleiche Zahlen, welche von 0 bis ∞ steigen, wenn $b > 1$ ist, und von ∞ bis 0 fallen, wenn $b < 1$ ist (§. 60.). Mit zwei ungleichen Zahlen potenzirt, kann also b nicht dieselbe Zahl a geben, d. h. $\overset{b}{\log}\,a$ kann nur eine reelle Zahl sein. Mit welcher Zahl aber b potenzirt werden muß, um a zu geben, d. h. wie man $\overset{b}{\log}\,a$ findet, kann erst später gezeigt werden; vorläufig genügt, daß man leicht Grenzen finden kann, zwischen welchen dieser Logarithmus liegt; z. B. $\overset{2}{\log}\,30$ liegt zwischen 4 und 5, denn $2^4 = 16$, $2^5 = 32$; $\overset{2}{\log}\,(\frac{1}{3})$ liegt zwischen -1 und -2, denn $2^{-1} = \frac{1}{2}$ und $2^{-2} = \frac{1}{4}$.

II. Logarithmen, bei welchen Basis und Logarithmand negativ sind, oder eine beider Zahlen negativ ist. Unter den hierher gehörigen Logarithmen haben manche einen reellen Werth, viele andere aber nicht; z. B.

$$\overset{+16}{\log}\,(-2) = \tfrac{1}{4}, \text{ weil } (+16)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{+16} = -2 \text{ ist;}$$

$$\overset{-3}{\log}\,(+9) = 2, \text{ weil } (-3)^2 = +9 \text{ ist;}$$

$$\overset{-2}{\log}\,(-8) = 3, \text{ weil } (-2)^3 = -8 \text{ ist.}$$

Hingegen sind $\overset{+2}{\log}\,(-8)$, $\overset{-3}{\log}\,(+27)$, $\overset{-4}{\log}\,(-16)$ nicht reell; denn es ist $(+2)^3 = +8$, $(-3)^3 = -27$, $(-4)^2 = +16$, und jede andere Potenz von resp. $+2$, -3 und -4 ist eine Zahl, die nothwendig ein anderes Glied, als 8, 27 und 16 hat.

Anmerkung. Einen Einwand, den man hier machen könnte, wollen wir beseitigen. Man könnte $\overset{+2}{\log}(-8)$ für reell halten, indem man schließt: $(+2)^3 = (+2)^{\frac{6}{2}} = \sqrt{(+2)^6} = \sqrt{+64} = \pm 8$. Der letzte Schluß ist falsch; $\sqrt{+64}$ ist hier nur $= +8$; denn aus welchem Grunde mußten wir früher sagen $\sqrt{+64} = \pm 8$? Weil $+64$ sowohl aus $(+8)\cdot(+8)$, als auch aus $(-8)\cdot(-8)$ entstanden sein kann. Im vorliegenden Falle ist aber $+64$ aus nur positiven Factoren entstanden; denn dies liegt in dem Beispiele $\overset{+2}{\log}(-8)$, in welchem die Basis gerade $+$ sein soll. Hier ist also $(+2)^{\frac{6}{2}}$ nichts weiter, als $\sqrt{[(+2)^3]^2}$ und so nur $= (+2)^3 = +8$.

§. 64.
Der reelle Logarithmus.

Die vorstehende Untersuchung veranlaßt uns, zunächst nur solche Logarithmen zu betrachten, in welchen Basis und Logarithmand positiv sind. Später werden durch Einführung der imaginären Zahlen auch die nicht reellen Logarithmen eine Bedeutung erhalten. Setzen wir also a und b positiv voraus, so verstehen wir unter $\overset{b}{\log}\, a$ die einzige reelle Zahl, mit welcher b potenzirt, a giebt, und diesen Logarithmus nennen wir den reellen Logarithmus. Für ihn gelten die folgenden Gesetze:

1) Ist $a = b$, so folgt $\overset{c}{\log}\, a = \overset{c}{\log}\, b$.

2) Ist $c^a = c^b$, so folgt $a = b$.

3) Ist $\overset{c}{\log}\, a = \overset{c}{\log}\, b$, so folgt $a = b$.

4) Ist $a > b$, so folgt $\overset{c}{\log}\, a \gtrless \overset{c}{\log}\, b$, je nachdem $c \gtrless 1$ ist.

5) Ist $\overset{c}{\log}\, a > \overset{c}{\log}\, b$, so folgt $a \gtrless b$, je nachdem $c \gtrless 1$ ist.

6) $\overset{a}{\log}\, a = 1$; 7) $\overset{a}{\log}\, 1 = 0$; 8) $\overset{a}{\log}\, 0 = \pm\infty$, je nachdem $a \lessgtr 1$ ist, wenn 0 als Grenze der unendlich kleinen Zahl angesehen wird. (§. 60. I. und II.)

Anmerkung. Jeder zusammengesetzte Ausdruck, welcher Logarithmand ist, muß eingeklammert werden, z. B. $\overset{c}{\log}(ab)$, $\overset{b}{\log}(a^3)$, $\overset{10}{\log}(1+x)$. Der Bruchstrich und das Wurzelzeichen vertreten zwar auch hier die Klammern; indeß schreibt man auch häufig $\overset{c}{\log}\left(\frac{a}{b}\right)$ und $\overset{c}{\log}(\sqrt[n]{a})$ statt $\overset{c}{\log}\frac{a}{b}$ und $\overset{c}{\log}\sqrt[n]{a}$.

§. 65.

Grundformeln für Potenzen und Logarithmen.

$$\text{I. } b^{\overset{b}{\log} a} = a. \qquad \text{II. } \overset{b}{\log}\,(b^a) = a.$$

d. h. 1) Wenn man mit einem Logarithmus seine Basis potenzirt, erhält man den Logarithmand.

2) Der Logarithmus einer Potenz, deren Dignand der Basis gleich ist, ist dem Exponenten gleich. —

Der Beweis zu I. folgt aus der Erklärung des Logarithmus; II. beweist man mittelst des allgemeinen Schlusses: „es ist $\overset{b}{\log}\,a = x$, wenn $b^x = a$ ist“; also hier: $\overset{b}{\log}\,(b^a) = a$, weil $b^a = b^a$ ist. Ganz auf diese Weise sind die Gesetze im nächsten §. zu beweisen.

§. 66.

Gesetze über Logarithmen.

$$\text{I. } \overset{c}{\log}\,(ab) = \overset{c}{\log}\,a + \overset{c}{\log}\,b.$$

$$\text{II. } \overset{c}{\log}\left(\frac{a}{b}\right) = \overset{c}{\log}\,a - \overset{c}{\log}\,b.$$

$$\text{III. } \overset{c}{\log}\,(a^n) = n\,\overset{c}{\log}\,a.$$

$$\text{IV. } \overset{c}{\log}\,(\sqrt[n]{a}) = \frac{\overset{c}{\log}\,a}{n}.$$

$$\text{V. } \overset{b}{\log}\,a = \frac{\overset{c}{\log}\,a}{\overset{c}{\log}\,b}.$$

Setzt man in V. $c = a$, so folgt noch

$$\overset{b}{\log}\,a = \frac{1}{\overset{a}{\log}\,b} \text{ oder } \overset{b}{\log}\,a \cdot \overset{a}{\log}\,b = 1.$$

Man erhält also den Logarithmus eines Products, wenn man die Logarithmen der Factoren addirt; eines Bruchs, wenn man den Logarithmus des Nenners von dem des Zählers abzieht; einer Potenz, wenn man den Logarithmus des Dignanden mit dem Exponenten multiplicirt; einer Wurzel, wenn man den Logarithmus des Radicanden durch den Wurzelexponenten dividirt. Dann lehren diese Sätze noch, wie man Logarithmen mit derselben Basis addirt und subtrahirt und wie man einen Logarithmus mit einer Zahl multiplicirt oder durch solche dividirt. Endlich zeigt V., wie man den Logarithmus einer Zahl für eine gegebene Basis auf eine andere Basis bringt: man dividirt den Logarithmus dieser Zahl für die andere Basis durch den Logarithmus der gegebenen Basis für die andere Basis; z. B. $\overset{7}{\log}\,4 = \frac{\overset{10}{\log}\,4}{\overset{10}{\log}\,7}$.

Wie man die Beweise führt, ist im vorigen §. gesagt worden. Um z. B. II. zu beweisen, sagt man: es ist $\overset{c}{\log}\left(\frac{a}{b}\right) = \overset{c}{\log} a - \overset{c}{\log} b$, weil $c^{\overset{c}{\log} a - \overset{c}{\log} b} = \frac{c^{\overset{c}{\log} a}}{c^{\overset{c}{\log} b}} = \frac{a}{b}$ (§. 65. I.) ist.

Um V. zu beweisen, multiplicirt man erst die Gleichung mit dem Nenner der rechten Seite und sagt nun: es ist $\overset{c}{\log} b \cdot \overset{b}{\log} a = \overset{c}{\log} a$, weil $c^{\overset{c}{\log} b \cdot \overset{b}{\log} a} = (c^{\overset{c}{\log} b})^{\overset{b}{\log} a} = b^{\overset{b}{\log} a} = a$ ist.

Eine einfache Umformung für $\overset{c}{\log}(a \pm b)$ hat man nicht; namentlich verwechsele man nicht $\overset{c}{\log}(a \pm b)$ mit $\overset{c}{\log} a \pm \overset{c}{\log} b$.

§. 67.

Als Erweiterungen und Anwendungen gelten folgende Gleichungen:

1) $\overset{e}{\log}(abcd) = \overset{e}{\log} a + \overset{e}{\log} b + \overset{e}{\log} c + \overset{e}{\log} d.$

2) $\overset{e}{\log}\left(\frac{ab}{cdg}\right) = \overset{e}{\log} a + \overset{e}{\log} b - \overset{e}{\log} c - \overset{e}{\log} d - \overset{e}{\log} g.$

3) $\overset{c}{\log} \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{1}{n}(\overset{c}{\log} a - \overset{c}{\log} b).$

4) $\overset{e}{\log} \frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a+b}}{c\sqrt[n]{d^m}} = 2\overset{e}{\log} a + \frac{1}{3}\overset{e}{\log}(a+b) - \overset{e}{\log} c - \frac{m}{n}\overset{e}{\log} d.$

5) $\overset{c}{\log} \frac{1}{ab^2} = -(\overset{c}{\log} a + 2\overset{c}{\log} b).$

Uebungs-Aufgaben über Logarithmen.

1) $\overset{b}{\log} a = -\overset{b}{\log}\left(\frac{1}{a}\right).$ 2) $\overset{b}{\log} a = -\overset{\frac{1}{b}}{\log} a.$

3) $\overset{b}{\log} a = \overset{\frac{1}{b}}{\log}\left(\frac{1}{a}\right)$; denn ist $b^x = a$, so folgt auch $\left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{a}.$

4) $\overset{b}{\log} a = \overset{b^n}{\log}(a^n).$ 5) $n \cdot \overset{b}{\log} a = \overset{\sqrt[n]{b}}{\log} a.$

6) $\overset{4}{\log}(a^2) = \frac{1}{\overset{a}{\log} 2}.$ 7) $\overset{a}{\log} \sqrt[5]{a^3 b} = \frac{3}{5} + \frac{1}{\overset{b}{\log}(a^5)}.$

8) $\overset{1+x}{\log}(1-x^2) = 1 + \overset{1+x}{\log}(1-x)$, weil $1 - x^2 = (1+x)(1-x).$

9) $\overset{\sqrt{a}}{\log} \sqrt[3]{a} = \frac{2}{3}.$ 10) $\overset{\frac{3}{2}}{\log} \sqrt[4]{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{4}.$

11) $a^{\overset{c}{\log} b} = b^{\overset{c}{\log} a}$. 12) $\overset{c}{\log} a \cdot \overset{c}{\log} b = \overset{c}{\log}\left(\frac{a^{\overset{c}{\log} b} + b^{\overset{c}{\log} a}}{2}\right)$.

13) $\overset{8}{\log} 24 - 1 = \overset{8}{\log} 3$. 14) $1 + \overset{b}{\log} a = \overset{b}{\log} (ab)$.

15) $\overset{10}{\log} 5 + \overset{10}{\log} 20 = 2$. 16) $\overset{3}{\log} 4 + \overset{3}{\log} 5 = \overset{3}{\log} 4 \cdot (1 + \overset{4}{\log} 5)$.

17) $\overset{7}{\log} 12 \cdot (1 - \overset{12}{\log} 3) = \overset{7}{\log} 4$. 18) $\overset{5}{\log}\left(\frac{2}{3}\right) + \overset{5}{\log}\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

19) $\overset{2}{\log} 9 \cdot \overset{3}{\log} 8 = 6$. 20) $\overset{2}{\log} 3 \cdot \overset{3}{\log} 4 \cdot \overset{4}{\log} 5 = \overset{2}{\log} 5$.

21) $\overset{4}{\log} 7 \cdot \overset{5}{\log} 4 \cdot \overset{10}{\log} 5 \cdot \overset{3}{\log} 10 = \overset{3}{\log} 7$. (§. 66. V.)

22) $\overset{10}{\log} 9 - \overset{100}{\log} 9 = \overset{10}{\log} 3$. 23) $8^{\overset{2}{\log} 3} = 27$.

24) $\overset{2}{\log} (2 \overset{3}{\log} 18 - \overset{9}{\log} 16) = 2$. 25) $\overset{a}{\log} x \cdot \overset{b}{\log} y = \overset{a}{\log} y \cdot \overset{b}{\log} x$.

Viertes Kapitel.

Von dem zehntheiligen Zahlensysteme und den Eigenschaften der numerischen Zahlen. Fortsetzung der Buchstabenrechnung.

Vorbemerkung. Alle Buchstaben sollen in diesem Kapitel bis §. 85. absolute *ganze* Zahlen bedeuten.

§. 68.

Die ersten drei Kapitel enthalten die Grundgesetze der Arithmetik. Eine weitere Ausbildung dieser Wissenschaft erfordert die Bekanntschaft mit vielen besonderen Eigenschaften der natürlichen (ganzen) Zahlen, zu deren Betrachtung wir uns also jetzt wenden müssen. Schon in §. 52. und einigen späteren §§. waren wir genöthigt, die *geraden* Zahlen von den *ungeraden* zu unterscheiden, und so werden wir weiter sehen, daß uns andere Eigenschaften der Zahlen theils nützlich, theils nöthig sind, um allgemeine Gesetze aufzufinden, oder praktische Rechnungen bequem auszuführen.

Die Eigenschaften der natürlichen Zahlen hängen genau mit dem System zusammen, nach welchem sie gebildet, geschrieben und ausgesprochen werden. Das bei allen gebildeten Völkern gebräuchliche *zehntheilige* (dekadische) *Zahlensystem* können wir wohl als bekannt voraussetzen; es wird genügen, das für unseren Zweck Wichtigste hervorzuheben.

§. 69.

Die Zeichen für die Zahlen heißen *Ziffern*. Mit den neun Ziffern 1, 2, 3, .. bis 9 und der 0 sind alle Zahlen darstellbar. Die nächste Zahl *zehn* wollen wir vorläufig mit z bezeichnen. Um nun die Zahlen bequem zu übersehen, theilen wir sie so in *Klassen* oder *Ordnungen*, daß immer zehn Einheiten jeder Klasse eine Einheit

der nächst höheren bilden, d. h. wir ordnen sie nach den Potenzen von z. Die Zahlen 1 bis 9 sind die Einer oder Einheiten der 0ten Ordnung ($z^0 = 1$); zehn Einer bilden den Zehner oder die Einheit der 1sten Ordnung ($z^1 = z$); zehn Zehner bilden den Hunderter oder die Einheit der 2ten Ordnung ($z^2 = z \cdot z$); zehn Hunderter bilden den Tausender oder die Einheit der 3ten Ordnung ($z^3 = z \cdot z^2$) u. s. w. Jede bestimmte Zahl ist nun eine Summe beliebig vieler Einheiten (nur nicht mehr als 9) dieser verschiedenen Klassen. Wir ordnen die Summanden nach den fallenden Potenzen von z, z. B. $3z^5 + 4z^3 + z^2 + 6z^1 + 5z^0$,
fügen die zwischen den Gliedern fehlenden Potenzen mit dem Factor 0 hinzu, setzen, wo kein Factor ist, den Factor 1 hin:

$$3z^5 + 0 \cdot z^4 + 4z^3 + 1 \cdot z^2 + 6z^1 + 5z^0,$$

und lassen jetzt alle Additionszeichen und alle Potenzen von z fort. Dadurch erhalten wir die gewöhnliche Schreibart 304165 und nennen diese Zahl eine numerische. Hiernach schreiben wir jetzt zehn: $1 \cdot z^1 + 0 \cdot z^0 = 10$; hundert: $1 \cdot z^2 + 0 \cdot z^1 + 0 \cdot z^0 = 100$ u. s. w.

§. 70.

Folgerungen.

1) Bezeichnen $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Zahlen 1 bis 9, oder 0, so ist das allgemeine Bild jeder numerischen nziffrigen Zahl A folgendes:
$A = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$.
a_0 ist die letzte Ziffer der Zahl, a_1 die vorletzte, a_2 die drittletzte 2c.; hingegen ist $a_2\, 10^2$ der Werth dieser drittletzten Ziffer, den sie vermöge ihrer Stellung hat. Ist z. B. $A = 7248$, so ist $a_2 = 2$, aber $a_2 \cdot 10^2 = 200$; $a_3 = 7$, aber $a_3 \cdot 10^3 = 7000$.

2) Vor jede numerische Zahl kann man links beliebig viele Nullen setzen, ohne ihren Werth zu ändern; denn es ist $0 \cdot z^n = 0$ und $0 + A = A$.

3) Rückt man eine Ziffer um eine Stelle nach links, so erhält sie einen zehnmal größeren Werth, nach rechts: einen zehnmal kleineren.

4) Hängt man an eine Zahl rechts eine 0 an, so erhält jede Ziffer einen zehnmal größeren Werth, also ist jeder Summand mit 10 multiplicirt, also die ganze Zahl. Hängt man zwei Nullen an, so hat man mit 100 multiplicirt, u. s. w.

5) Streicht man die letzte Ziffer einer Zahl fort, so hat man gleichzeitig zwei Operationen ausgeführt: die Einer subtrahirt und den Rest durch 10 dividirt.

6) Die höchste nziffrige Zahl wird mit nNeunen geschrieben:

$$9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 9.$$

Addirt man 1, so gehen die 9 Einer in 1 Zehner über, hierzu die 9 Zehner giebt 1 Hunderter, u. s. w. Zuletzt erhält man

$$1 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-1} = 10 \cdot 10^{n-1} = 1 \cdot 10^{n}.$$

Es ist aber $1 \cdot 10^{n}$ die niedrigste $n+1$ziffrige Zahl, folglich ist zwischen ihr und der höchsten $n$ziffrigen Zahl keine Lücke.

§. 71.

Die vier Species der gemeinen Rechenkunst.

Wie man numerische Zahlen addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt, ist bekannt; hier genügt die Begründung des Verfahrens durch die entwickelten Gesetze. Es sei

$$A = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \ldots$$
$$B = b_0 + b_1 10 + b_2 10^2 + \ldots$$

Aus §. 21. und §. 25. I. und II. folgt:

$$A \pm B = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) \cdot 10 + (a_2 \pm b_2) \cdot 10^2 + \ldots.$$

Der Zweck des Rechnens mit numerischen Zahlen: wieder eine numerische Zahl zu erzeugen, ist erreicht, wenn $a_0 \pm b_0$, $a_1 \pm b_1$, ꝛc. positiv und kleiner als 10 sind. Während also die Gleichung oben sagt: man addirt und subtrahirt Einer und Einer, Zehner und Zehner ꝛc., so kommt für die praktische Ausführung noch hinzu, daß man bei der Addition, wenn mehr als 9 Einheiten einer Klasse sich ergeben, 10 solche Einheiten zu einer Einheit der nächst höheren Klasse macht und dieser Klasse zuzählt; ergiebt sich bei der Subtraction eine negative Zahl, so vermehrt man die Einheiten des Minuenden um 10 Einheiten, indem man von den Einheiten der nächst höheren Klasse eine Einheit fortnimmt. Die folgenden Beispiele zeigen neben einander die Theorie und die Praxis.

Addition:	3	4	5	2	1	und	3	4	5	2	1
	4	2	9	3	6		4	2	9	3	6
	7	6	(14)	5	7		7	7	4	5	7
Subtraction:	6	5	2	4	9	und	6	5..	2	4	9
	2	3	8	1	5		2	3	8	1	5
	4	2	(—6)	3	4		4	1	4	3	4

Bei der Multiplication verfährt man nach §. 33.

$$\begin{aligned}
A &= a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \ldots \\
B &= b_0 + b_1 10 + b_2 10^2 + \ldots \\
\hline
AB &= b_0 a_0 + b_0 a_1 10 + b_0 a_2 10^2 + \ldots \\
&\quad + b_1 a_0 10 + b_1 a_1 10^2 + \ldots \\
&\quad + b_2 a_0 10^2 + \ldots \\
&\quad + \ldots \text{ꝛc.} \\
\hline
AB &= b_0 a_1 + (b_0 a_1 + b_1 a_0) 10 + \ldots
\end{aligned}$$

Da die numerische Zahl nach fallenden Potenzen von 10 geordnet ist, so geschieht das Einrücken jeder folgenden Zeile von rechts nach links. Bei der praktischen Ausführung hat man wieder darauf zu sehen, daß in keiner Klasse mehr als 9 Einheiten sind; z. B.:

$$\begin{array}{r}
3724 \\
465 \\
\hline
18620 \\
22344 \\
14896 \\
\hline
1731660.
\end{array}$$

Bei der Division, z. B. $\frac{63485}{27}$, verfährt man nach §. 34., indem man bei Anwendung des Gesetzes $\frac{A}{B} = x + \frac{A - Bx}{B}$, x möglichst groß wählt, aber doch so, daß der Rest A — Bx positiv wird. Bei dieser Grenze wählt man für x die höchste Ziffer der höchsten Ordnung, die sich aus Vergleichung der Anzahl der Ziffern des Divisor mit der des Dividendus leicht ergiebt.

$$27 \,|\, 63485 \,|\, 2000 + 300 + 50 + 1 + \tfrac{8}{27}$$

$$\begin{array}{r}
54000 \\
\hline
9485 \\
8100 \\
\hline
1385 \\
1350 \\
\hline
35 \\
27 \\
\hline
8.
\end{array}$$

Läßt man die Nullen fort, schreibt aber die andern Ziffern in die richtigen Stellen, so erhält man die gewöhnliche Darstellung:

$$27 \,|\, 63485 \,|\, 2351\tfrac{8}{27}$$

$$\begin{array}{r}
54 \\
\hline
94 \\
81 \\
\hline
138 \\
135 \\
\hline
35 \\
27 \\
\hline
8.
\end{array}$$

§. 72.

Erklärung.

Ist $\frac{a}{b}$ eine ganze Zahl, so nennt man b einen **Theiler** (auch Factor) von a und a ein **Vielfaches** von b. Jede Zahl, welche nur 1 und sich selbst zu Theilern hat, heißt eine **Primzahl**, z. B. 3, 7, 11, ...; jede Zahl, welche auch noch andere Theiler hat, eine **zusammengesetzte Zahl**, z. B. 4, 6, 18, 25, ... Jede **gerade** Zahl, mit Ausnahme der 2, ist eine zusammengesetzte, denn sie hat den Theiler 2; die **ungeraden** Zahlen sind theils Primzahlen, theils zusammengesetzte. Jede zusammengesetzte Zahl kann in ein Product ganzer Zahlen verwandelt werden, jede Primzahl nicht, wenn man 1 als Factor ausschließt. Ist b ein Theiler von a, und $\frac{a}{b}$ etwa $= c$, so folgt $a = b \cdot c$. Sind nun b und c selbst zusammengesetzte Zahlen, so kann man sie wieder in Producte verwandeln und so fortfahren, bis a ein Product von lauter Primzahlen ist. Da diese Verwandlung bei praktischen Rechnungen wichtig wird, so unterscheidet man noch die Theiler einer Zahl (a), welche an sich Primzahlen sind, von solchen, welche zusammengesetzte Zahlen sind, nennt erstere **einfache Theiler** oder **Primfactoren**, letztere **zusammengesetzte Theiler** von a. z. B. 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 sind Theiler von 48, aber nur 2 und 3 sind einfache Theiler von 48.

Haben zwei oder mehr Zahlen einen gemeinschaftlichen Theiler, so nennt man sie **relativ zusammengesetzte Zahlen**, z. B. 24, 33, 69 (der gemeinschaftliche Theiler: 3); haben sie aber nicht alle einen gemeinschaftlichen Theiler, so heißen sie **relative Primzahlen** (auch **relativ prim**), z. B. 15, 22, 27, 35. — Beliebig viele Zahlen sind schon dann relative Primzahlen, wenn zwei derselben keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Den Fall: 7, 21, 35, 42 rechnet man zu den relativ zusammengesetzten Zahlen, indem man 7 als Theiler von 7 gelten läßt.

§. 73.

Gesetze.

1) Jeder gemeinschaftliche Theiler (n) zweier Zahlen (a und b) ist auch ein Theiler ihrer Summe und Differenz ($a \pm b$).

Beweis. $\frac{a \pm b}{n} = \frac{a}{n} \pm \frac{b}{n}$. Die rechte Seite ist eine ganze Zahl, folglich auch die linke.

2) Der Satz gilt erweitert für algebraische Summen.

3) Ist ein Glied (etwa c) einer algebraischen Summe ($S = a - b - c + d$) nicht durch eine Zahl (n) theilbar, sind es aber alle andern Glieder: so ist die Summe (S) nicht durch diese Zahl (n) theilbar.

Beweis. $\frac{S}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n} - \frac{c}{n} + \frac{d}{n}$; addirt man zu beiden Seiten $-\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{d}{n}$, so folgt $\frac{S}{n} - \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{d}{n} = -\frac{c}{n}$. Wollte man nun annehmen, es sei $\frac{S}{n}$ eine ganze Zahl, so wäre die linke Seite eine ganze Zahl, folglich auch die rechte, was mit der Voraussetzung im Widerspruch ist.

Beispiel. 2n ist durch 2 theilbar, $2n + 1$ und $2n - 1$ sind es nicht; daher ist 2n die Formel für die gerade, $2n \pm 1$ für die ungerade Zahl. 3n ist durch 3 theilbar, $3n \pm 1$, $3n \pm 2$ sind es nicht. — Es ist $na \pm x$ nicht durch n theilbar, wenn $x < n$ ist.

4) Ein Product (ab) ist durch eine Zahl (n) theilbar, wenn ein Factor (etwa a) durch diese Zahl theilbar ist. Der Grund liegt in der Gleichung $\frac{ab}{n} = \frac{a}{n} \cdot b$. — Ist also eine Zahl c durch eine andere d theilbar, so ist sie auch durch jeden Theiler von d theilbar.

5) Wenn bei einer Division $a \mid b \mid c$

$$\frac{ac}{d}$$

α) Divisor (a) und Dividendus (b) durch dieselbe Zahl (n) theilbar sind, so ist es auch der Rest (d).

β) Sind Divisor (a) und Rest (d) durch dieselbe Zahl (n) theilbar, so ist es auch der Dividendus (b).

Beweis. Es ist $d = b - ac$ und $b = ac + d$. Nun wende man Nr. 1. und 4. dieses §. an.

§. 74.

Der größte gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen.

Den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen a und b findet man nach folgender Regel: Man dividire mit der kleineren Zahl b in die größere a, mit dem Rest in den vorigen Divisor b, mit dem neuen Rest wieder in den vorigen Divisor (ersten Rest) und so fort, bis die Division aufgeht. Der letzte Divisor ist der größte gemeinschaftliche Theiler von a und b, und ist derselbe 1, so sind a und b relative Primzahlen.

Beweis. Die Division muß einmal aufgehen, weil die Reste nach und nach immer kleiner werden, folglich, wenn die Division nicht früher aufgeht, einmal der Rest 1 kommen muß, worauf dann die nächste Partial-Division aufgeht. Wir sind also zu folgender Darstellung berechtigt, nach welcher p der letzte Divisor sein soll:

```
b | a | c
  ac
  ───
  d | b | e
    de
    ───
    f | d | g
      fg
      ───
      p | f | q
        pq
        ───
        0.
```

Aus §. 73. 5. β. folgt nun:

1) daß p überhaupt ein gemeinschaftlicher Theiler von a und b ist; denn p ist ein gemeinschaftlicher Theiler von f und p, folglich von d; also von d und f, folglich von b; also von b und d, folglich von a;

2) folgt, daß p auch der größte gemeinschaftliche Theiler von a und b ist; denn gesetzt, x wäre auch ein gemeinschaftlicher Theiler von a und b, so müßte x nach §. 73. 5. α. auch ein Theiler von d, dann von f, dann von p sein. Wenn x also nicht p selbst ist, so muß $x < p$ sein.

Anmerkung. Hieraus folgt noch: Jeder gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen ist selbst ein Theiler des größten gemeinschaftlichen Theilers beider Zahlen.

Beispiel. 2163 und 5985 haben 21 zum größten gemeinschaftlichen Theiler; 184 und 153 sind relative Primzahlen.

§. 75.

Das Heben der Brüche.

Sind Zähler und Nenner eines Bruches relativ zusammengesetzte Zahlen, so kann man beide durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler dividiren. Man nennt dieses Verfahren: den Bruch heben. Zähler und Nenner werden dann relative Primzahlen; der Werth des Bruches bleibt natürlich unverändert. Der so gehobene Bruch giebt dann diesen Werth in den kleinsten Zahlen; z. B.

$$\frac{102}{119} = \frac{6}{7};\ \frac{403}{558} = \frac{13}{18};\ \frac{280}{175} = \frac{8}{5};\ \frac{1519}{4123} = \frac{7}{19};\ \frac{273156}{609348} = \frac{13}{29};$$
$$\frac{16049371}{50617247} = \frac{13}{41};\ \frac{8322139}{78321439} = \frac{107}{1007}.$$

Anmerkung. Wenn man einen Bruch $\frac{a}{b}$, welcher sich nicht heben läßt, durch Addition oder Subtraction mit einer ganzen Zahl verbindet, das Resultat aber in einen Bruch verwandelt: so läßt sich dieser auch nicht heben.

Beweis. Weder b, noch ein Theiler von b, kann nach §. 73. 3 Theiler des Zählers sein.

§. 76.
Gesetze.

1) Ein Quotient $\frac{a}{b}$ ist immer einer ganzen Zahl gleich, wenn er mit einer jeden zweier relativen Primzahlen n und m einzeln multiplicirt, zum Product eine ganze Zahl giebt.

Beweis. $\frac{a}{b} \cdot n$ und $\frac{a}{b} \cdot m$ oder $\frac{an}{b}$ und $\frac{am}{b}$ sind ganze Zahlen, folglich haben an und am den gemeinschaftlichen Theiler b. Der Beweis sucht nun zu zeigen, daß a der größte gemeinschaftliche Theiler von an und am ist; dann muß nach §. 74. Anmerk. $\frac{a}{b}$ eine ganze Zahl sein. Den größten gemeinschaftlichen Theiler von an und am findet man durch die in §. 74. angegebene Division. Diese schließt sich aber, wie die unten folgende Darstellung zeigt, genau an die Division an, durch welche man den größten gemeinschaftlichen Theiler von n und m findet, welcher nach der Voraussetzung 1 sein soll.

$$\begin{array}{ll}
n \mid m \mid c & an \mid am \mid c \\
\underline{nc} & \underline{anc} \\
d \mid n \mid e & ad \mid an \mid e \\
\underline{de} & \underline{ade} \\
f \mid d \mid g & af \mid ad \mid g \\
\underline{fg} & \underline{afg} \\
h \mid f \mid k & ah \mid af \mid k \\
\underline{hk} & \underline{ahk} \\
1 \mid h \mid h & a \mid ah \mid h \\
\underline{h} & \underline{ah} \\
0. & 0.
\end{array}$$

2) Eine Zahl (a) ist durch das Product zweier relativen Primzahlen (n und m) theilbar, wenn sie durch jede einzelne theilbar ist.

Beweis. $\frac{a}{nm} \cdot n$ und $\frac{a}{nm} \cdot m$ sind ganze Zahlen. (Nr. 1.)

3) Ist eine Zahl (n) Theiler eines Products ab, ist sie aber mit dem einen Factor b relativ prim, so ist sie ein Theiler des andern Factors a.

Beweis. $\frac{a}{n} \cdot b$ und $\frac{a}{n} \cdot n$ sind ganze Zahlen.

4) Eine Zahl n kann nicht Theiler eines Products abcd sein, wenn sie mit jedem einzelnen Factor relativ prim ist.

Beweis. Die Annahme $\frac{abcd}{n}$ wäre eine ganze Zahl, führt zu einem Widerspruch; denn nach Nr. 3. müßte dann auch $\frac{bcd}{n}$ eine ganze Zahl sein; aus demselben Grunde dann auch $\frac{cd}{n}$, endlich $\frac{d}{n}$; aber auch d und n sind relative Primzahlen.

5) Ein Product absoluter Primzahlen (abcd) kann nicht dem Producte anderer Primzahlen (efg) gleich sein.

Beweis. Aus abcd = efg würde folgen: $\frac{abcd}{e} = fg$, d. h. $\frac{abcd}{e}$ müßte eine ganze Zahl sein. Dies ist aber, da absolute Primzahlen auch relative sind, nach Nr. 4 nicht möglich.

6) Eine zusammengesetzte Zahl ist nur einem einzigen Producte absoluter Primzahlen gleich; wie man also auch das Zerlegen einer Zahl in ihre einfachen Factoren (§. 72.) ausführen mag, man gelangt immer zu demselben Product. So ist z. B. $840 = 2 \cdot 420 = 2 \cdot 2 \cdot 210 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 105 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7$. Man kann aber auch so zerlegen: $840 = 10 \cdot 84 = 10 \cdot 4 \cdot 21 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.

7) Hieraus folgt, daß jede ganze Potenz eines Bruches $\frac{a}{b}$, der sich nicht heben läßt, wieder ein Bruch ist, welcher sich auch nicht heben läßt; denn es ist $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = \frac{a \cdot a \cdot a \ldots.}{b \cdot b \cdot b \ldots.}$.

Denkt man sich jetzt a und b in Primfactoren zerlegt, so können im Zähler nur Primfactoren von a, im Nenner nur Primfactoren von b vorkommen, und da a und b keinen gemeinschaftlichen Theiler haben sollen, so haben überhaupt Zähler und Nenner keinen solchen.

§. 77.

Ermittelung der Primzahlen.

Das Zerlegen einer Zahl a in ihre Primfactoren führt unmittelbar zu der Untersuchung, ob diese Zahl eine Primzahl ist, oder nicht. Im Wesentlichen ist eine solche Untersuchung ein Probiren, da eine allgemeine Formel für jede Primzahl, ähnlich wie 2n für die gerade Zahl, fehlt. Man dividirt a nach und nach durch alle Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, u. s. w., braucht aber nur bis zu derjenigen (m) vorzuschreiten, deren Quadrat der gegebenen Zahl am nächsten kommt, ohne größer als sie zu sein. Ist a durch keine dieser Primzahlen theibar, so ist sie selbst eine Primzahl. Man beweist das so: Ist n die nächste Primzahl nach m, also $n^2 > a$, so ist:

1) a überhaupt durch keine Zahl theilbar, welche kleiner als n ist. Denn eine solche Zahl ist entweder eine Primzahl, und dann ist a nach der Voraussetzung durch sie nicht theilbar, oder sie ist eine zusammengesetzte Zahl, und dann kann a durch sie auch nicht theilbar sein, weil, wenn dies der Fall wäre, a durch die Primfactoren dieser Zahl theilbar sein müßte (§. 73. 4.), und dies ist wieder gegen die Voraussetzung, weil diese Primfactoren kleiner als n sind.

2) Dann ist aber a auch nicht durch n selbst oder durch eine Zahl, welche größer als n ist, theilbar. Denn wäre n′ eine solche Zahl, und ginge n′ in a auf, wäre etwa der Quotient $\frac{a}{n'} = c$, so würde hieraus folgen: $a = n' \cdot c$ oder, wenn man beide Seiten durch c dividirt, $\frac{a}{c} = n'$, d. h. es müßte a auch durch c theilbar sein. Dies widerspricht aber dem ersten Theile des Beweises, weil $c < n$ sein muß. Um dies zu erkennen, hat man $n \cdot n > a$ und $n' \cdot c = a$, folglich (§. 4. 2.) $n' \cdot c < n \cdot n$ oder, wenn man beide Seiten durch n′ dividirt (§. 36. 3.): $c < \frac{n}{n'} \cdot n$. Es ist aber $\frac{n}{n'}$ entweder gleich 1, oder kleiner als 1, in beiden Fällen also $c < n$.

Beispiel. 181 und 221 liegen zwischen $13^2 = 169$ und $17^2 = 289$. Um zu untersuchen, ob sie Primzahlen sind oder nicht, muß man sie durch 2, 3, 5, 7, 11, 13 dividiren. Man findet: 181 ist eine Primzahl, 221 aber ist durch 13 theilbar ($221 = 13 \cdot 17$).

Die Untersuchung, ob eine Zahl durch andere Zahlen theilbar ist, wird durch die Bekanntschaft mit einzelnen leicht zu erkennenden Eigenschaften sehr vereinfacht, welche Zahlen haben müssen, wenn sie durch 2, 3, 5, u. s. w. theilbar sein sollen. Man kann zwar für die Theilbarkeit durch jede bestimmte Zahl ein Merkmal finden, aber nur wenn es einfach ist, gewährt es einen praktischen Nutzen. Der nächste §. enthält die wichtigsten Merkmale der Theilbarkeit.

Anmerk. Zwischen 1 und 200 liegen folgende Primzahlen:
2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47.
53. 59. 61. 67. 71. 73. 79. 83. 89. 97.
101. 103. 107. 109. 113. 127. 131. 137. 139. 149.
151. 157. 163. 167. 173. 179. 181. 191. 193. 197. 199.

§. 78.

Merkmale der Theilbarkeit der Zahlen.

Eine Zahl ist theilbar:

1) durch 2, wenn die letzte Ziffer gerade oder 0 ist;

2) durch 4, wenn die Summe der letzten und doppelten vorletzten Ziffer, oder auch die Summe der Einer und Zehner durch 4 theilbar ist; z. B. 3572, 4308, 700;

3) durch 8, wenn die Summe der letzten, doppelten vorletzten und 4fachen vorvorletzten Ziffer, oder auch die Summe der Einer, Zehner und Hunderter durch 8 theilbar ist, z. B. 727352;

4) durch 3 und 9, wenn die Summe aller Ziffern resp. durch 3 und 9 theilbar ist, z. B. 7032 ist durch 3 theilbar, 417420 durch 9;

5) durch 5, wenn die letzte Ziffer 5 oder 0 ist;

6) durch 11, wenn die Differenz der beiden Summen durch 11 theilbar oder 0 ist welche man erhält, wenn man die 1ste, 3te, 5te u. s. w. Ziffer addirt und dann die 2te, 4te, 6te u. s. w., z. B. 428074614. Hier ist $(4+8+7+6+4)-(2+0+4+1)=22$; $\frac{428074614}{11}=38915874$.

Aus §. 76. 2. folgt dann weiter: Eine Zahl ist durch 6 theilbar, wenn sie durch 2 und 3 theilbar ist; durch 12, wenn sie durch 3 und 4 theilbar ist; durch 10, wenn sie durch 2 und 5 theilbar ist, also mit 0 endet, u. s. w.

Die Beweise dieser Sätze (1 bis 6) folgen aus §. 73. 1. und 2. Jede numerische Zahl hat die Form:

$$B = a + b \cdot 10 + c \cdot 100 + d \cdot 1000 + e \cdot 10000 + \ldots.$$

Um ein Merkmal der Theilbarkeit durch irgend eine Zahl n zu finden, zerlegt man die Summanden von B so, daß möglichst viel Summanden durch n theilbar werden; die Theilbarkeit der Summe der übrigen ist dann das Merkmal. Man erkennt hieraus, daß man für dieselbe Zahl auch verschiedene Merkmale der Theilbarkeit auffinden kann, z. B. bei 4 und 8.

Einige Beispiele werden genügen:

Theilbarkeit durch 4.

$$B = (a + b \cdot 10) + 100\,(c + d \cdot 10 + e \cdot 100 + \ldots\ldots),$$

oder noch weiter zerlegt:

$$B = (a + 2b) + [8b + 100\,(c + d \cdot 10 + e \cdot 100 + \ldots)].$$

In beiden Gleichungen ist der zweite Summand der rechten Seite durch 4 theilbar, folglich die Theilbarkeit des ersten das Merkmal.

Theilbarkeit durch 9.

$$B = a + 9b + b + 99c + c + 999d + d + 9999e + e + \ldots$$
$$= (a + b + c + d + e + \ldots) + 9\,[b + 11c + 111d + 1111e + \ldots].$$

Theilbarkeit durch 11.

$$B = a + 10b + 99c + c + 990d + 10d + 9999e + e + 99990f$$
$$+ 10f + 999999g + g + \dots$$
$$= (a + 10b + c + 10d + e + 10f + g + \dots) + (99c + 990d$$
$$+ 9999e + 99990f + 999999g + \dots).$$

Der zweite Summand ist durch 11 theilbar, also wäre die Theilbarkeit des ersten das Merkmal. Diesen kann man aber zweckmäßig noch weiter zerlegen in:

$$a + 11b - b + c + 11d - d + e + 11f - f + g + \dots$$
$$= [(a + c + e + g + \dots) - (b + d + f + \dots)] + 11(b + d + f + \dots).$$

Anmerkung. Hat aber eine Zahl die oben angegebenen Merkmale nicht, so kann sie nach §. 73. 3. auch nicht durch die entsprechenden Zahlen theilbar sein.

§. 79.

Zur Uebung.

(Man beachte die Vorbemerkung dieses Kapitels.)

1) Gerade Zahlen geben, addirt, subtrahirt und multiplicirt, wieder gerade Zahlen.

2) Zwei ungerade Zahlen geben, addirt und subtrahirt, gerade Zahlen, multiplicirt, ungerade Zahlen.

3) Von den 3 Ausdrücken $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ ist wenigstens einer immer durch 3 theilbar.

4) $a(a + 1)(a + 2)$ ist immer durch 6 theilbar.

5) $a^2 + 5$ ist durch 3 theilbar, wenn a nicht durch 3 theilbar ist; hingegen ist $a^2 + 5$ nicht durch 3 theilbar, wenn a durch 3 theilbar ist; folglich ist $a(a^2 + 5)$ immer durch 3 theilbar.

Beweis. Ist a durch 3 theilbar, so ist $a^2 + 5$ nicht durch 3 theilbar nach §. 73. 3. Ist aber a nicht durch 3 theilbar, so hat a die Form $3n + 1$ oder $3n + 2$; folglich heißt nun die Behauptung: $(3n + 1)(3n + 1) + 5$ und $(3n + 2)(3n + 2) + 5$ sind durch 3 theilbar. Man löse nun die Klammern auf. Aehnlich sind die Beweise zu 1. bis 4.

6) Von zwei auf einander folgenden geraden Zahlen ist eine durch 4 theilbar.

7) Von 2, 3, 4, 5 ... auf einander folgenden Zahlen ist immer eine, und nur eine, resp. durch 2, 3, 4, 5 ... theilbar.

8) Jede Primzahl, 2 und 3 ausgenommen, hat eine der beiden Formen $6n + 1$ oder $6n - 1$.

Beweis. Zählt man zu einer Primzahl 1 hinzu oder zieht 1 ab, so entsteht beide Mal eine gerade Zahl. Eine von beiden ist aber auch durch 3 theilbar.

9) Läßt Z, durch a dividirt, den Rest r und durch b dividirt, auch den Rest r, und sind a und b relative Primzahlen: so läßt Z, durch ab dividirt, ebenfalls den Rest r; z. B. $\frac{117}{7} = 16\frac{5}{7}$, $\frac{117}{8} = 14\frac{5}{8}$ und $\frac{117}{56} = 2\frac{5}{56}$.

Beweis. $Z = Z - r + r$, folglich $\frac{Z}{ab} = \frac{Z-r}{ab} + \frac{r}{ab}$. Nun ist $Z - r$ durch a und b theilbar, folglich durch ab, und r ist $< ab$; folglich ist bei der Division $\frac{Z}{ab}$, $\frac{Z-r}{ab}$ der Quotient, r der Rest.

10) Die Differenz zweier Zahlen mit gleichen Ziffern-Summen ist durch 9 theilbar; z. B. $\frac{341026 - 221641}{9} = 13265$; $\frac{4321 - 1234}{9} = 343$.

Beweis. Aus dem Beweise zu §. 78. 4. folgt, daß jede Zahl gleich ist der Summe ihrer Ziffern plus einem Vielfachen von 9.

11) Zwei gehobene Brüche mit ungleichen Nennern können, addirt oder von einander subtrahirt, niemals eine ganze Zahl geben; multiplicirt, nur dann, wenn der Zähler jedes Bruches durch den Nenner des anderen theilbar ist.

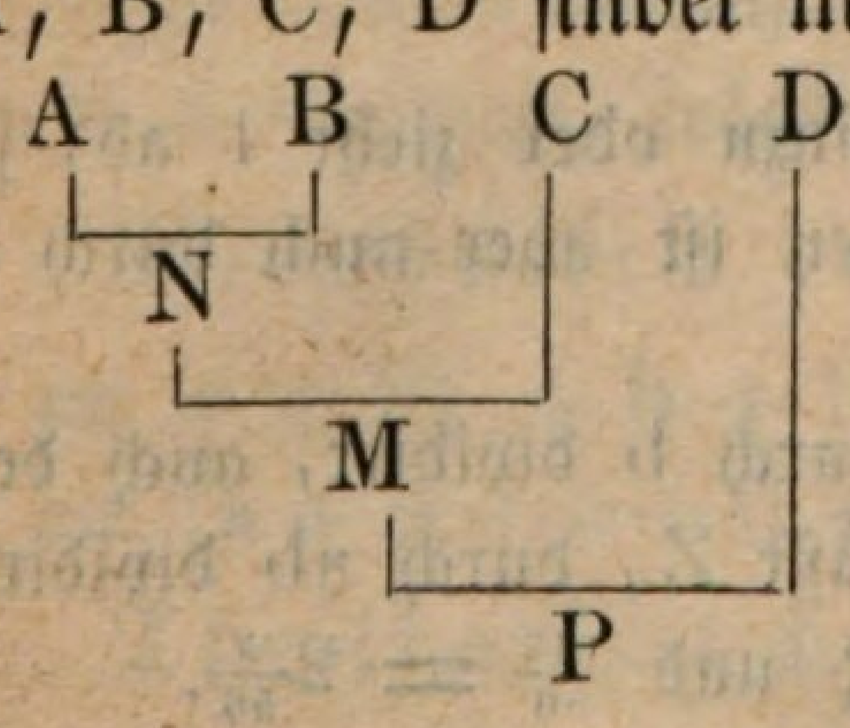
Beweis. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$. Wäre nun der entstandene Bruch eine ganze Zahl, so müßte der Zähler durch b theilbar sein, folglich auch nach §. 73. 3. der erste Summand ad, folglich auch nach §. 76. 3. die Zahl d. Da man eben so, wie man in Beziehung auf b geschlossen hat, auch in Beziehung auf d schließen kann, so erhält man den Widerspruch, daß von den ungleichen Nennern b und d jeder ein Theiler des anderen sein müßte. — Der letzte Theil des Satzes folgt, weil $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ist, ebenfalls aus §. 76. 3.

12) Zwei gebrochene Zahlen können niemals, wenn man sie multiplicirt, eine ganze Zahl geben, und zugleich auch, wenn man sie addirt oder subtrahirt. — Daß dieser Satz auch für eine gebrochene und eine ganze Zahl gilt, ergiebt sich schon daraus, daß die Summe oder Differenz solcher Zahlen nie eine ganze Zahl sein kann (§. 75. Anmerk.).

Beweis. Sollen die gebrochenen Zahlen, addirt oder subtrahirt, eine ganze Zahl geben, so müssen sie sich nach dem vorhergehenden Satz durch Heben auf gleiche Nenner bringen lassen. Haben sie dann die Form $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\delta}{\beta}$, so daß β sowohl mit α, als auch mit δ relativ prim ist, so kann das Product $\frac{\alpha\delta}{\beta^2}$ sich nicht heben lassen, viel weniger eine ganze Zahl sein.

§. 80.

Den größten gemeinschaftlichen Theiler mehrerer Zahlen A, B, C, D findet man, wenn man den größten gemeinschaftlichen Theiler von A und B sucht, er sei N; dann von N und C, er sei M; dann von M und D, er sei P: so ist P der größte gemeinschaftliche Theiler von A, B, C, D. — Der Beweis ist genau wie der zu §. 74. zu führen. Man benutzt §. 73. 4. und §. 74. Anmerk.



Man kann aber den größten gemeinschaftlichen Theiler mehrerer Zahlen auch finden, wenn man jede Zahl in ihre Primfactoren zerlegt, jeden Primfactor so oft nimmt, als er in allen Zahlen gemeinschaftlicher Factor ist, und das Product dieser Primfactoren bildet. Gewöhnlich zieht man nach und nach aus den Zahlen nur die allen gemeinschaftlichen Factoren heraus, wie folgende Darstellung lehrt:

Beispiel. Gesucht der größte gemeinschaftliche Theiler von 504, 630, 1134, 1764.

Auflösung.				
	504.	630.	1134.	1764.
2	252.	315.	567.	882.
9	28.	35.	63.	98.
7	4.	5.	9.	14.

Der größte gem. Theiler $= 2 \cdot 9 \cdot 7 = 126$.

§. 81.

Ein laufendes Verhältniß kann man heben, indem man jedes Glied durch den größten gemeinschaftlichen Theiler aller Glieder dividirt. Man kann dies Verhältniß auch nach und nach heben, namentlich wenn gemeinschaftliche Theiler aller Glieder leicht zu erkennen sind. Eben so kann man einen Bruch nach und nach heben.

Beispiele. 1) $\frac{81}{196} = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}$; 2) $\frac{210}{300} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$;
3) $45 : 60 : 75 = 9 : 12 : 15 = 3 : 4 : 5$;
4) $121 : 132 : 143 : 154 = 11 : 12 : 13 : 14$;
5) $408 : 204 : 612 : 816 = 2 : 1 : 3 : 4$;
6) $5830 : 8162 : 10494 : 12826 = 5 : 7 : 9 : 11$.

§. 82.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache V mehrerer Zahlen A, B, C, D, d. h. die kleinste Zahl, in welche A, B, C, D (ohne Rest) aufgehen, findet man ebenfalls durch Zerlegen dieser Zahlen in ihre Primfactoren. Man nimmt dann jeden Primfactor so oft, als er in der Zahl enthalten ist, in welcher er am häufigsten vorkommt; das Product aller ist V. Offenbar ist so V durch jede der Zahlen A, B, C, D theilbar, aber das Fortlassen auch nur eines Factors würde dem V diese Eigenschaft nehmen. Die praktische Ausrechnung geschieht gewöhnlich etwas anders. Man geht davon aus, daß V in dem besonderen Falle das Product aller gegebenen Zahlen ist, wenn je zwei derselben relative Primzahlen sind. Ist dies nun nicht der Fall, so verkleinert man die gegebenen Zahlen dadurch, daß man einen Primfactor, welcher in 2 und mehr Zahlen vorkommt, aus jeder einmal fortläßt, d. h. jede Zahl durch ihn dividirt. Das-

selbe geschieht mit diesem Factor noch so oft, als er noch in mehr als einer Zahl vorkommt. Man thut dies nach der Reihe mit den Primzahlen 2, 3, 5, ..., bis je 2 der gegebenen, resp. verkleinerten Zahlen relative Primzahlen sind. Das Product dieser Zahlen multiplicirt mit dem Product aller herausgenommenen Primfactoren, welche man besonders notirt haben muß, giebt dann V. Folgendes Beispiel zeigt die gebräuchliche Darstellung: Gegeben 84, 45, 24, 30, 100.

Auflösung.					
	84.	45.	24.	30.	100.
2	42.	45.	12.	15.	50.
2	21.	45.	6.	15.	25.
3	7.	15.	2.	5.	25.
5	7.	3.	2.	1.	5.

$$V = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 12600.$$

Wenn in einer Zeile eine der gegebenen, resp. verkleinerten Zahlen ein Theiler einer anderen ist, so kann man sie durchstreichen; z. B. 15 in der zweiten Zeile, weil 15 in 45 aufgeht. Es ist klar, daß jede Zahl 15 zum Theiler haben muß, wenn sie 45 zum Theiler hat.

Beispiel 2.							
	10.	12.	14.	15.	16.	18.	21.
2	~~5~~.	6.	7.	15.	8.	9.	21.
2		~~3~~.		15.	4.	9.	21.
3				5.	4.	3.	7.

$$V = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 = 5040.$$

§. 83.

Addition und Subtraction von Brüchen. Der General-Nenner.

Eine Anwendung des vorigen §. macht man bei der Addition und Subtraction von Brüchen. Anstatt hierbei nach §. 29. 2) und 3) zu verfahren, bringt man die Brüche auf gleiche Nenner, indem man Zähler und Nenner jedes Bruches mit einer solchen Zahl multiplicirt, daß dadurch alle Nenner gleich werden, und wendet §. 29. 1) an. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Nenner ist der gleiche Nenner, auf den sich alle Brüche bringen lassen, und wird der General-Nenner genannt. Die Addition und Subtraction geschieht dann nur mit den neuen Zählern, und jeden solchen Zähler erhält man, wenn man den ursprünglichen Zähler mit dem Quotienten multiplicirt, der durch Division des zugehörigen Nenners in den General-Nenner entsteht. Diesen Quotienten und sein Product mit dem ur-

sprünglichen Zähler pflegt man daher bei der praktischen Ausrechnung übersichtlich hinzuschreiben, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$S = \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{7}{6} - \frac{3}{10} + \frac{3}{4} - \frac{5}{12} - \frac{4}{15}.$$

Auflösung. Der General-Nenner ist 60.

	60	
$-\frac{4}{5}$	12	48
$-\frac{3}{10}$	6	18
$-\frac{5}{12}$	5	25
$-\frac{4}{15}$	4	16
		-107
$\frac{2}{3}$	20	40
$\frac{7}{6}$	10	70
$\frac{3}{4}$	15	45
		$+155$
		-107
		$+\ 48$

$$S = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}.$$

Zur Uebung. $\frac{3}{22} - \frac{2}{33} = \frac{5}{66}$; $\frac{5}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0$;
$\frac{5}{7} - \frac{3}{14} - \frac{11}{21} = -\frac{1}{42}$; $\frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} = \frac{11}{42}$;
$\frac{7}{30} - \frac{8}{45} + \frac{5}{12} - \frac{21}{40} + \frac{1}{36} = -\frac{1}{40}$; $\frac{1}{2} - \frac{7}{10} + \frac{6}{5} = 1$;
$\frac{5}{7} + \frac{2}{5} - \frac{11}{14} - \frac{3}{20} + \frac{5}{12} - \frac{8}{21} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{126}$.

§. 84.

Als eine Anwendung des General-Nenners ist noch anzuführen, daß man die Glieder eines laufenden Verhältnisses, wenn sie Brüche sind, mit dem General-Nenner multiplicirt, um sie auf ganze Zahlen zu bringen. Ist z. B. gegeben:

$$a:b:c:d:f = \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{5}{6} : \frac{3}{5} : \frac{7}{12},$$

so multiplicire man alle Glieder rechts mit 60; dann entsteht:

$$a:b:c:d:f = 40:45:50:36:35.$$

Sind ferner Zähler und Nenner eines Bruches Summen, und die Summanden Brüche: so geschieht die Vereinfachung auch am bequemsten dadurch, daß man Zähler und Nenner mit dem General-Nenner multiplicirt. Dasselbe kann selbst dann geschehen, wenn Zähler und Nenner eingliedrig sind. z. B.

$$A = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12}}{\frac{3}{2} + \frac{5}{6} - \frac{7}{12}};$$

multiplicirt man Zähler und Nenner mit 12, so entsteht:

$$A = \frac{8 + 3 - 5}{18 + 10 - 7} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$ Ferner $B = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{7}{16}}$;

multiplicirt man Zähler und Nenner mit 48, so folgt $B = \frac{20}{21}$.

Zur Uebung. 1) $\frac{3+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{7}{3}$; 2) $\frac{3}{4+\frac{1}{4}} = \frac{12}{17}$; 3) $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$;

4) $\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}\right):\frac{9}{20} = (15+40-48+50):27 = 2\frac{1}{9}$;

5) $\frac{\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{1}{2}}{\frac{3}{7}-\frac{2}{3}+\frac{3}{21}} = \frac{21\cdot(15+16-10)}{20\cdot(9-14+3)} = -\frac{441}{40}$.

6) $A = \frac{5}{6}-\frac{3}{8}-\frac{3}{10}+\frac{7}{15}-\frac{5}{12}$; der Generalnenner ist 120; sondert man $\frac{1}{120}$ ab, so muß man jedes Glied in den Klammern mit 120 multipliciren und erhält:

$$A = \frac{1}{120}\cdot(100-45-36+56-50) = \frac{5}{24};$$

7) $\sqrt{\frac{5}{6}-\frac{2}{9}+\frac{4}{15}-\frac{7}{12}+\frac{51}{60}-\frac{9}{20}} = \frac{5}{6}$;

8) $\frac{(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})\cdot(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{6}} : \frac{\frac{3}{8}-\frac{5}{12}}{\frac{5}{6}+\frac{5}{8}} = -\frac{5}{6}$;

9) $\frac{(\frac{2}{7}:\frac{8}{21}-\frac{5}{18}:\frac{15}{36})\cdot\frac{12}{5}}{(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{3}{4})\cdot\frac{18}{10}} : \frac{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}{\frac{5}{8}-\frac{10}{12}} = \frac{5}{9}$.

10) Es sei gegeben: $a:d = 2:3$, $c:e = 5:6$, $b:e = 10:7$, $d:b = 7:4$, so verhält sich $a:b:c:d:e = 70:60:35:105:42$.

11) Aus $a:b = 4:3$, $d:e = 50:9$, $d:f = 25:8$, $c:f = 5:6$, $e:b = 1:5$ folgt:

$$a:b:c:d:e:f = 180:135:40:150:27:48.$$

Fortsetzung der Buchstabenrechnung mit Berücksichtigung der Gesetze dieses Kapitels.

§. 85.

Die nächste Erleichterung, welche die Lehren dieses Kapitels in der Buchstabenrechnung gewähren, findet bei der Addition, Subtraction, Multiplication und Division algebraischer Summen und eingliedriger Ausdrücke Statt. Gewöhnlich sind bei einer solchen Summe die Glieder Producte aus bestimmten Zahlen und Buchstaben, z. B. $3a-\frac{1}{2}b+2c-\frac{4}{5}d$. Man pflegt die Zahlen-Factoren $3, -\frac{1}{2}, 2, -\frac{4}{5}$ die Coefficienten der Glieder zu nennen, namentlich auch, wenn die Summe eine nach den Potenzen eines Buchstaben geordnete ist, z. B. $3-4a-\frac{2}{3}a^2+4a^3-a^5$. Das letzte Glied hat hier den Coefficienten -1. Sind nun die Coefficienten Brüche, so geschieht ihre Addition und Subtraction mittelst des General-

Nenners, oder nach §. 29.; bei der Multiplication und Division hebt man durch Zerlegen in Primfactoren. Hierbei ist namentlich dem Anfänger zu rathen, die Coefficienten von den Buchstaben-Factoren zu trennen, z. B. $\frac{2}{3}a$ statt $\frac{2a}{3}$, $\frac{4}{7}\cdot\frac{a^2}{b}$ statt $\frac{4a^2}{7b}$ zu schreiben. Bei der Addition und Subtraction zieht man die Glieder mit gleichen Buchstaben-Factoren durch Addition und Subtraction ihrer Coefficienten in ein Glied zusammen, z. B.

$$\frac{3a^2}{4b}+\frac{5a^2}{6b}=\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{a^2}{b}=\frac{19}{12}\cdot\frac{a^2}{b}=\frac{19a^2}{12b};$$

$$\frac{7x}{6y^2}-\frac{x}{9y^2}=\left(\frac{7}{6}-\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{x}{y^2}=\frac{19x}{18y^2}.$$

Soll man multipliciren oder dividiren, so operirt man mit den Zahlen besonders und dann eben so mit den Buchstaben, z. B.

$$\frac{3a^2}{4b}\times\frac{2b^3}{9a}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9}\times\frac{a^2}{b}\cdot\frac{b^3}{a}=\frac{1}{6}\cdot ab^2=\frac{ab^2}{6};$$

$$\frac{5a^2b^3}{6}:\frac{5a}{9b}=\left(\frac{5}{6}:\frac{5}{9}\right)\times\left(a^2b^3:\frac{a}{b}\right)=\frac{3ab^4}{2}.$$

Bei der Multiplication zweier Brüche vergesse man nicht, daß man den Zähler des einen gegen den Nenner des andern heben kann. Eben so kann man, wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, seinen Nenner gegen diese Zahl heben. z. B. $\frac{10}{21}\times\frac{14}{25}$. Man multiplicirt nicht 10 mit 14, und 21 mit 25 und hebt hinterher, sondern hebt 10 gegen 25, und 21 gegen 14. So entsteht: $\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$. Bei $\frac{5}{48}\times 160$ hebt man zunächst 48 gegen 160 und erhält $\frac{5}{3}\cdot 10=\frac{50}{3}$. Man versäume nicht, alle Brüche zu heben; die Fälle, in welchen es bequemer ist, nicht zu heben, sind selten, und leicht zu erkennen.

Zur Uebung.

1) $\left(\frac{3}{4}a-\frac{2}{5}b+\frac{7}{8}c\right)-\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{10}b+\frac{3}{4}c\right)=\frac{a}{4}-\frac{b}{10}+\frac{c}{8}$.

2) $\left(\frac{2a}{9b}+\frac{5}{21}-\frac{4b}{9a}\right)+\left(\frac{3a}{2b}-\frac{5}{14}+\frac{2b}{3a}\right)=\frac{31a}{18b}-\frac{5}{42}+\frac{2b}{9a}$.

3) $$\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{6}a+\frac{3}{10}a^2-\frac{1}{2}a^3\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}a+\frac{2}{15}a^2-\frac{3}{4}a^3\right)$$
$$+\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{8}a+\frac{1}{5}a^2-\frac{5}{6}a^3\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}a+a^2-\frac{1}{3}a^3\right)$$
$$=\frac{23}{12}-\frac{11}{8}a+\frac{41}{30}a^2-\frac{11}{12}a^3.$$

4) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{5}{9b}+\frac{1}{3c}\right)+\left(\frac{4}{3a}-\frac{7}{6b}+\frac{7}{2c}\right)+\left(\frac{1}{6a}-\frac{7}{18b}-\frac{5}{6c}\right)$
$=\frac{2}{a}-\frac{1}{b}+\frac{3}{c}.$

5) $(1-\frac{2}{3}a^2+4a^4)\left(\frac{3}{2}+a^2+6a^4\right)=\frac{3}{2}+\frac{34}{3}a^4+24a^8.$

6) $\left(\frac{3a^3}{2b^2}-\frac{2a}{3}+\frac{4b^2}{a}\right)\left(\frac{2a^3}{3b^2}-\frac{a}{2}-\frac{3b^2}{2a}\right)=\frac{a^6}{b^4}-\frac{43a^4}{36b^2}+\frac{3}{4}a^2$
$-b^2-\frac{6b^4}{a^2}.$

7) $(1-\frac{2}{3}a^2-\frac{1}{4}a^4)(6+4a^2-3a^4)=6-\frac{43}{6}a^4+a^6+\frac{3}{4}a^8.$

8) $\left(\frac{4a}{5b}-\frac{2}{3}+\frac{5b}{6a}\right)\left(\frac{10a}{b}+\frac{4}{5}-\frac{30b}{a}\right)=\frac{8a^2}{b^2}-\frac{452a}{75b}-\frac{81}{5}$
$+\frac{62b}{3a}-\frac{25b^2}{a^2}.$

9) $\left(\frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{a}-\frac{1}{6}\sqrt[6]{ab^2}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}+\frac{3\sqrt{a}}{2\sqrt[3]{b}}-6\sqrt[3]{a}\right).$

Führt man gebrochene und negative Exponenten ein, so erhält man:

$\left(\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{6}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}+\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}-6a^{\frac{1}{3}}\right)$
$=\frac{2}{3}a^{\frac{7}{6}}b^{-1}-\frac{17}{3}a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{1}{3}}+\frac{23}{4}a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$, oder
$=\frac{2\sqrt[6]{a^7}}{3b}-\frac{17\sqrt[6]{a^5}}{3\sqrt[3]{b}}+\frac{23}{4}\sqrt[3]{a^2}+\sqrt{a}\sqrt[3]{b}.$

Auf dieselbe Weise kann man die folgenden Beispiele rechnen.

10) $\left(\frac{\sqrt[6]{a^5}}{6}+\frac{2\sqrt[3]{a^2}}{5}+\frac{4\sqrt{a}}{5}\right)\left(\frac{5\sqrt[6]{a^5}}{6}-2\sqrt[3]{a^2}+\frac{4\sqrt{a}}{5}\right)$
$=\frac{5\sqrt[3]{a^5}}{36}-\frac{32\sqrt[6]{a^7}}{25}+\frac{16a}{25}.$

11) $\left(\frac{4\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt{a}}-\frac{1}{2}b+\frac{2}{9}\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\frac{5}{6}a\sqrt[3]{b}-\frac{2}{3}\sqrt{a^3}-\frac{3a^2}{4\sqrt[3]{b}}\right)$
$=\frac{10}{3}\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b^5}-\frac{37}{12}a\sqrt[3]{b^4}-\frac{67}{27}b\sqrt{a^3}+\frac{49}{216}a^2\sqrt[3]{b^2}-\frac{1}{6}\sqrt{a^5}\sqrt[3]{b}.$

12) $\left(\frac{a^2}{4}-ab-2ac+b^2+4bc+4c^2\right):(a-2b-4c)=\frac{a}{4}-\frac{b}{2}-c.$

13) $\left(\frac{4}{9}a^2-9b^2-6bc-c^2\right):\left(\frac{2}{3}a-3b-c\right)=\frac{2}{3}a+3b+c.$

14) $\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{3}a^2b - \frac{1}{9}a^2b^2 - a^2\right) : \left(\frac{1}{a} - a - \frac{1}{3}ab\right) = \frac{1}{a} + a + \frac{1}{3}ab.$

15) $\left(\frac{6}{a^6} - \frac{5}{a^3} + \frac{25}{6} - \frac{65}{36}a^3 - a^6\right) : \left(\frac{2}{a^3} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2}a^3\right) = \frac{3}{a^3} - \frac{3}{2} - \frac{2}{3}a^3.$

16) $\left(\frac{4\sqrt{a}}{3b} - \frac{4}{3} - \frac{415b}{36\sqrt{a}} + \frac{161b^2}{18a} - \frac{2b^3}{\sqrt{a^3}}\right) : \left(\frac{2\sqrt{a}}{b} - \frac{3}{2} + \frac{b}{3\sqrt{a}}\right)$
$= \frac{2}{3} - \frac{b}{6\sqrt{a}} - \frac{6b^2}{a}.$

17) $(6a^{1-n} - \frac{1}{4}a^2 + \frac{59}{8}a^{n+3} + \frac{13}{12}a^{2n+4} - \frac{2}{3}a^{3n+5})$
$: (2a^{5-2n} + \frac{1}{4}a^{6-n} - \frac{1}{6}a^7) = 3a^{n-4} - \frac{1}{2}a^{2n-3} + 4a^{3n-2}.$

18) $(12a^{3-4n} + \frac{1}{6}a^{2-2n} - \frac{37}{6}a + \frac{11}{8}a^{2n} - \frac{9}{4}a^{4n-1})$
$: (3a^{1-n} - \frac{1}{3}a^n + \frac{3}{4}a^{3n-1}) = 4a^{2-3n} + \frac{1}{2}a^{1-n} - 3a^n.$

19) $\left(\frac{4}{3}a^{n+1}b^{-3m} - \frac{7}{9}a^{2n}b^{-2m} - \frac{38}{3}a^{3n-1}b^{-m} - \frac{13}{8}a^{4n-2} + \frac{9}{2}a^{5n-3}b^m\right)$
$: \left(\frac{2}{3}ab^{-2m} - \frac{1}{2}a^nb^{-m} - 6a^{2n-1}\right) = 2a^nb^{-m} + \frac{1}{3}a^{2n-1} - \frac{3}{4}a^{3n-2}b^m.$

20) $\left(\frac{3x^{4-4n}}{4y^5} - \frac{19}{3}y + 12x^{4n-4}y^7\right) : \left(\frac{x^{3-3n}}{2y^4} + \frac{x^{1-n}}{3y} - 2x^{n-1}y^2\right)$
$= \frac{3x^{1-n}}{2y} - x^{n-1}y^2 - 6x^{3n-3}y^5.$

§. 86.

Das Quadrat und der Kubus einer zweigliedrigen Summe. Das Product aus der Summe und Differenz zweier Zahlen.

Das Erheben einer Summe oder Differenz auf eine ganze positive Potenz kann zunächst durch Multiplication geschehen. Bequem ist es, für jeden Exponenten das Resultat einer solchen Multiplication als Formel zu merken und auf andere Fälle anzuwenden. Man erhält aber:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$
$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$
$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$
$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$
u. s. w.

Setzt man überall $-b$ statt b, so erhalten die Glieder, welche eine ungerade Potenz von b enthalten, das Vorzeichen $-$; die anderen behalten $+$. Man könnte versuchen, aus diesen Formeln ein

allgemeines Gesetz für $(a+b)^n$ herzuleiten (den binomischen Lehrsatz); bequemer geschieht dies aber später; jetzt genügt es, folgende Formeln dem Gedächtniß einzuprägen:

$$\text{I.}\quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

$$\text{II.}\quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Zu ihnen tritt als praktisch wichtig noch hinzu:

$$\text{III.}\quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

d. h. multiplicirt man die Summe zweier Zahlen mit ihrer Differenz, so erhält man die Differenz ihrer Quadrate.

Anmerkung. Addirt man zu beiden Seiten der Formel III. b^2 hinzu, so folgt:

$$a^2 = (a+b)(a-b) + b^2,$$

eine Formel, nach welcher man eine Zahl a bequem im Kopfe quadriren kann, wenn man b so wählt, daß $a+b$ oder $a-b$ mit einer Null endet. z. B.

$$16^2 = (16+4)(16-4) + 4^2 = 20 \cdot 12 + 16 = 256.$$
$$14^2 = (14+4)(14-4) + 4^2 = 18 \cdot 10 + 16 = 196.$$
$$25^2 = (25+5)(25-5) + 5^2 = 30 \cdot 20 + 25 = 625.$$

Zur Uebung.

1) $(1-2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2.$

2) $(1-3x)^3 = 1 - 9x + 27x^2 - 27x^3.$

3) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b.$

4) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b.$

5) $\left(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}\right)^2 = \sqrt{a} - 2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}.$

6) $\left(\frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{2}b^2\right)^2 = \frac{4}{9}a^4 - 2a^2b^2 + \frac{9}{4}b^4.$

7) $\frac{a+b}{a} \cdot \frac{a-b}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}.$

8) $\left(\frac{a}{2} \pm \frac{b}{2}\sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} \mp \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$

9) $\left(\frac{a+x^2}{2x}\right)^2 - \left(\frac{a-x^2}{2x}\right)^2 = a$, eine Formel, welche das Zerlegen einer Zahl a in die Differenz zweier Quadrate auf unendlich viele Arten gestattet.

10) $\sqrt[4]{[b\sqrt{4a^2-c^2} - c\sqrt{4a^2-b^2}]^2 + [bc + \sqrt{(4a^2-b^2)(4a^2-c^2)}]^2} = 2a.$

11) Jede ungerade Zahl kann durch eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl ergänzt werden. z. B. $17 + 64 = 81.$ $11 + 25 = 36.$

Beweis. $(2n+1) + n^2 = (n+1)^2.$

12) Die Summe der Quadrate einer geraden und einer ungeraden Zahl kann immer durch eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl ergänzt werden.

Beweis. $(2n)^2 + (2m+1)^2$ ist eine ungerade Zahl, u. s. w. nach No. 11. z. B. $6^2 + 11^2 + 78^2 = 79^2.$

13) Die Summe der Quadrate zweier ungeraden Zahlen ist nie eine Quadratzahl.

Beweis. $(2n + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 4m^2 + 4m + 2$ ist eine gerade Zahl, folglich könnte sie nur das Quadrat einer geraden Zahl sein, also durch 4 theilbar, und diese Eigenschaft hat sie nach §. 73. 3. nicht.

14) Das Quadrat jeder Primzahl, 2 und 3 ausgenommen, läßt, durch 24 dividirt, den Rest 1.

Beweis. $(6n \pm 1)^2 - 1 = 12n(3n \pm 1)$. Vergl. §. 79. 8. Nun ist einer der beiden Factoren (n und $3n \pm 1$) eine gerade Zahl.

§. 87.

Das Quadrat und der Kubus der mehrgliedrigen Summe.

Die Formeln I. und II. im vorigen §. gestatten eine Erweiterung: man kann eine mehrgliedrige Summe (Polynom) $a + b + c + d + e + ..$ auf das Quadrat und den Kubus erheben. Betrachtet man diese Summe als zweigliedrig (als Binom), a als ersten und $b + c + d + e + ..$ als zweiten Summand, so folgt:

1) $(a + b + c + d + e + \ldots)^2$

$$= a^2 + 2a(b + c + d + e + \ldots) + (b + c + d + e + \ldots)^2$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} a^2 \\ + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + \ldots. \\ + (b + c + d + e + \ldots..)^2 \end{array} \right\}$$

Man bildet also das Quadrat des ersten Summanden, das doppelte Product des ersten Summanden mit jedem folgenden und dann noch das Quadrat der Summen $b + c + d + e + \ldots..$ Da aber diese Summe auf dieselbe Weise quadrirt wird, so kann man in dem obigen Ausdruck nach und nach alle Klammern auflösen und erhält:

$(a + b + c + d + e + \ldots)^2$

$$= \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \ldots. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + \ldots. \\ 2bc + 2bd + 2be + 2bf + \ldots. \\ 2cd + 2ce + \ldots. \\ \qquad\qquad + \text{etc.} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

d. h. das Quadrat einer mehrgliedrigen Summe besteht aus dem Quadrate jedes Summanden und dem doppelten Product je zweier Summanden.

z. B. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

$(a - b + c - d - f)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2af - 2bc + 2bd + 2bf - 2cd - 2cf + 2df.$

2) $(a+b+c+d+e+\ldots)^3$

$$= a^3+3a^2(b+c+d+\ldots)+3a(b+c+d+\ldots)^2+(b+c+d\ldots)^3$$

$$= \left\{\begin{array}{l} a^3 \\ +3a^2b+3a^2c+3a^2d+\ldots \\ +3ab^2+3ac^2+3ad^2+\ldots \\ +6abc+6abd+\ldots+6acd+\ldots \\ +(b+c+d+e+\ldots)^3 \end{array}\right\}$$

Man kubirt also den ersten Summanden, multiplicirt das dreifache Quadrat des ersten Summanden mit jedem folgenden, dann den dreifachen ersten Summanden mit dem Quadrate jedes folgenden, ferner den sechsfachen ersten Summanden mit dem Product je zweier folgenden und bildet schließlich noch den Kubus der Summe

$$b+c+d+e+\ldots$$

Da aber dieser Kubus auf dieselbe Weise gebildet wird, so kann man im vorstehenden Ausdrucke fortfahren, nach und nach alle Klammern aufzulösen, und erhält: $(a+b+c+d+e+\ldots)^3$

$$= \left\{\begin{array}{l} a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+\ldots \\ \left\{\begin{array}{l} +3a^2b+3a^2c+3a^2d+\ldots \\ +3b^2c+3b^2d+3b^2e+\ldots \\ +3c^2d+3c^2e+3c^2f+\ldots \\ +\text{ꝛc.} \end{array}\right\} \\ \left\{\begin{array}{l} +3ab^2+3ac^2+3ad^2+\ldots \\ +3bc^2+3bd^2+3be^2+\ldots \\ +3cd^2+3ce^2+3cf^2+\ldots \\ +\text{ꝛc.} \end{array}\right\} \\ \left\{\begin{array}{l} +6abc+6abd+\ldots+6acd+\ldots \\ +6bcd+6bce+\ldots+6bde+\ldots \\ +6cde+6cdf+\ldots+6cef+\ldots \\ +\text{ꝛc.} \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

d. h. **der Kubus jeder mehrgliedrigen Summe besteht aus dem Kubus jedes Summanden, dem dreifachen Product des Quadrates jedes Summanden mit jedem folgenden, dem dreifachen Product jedes Summanden mit dem Quadrate jedes folgenden und dem sechsfachen Product je dreier Summanden.** z. B.

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2c+3ab^2 +3ac^2+3bc^2+6abc.$$

$$(a-b-c)^3 = a^3-b^3-c^3-3a^2b-3a^2c-3b^2c+3ab^2 +3ac^2-3bc^2+6abc.$$

$$(a-b-c-d)^3 = a^3 - b^3 - c^3 - d^3 - 3a^2b - 3a^2c - 3a^2d - 3b^2c - 3b^2d - 3c^2d + 3ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 - 3bc^2 - 3bd^2 - 3cd^2 + 6abc + 6abd + 6acd - 6bcd.$$

Man kann aber dem Quadrate und dem Kubus der Summe $a+b+c+d+e+\ldots$ auch folgende Form geben:

$$\text{I.}\quad (a+b+c+d+e+\ldots)^2 = \left\{\begin{array}{l} a^2 \\ +2ab+b^2 \\ +(2a+2b)c+c^2 \\ +(2a+2b+2c)d+d^2 \\ +(2a+2b+2c+2d)e+e^2 \\ +\text{rc.} \end{array}\right.$$

$$\text{II.}\quad (a+b+c+d+e+\ldots)^3 = \left\{\begin{array}{l} a^3 \\ +3a^2b+3ab^2+b^3 \\ +3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3 \\ +3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3 \\ +3(a+b+c+d)^2e+3(a+b+c+d)e^2+e^3 \\ +\text{rc.} \end{array}\right.$$

Man beachte, daß die erste Zeile, die beiden ersten Zeilen, die drei ersten Zeilen, die vier ersten Zeilen u. s. w. der rechten Seite in I. immer ein vollständiges Quadrat, in II. immer einen vollständigen Kubus enthalten.

Anmerkung. Um eine nach den Potenzen eines Buchstaben geordnete Summe zu quadriren, ist es bequem, nach dem Quadrate des ersten Summanden die doppelten Producte je zweier Glieder und dann erst die übrigen Quadrate zu bilden. Man erhält so das Resultat gleich geordnet. Eben so verfährt man beim Kubiren, indem man, mit Ausnahme des ersten Gliedes, die Kuben der Glieder zuletzt bildet. Hat die Summe unendlich viele Glieder, so gilt dies auch vom Quadrate und dem Kubus. Man muß in diesem Falle vorausbestimmen, bis zu welcher Potenz des Buchstaben, nach dessen Potenzen die Summe geordnet ist, man rechnen will, darf dann aber auch kein Glied mit einer Potenz dieses Buchstaben innerhalb dieser Grenze fortlassen. Die beiden ersten Beispiele zeigen das Verfahren. In beiden ist bis zur 6ten Potenz vom x gerechnet.

Beispiele zur Uebung.

1) $(1 - 2x + x^2 - 2x^3 + x^4 - 2x^5 + x^6 - + \ldots)^2$

$$\begin{array}{rl} = 1 - 4x + 2x^2 - 4x^3 + 2x^4 - 4x^5 + 2x^6 - \ldots \\ + 4x^2 - 4x^3 + 8x^4 - 4x^5 + 8x^6 - \ldots \\ + x^4 - 4x^5 + 2x^6 - \ldots \\ + 4x^6 - \ldots \\ \hline = 1 - 4x + 6x^2 - 8x^3 + 11x^4 - 12x^5 + 16x^6 - + \ldots \end{array}$$

2) $(1 - 2x + x^2 - 2x^3 + x^4 - 2x^5 + x^6 - + \ldots)^3$

$$\begin{aligned} = 1 - 6x &+ 3x^2 - 6x^3 + 3x^4 - 6x^5 + 3x^6 - \ldots \\ &+ 12x^2 - 12x^3 + 12x^4 - 24x^5 + 12x^6 - \ldots \\ &\qquad - 8x^3 + 3x^4 - 6x^5 + 12x^6 - \ldots \\ &\qquad\qquad + 24x^4 - 12x^5 + 24x^6 - \ldots \\ &\qquad\qquad\qquad - 12x^5 + 6x^6 - \ldots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + 24x^6 - \ldots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + x^6 - \ldots \end{aligned}$$

$$= 1 - 6x + 15x^2 - 26x^3 + 42x^4 - 60x^5 + 82x^6 - \ldots$$

3) $(2 - \sqrt{x} + \frac{1}{2}x)^2 = 4 - 4\sqrt{x} + 3x - x\sqrt{x} + \frac{1}{4}x^2.$

4) $(1 - \sqrt{a} + a)^2 = 1 - 2\sqrt{a} + 3a - 2a\sqrt{a} + a^2.$

5) $(3 - x + \frac{1}{3}x^2)^3 = 27 - 27x + 18x^2 - 7x^3 + 2x^4 - \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{27}x^6.$

6) $(3a^n - 2a^{n+1} + a^{n+2})^2 = 9a^{2n} - 12a^{2n+1} + 10a^{2n+2} - 4a^{2n+3} + a^{2n+4}.$

7) $(2a^{-n} - 1 + 2a^n)^3 = 8a^{-3n} - 12a^{-2n} + 30a^{-n} - 25 + 30a^n - 12a^{2n} + 8a^{3n}.$

8) $\left(\frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2} + 2\sqrt{a}\right)^2 = \frac{4}{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{33}{4} + 2\sqrt{a} + 4a.$

9) $(1 - \sqrt{a})^4 = (1 - 2\sqrt{a} + a)^2 = 1 - 4\sqrt{a} + 6a - 4a\sqrt{a} + a^2.$

10) $(1 - \sqrt[3]{a})^6 = 1 - 6\sqrt[3]{a} + 15\sqrt[3]{a^2} - 20a + 15a\sqrt[3]{a} - 6a\sqrt[3]{a^2} + a^2.$

11) $(1 + 2x + 3x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + x^6 + 2x^7 + 3x^8 + \ldots)^2$
$= 1 + 4x + 10x^2 + 14x^3 + 17x^4 + 20x^5 + 27x^6 + 30x^7 + 30x^8 + \ldots$

12) $(1 + x + x^3 + x^4)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + 4x^3 + 9x^4 + 9x^5 + 6x^6 + 9x^7 + 9x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 3x^{11} + x^{12}.$

13) $(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + - + \ldots)^2$
$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + 7x^6 - 8x^7 + - + \ldots$

14) $(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + - + \ldots)^3$
$= 1 - 3x^2 + 6x^4 - 10x^6 + 15x^8 - 21x^{10} + - + \ldots$

15) Ist $y = 1 + 2x - x^2 + 2x^3$, so folgt:
$y^2 = 1 + 4x + 2x^2 + 9x^4 - 4x^5 + 4x^6$
$y^3 = 1 + 6x + 9x^2 + 2x^3 + 15x^4 + 18x^5 - 13x^6 + 30x^7 - 12x^8 + 8x^9.$

§. 88.

Theilbarkeit der Differenz und Summe zweier Potenzen mit gleichen Exponenten durch die Differenz oder Summe ihrer Dignanden.

Aus der Formel III. in §. 86. folgt: $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$. Diese Gleichung veranlaßt die Untersuchung, ob auch $a^n - b^n$ durch $a - b$

theilbar ist, wenn n eine positive ganze Zahl ist. Durch Division ergiebt sich:

$$\begin{array}{l|l|l} a - b & a^n - b^n & a^{n-1} \\ & a^n - a^{n-1}b & \\ \hline & + a^{n-1}b - b^n. & \end{array}$$

Es ist also:

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b} \cdot b,$$

woraus folgt: ist $a^{n-1} - b^{n-1}$ durch $a - b$ theilbar, so ist es auch $a^n - b^n$. Nun ist aber $a^2 - b^2$ durch $a - b$ theilbar, folglich auch $a^3 - b^3$, daher auch $a^4 - b^4$, $a^5 - b^5$, ꝛc. Die eben gefundene Formel $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b} \cdot b$ giebt aber auch die Quotienten der Division mit $a - b$ in die Differenz gleicher Potenzen von a und b. Es ist

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b, \text{ folglich}$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + (a + b) \cdot b = a^2 + ab + b^2,$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a - b} = a^3 + (a^2 + ab + b^2) \cdot b = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3,$$

$$\frac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4, \text{ u. s. w.}$$

Man hat daher allgemein:

$$\text{I.} \quad \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}.$$

Setzt man $-b$ statt b, so wird in dem Quotienten $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ der Nenner gleich $a + b$; hingegen wird der Zähler nur dann eine Summe, wenn n ungerade ist, bleibt aber eine Differenz, wenn n gerade ist. Rechts bekommen die Glieder, welche ungerade Potenzen von b enthalten, das Vorzeichen $-$, die andern behalten $+$. Setzt man also in I. zunächst 2n statt n, dann auch $2n + 1$ statt n, und endlich noch $-b$ statt b, so folgt:

$$\text{II.} \quad \frac{a^{2n} - b^{2n}}{a + b}$$

$$= a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - a^{2n-4}b^3 + - + \ldots + ab^{2n-2} - b^{2n-1}.$$

$$\text{III.} \quad \frac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a + b}$$

$$= a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - a^{2n-3}b^3 + - + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}.$$

Nach diesen Formeln ist also $a^n - b^n$ für jeden beliebigen ganzen positiven Werth von n durch $a - b$ theilbar, hingegen durch $a + b$ nur dann, wenn n eine gerade Zahl ist; endlich ist $a^n + b^n$ durch $a + b$ nur dann theilbar, wenn n eine ungerade Zahl ist. Namentlich merke man:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b, \qquad \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b,$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2, \quad \frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2.$$

Ferner ist:

$$\frac{a^4 - b^4}{a + b} = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3,$$

$$\frac{a^5 + b^5}{a + b} = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4, \text{ u. s. w.}$$

Beispiele. 1) $\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a^n - b^n} = a^n + b^n$.

2) $\frac{a^{3n} + b^{3n}}{a^n + b^n} = a^{2n} - a^nb^n + b^{2n}$.

3) $\frac{1 + 8x^3}{1 + 2x} = 1 - 2x + 4x^2$.

4) $\frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

5) $\frac{a + b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$.

6) $\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a^3} - a\sqrt{b} + b\sqrt{a} - \sqrt{b^3}$.

7) Eine Anwendung der Formel I. ist folgende Auflösung der Aufgabe: ein Merkmal der Theilbarkeit einer numerischen Zahl

$$B = a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^4 + \ldots.$$

durch eine Zahl α zu finden.

Es sei die positive oder negative Differenz $10 - \alpha = \delta$, so setze man: $10 = (10 - \delta) + \delta$; $10^2 = (10^2 - \delta^2) + \delta^2$; $10^3 = (10^3 - \delta^3) + \delta^3$; u. s. w.

Man erhält dann:

$$B = \left\{ \begin{array}{l} b(10 - \delta) + c(10^2 - \delta^2) + d(10^3 - \delta^3) + e(10^4 - \delta^4) + \ldots. \\ + a + b\delta + \qquad c\delta^2 + \qquad d\delta^3 + \qquad e\delta^4 + \ldots. \end{array} \right.$$

Die Summe in der ersten Zeile ist nach Formel I. immer durch $10 - \delta$, d. h. durch α theilbar, folglich ist B durch α theilbar, wenn

$$a + b\delta + c\delta^2 + d\delta^3 + e\delta^4 + \ldots.$$

durch α theilbar ist. Für $\alpha = 9$ ist $\delta = 1$, für $\alpha = 11$ ist $\delta = -1$, woraus die schon mitgetheilten bekannten Regeln hervorgehen.

Anmerkung. Als eine Anwendung der Formel I. kann man auch den folgenden Satz betrachten:

Wenn eine nach den ganzen positiven Potenzen eines Buchstaben x geordnete algebraische Summe für einen bestimmten Werth von x, etwa für $x = \alpha$, zu Null wird, so ist diese Summe immer durch $x - \alpha$ theilbar.

Beweis. Es bezeichne F diese Summe, und es sei

$$F = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + px^2 + qx + r,$$

so hat man nach der Voraussetzung, wenn man α statt x setzt:

$$0 = a\alpha^n + b\alpha^{n-1} + c\alpha^{n-2} + \ldots + p\alpha^2 + q\alpha + r.$$

Zieht man nun die zweite Gleichung von der ersten ab, so entsteht:

$$F = a(x^n - \alpha^n) + b(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + c(x^{n-2} - \alpha^{n-2}) + \ldots$$
$$+ p(x^2 - \alpha^2) + q(x - \alpha).$$

Die Summe F erscheint jetzt in einer Form, aus der man ihre Theilbarkeit durch $x - \alpha$ unmittelbar erkennt; denn nach der Formel I. ist jeder Summand der Summe F durch $x - \alpha$ theilbar, daher auch die Summe selbst.

Beispiel. $F = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 18$.

Setzt man $x = 2$, so entsteht $F = 24 - 20 + 14 - 18 = 0$. Dividirt man also mit $x - 2$ in $3x^3 - 5x^2 + 7x - 18$, so muß die Division aufgehen; man erhält den Quotienten $3x^2 + x + 9$.

§. 89.

Verwandlung algebraischer Summen in Producte.

Diese Umformung ist eine der wichtigsten der Arithmetik. Das einfachste Hülfsmittel ist die Absonderung des gemeinschaftlichen Coefficienten: $na \pm nb = n(a \pm b)$. Man schreibt jeden gemeinschaftlichen Factor der Glieder vor die Klammern, in welche man die Summe setzt, nachdem man jedes Glied durch jenen Factor dividirt hat. Man kann auf diese Weise selbst dann ein Product erzeugen, wenn die Glieder keinen gemeinschaftlichen Factor haben, z. B. $a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$, und auch diese Umformung kann zuweilen nützlich sein; gewöhnlich aber will man nicht Nenner erzeugen und sagt: $a + b$ läßt sich nicht in Factoren zerlegen.

Folgende Regeln kommen hier zur Anwendung:

I. Haben alle Glieder einen gemeinschaftlichen Factor, so sondert man ihn ab. z. B.

$$ab - bc = b(a - c) = -b(c - a)$$
$$2a^4b^2c^2 + 4a^2b^4c^2 + 6a^2b^2c^4 = 2a^2b^2c^2(a^2 + 2b^2 + 3c^2).$$

II. Haben nicht alle Glieder einen gemeinschaftlichen Factor, so versuche man, immer 2 und 2, oder 3 und 3 rc. Glieder zusammen zu fassen und aus ihnen die gemeinschaftlichen Factoren abzusondern. Man thut dies in der Hoffnung, daß in die Klammern gleiche Ausdrücke kommen werden, die dann wieder abzusondern sind; z. B.

1) $12ac + 3ad - 2bd - 8bc = 3a(4c + d) - 2b(d + 4c)$
$= (4c + d)(3a - 2b)$;

2) $2ab - 2b - 3ad + 3d = 2b(a - 1) - 3d(a - 1)$
$= (a - 1)(2b - 3d)$;

3) $6ad - 4bd + 8cd - 3af + 2bf - 4cf$
$= 2d(3a - 2b + 4c) - f(3a - 2b + 4c)$
$= (3a - 2b + 4c)(2d - f)$.

III. Gestattet die Anzahl der Glieder ein solches Zusammenfassen nicht, z. B. bei 3, 5, 7 Gliedern, so suche man ein Glied in die Summe oder Differenz zweier Glieder zu zerlegen und verfahre nach II. Aufmerksamkeit und Uebung lassen bald erkennen, welches Glied und auf welche Art es zerlegt werden muß; z. B.:

1) $a^2 + 3ab + 2b^2 = a^2 + ab + 2ab + 2b^2$
$= a(a + b) + 2b(a + b) = (a + b)(a + 2b)$.

Das Zerlegen eines Gliedes in eine Differenz hätte hier nicht zum Ziele geführt, weil die Summe dann 3 positive Glieder und ein negatives erhalten hätte. Aus demselben Grunde muß im nächsten Beispiele ab in eine Differenz zerlegt werden.

2) $a^2 + ab - 6b^2 = a^2 + 3ab - 2ab - 6b^2$
$= a(a + 3b) - 2b(a + 3b) = (a + 3b)(a - 2b)$;

3) $15a^2 + 31ab + 14b^2 = (3a + 2b)(5a + 7b)$;
man zerlegt $31ab$ in $21ab + 10ab$.

4) $3a^2 - 2ab + 3a - 8b^2 + 4b = (3a + 4b)(a - 2b + 1)$;
man zerlegt $-2ab$ in $-6ab + 4ab$.

IV. Häufig kann man von der Formel

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Gebrauch machen; auch von folgenden Formeln:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$
$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

z. B. 1) $4a^2 - 4ab + b^2 = (2a - b)^2 = (b - 2a)^2$;
2) $1 + x^3 = (1 + x)(1 - x + x^2)$;
3) $4 - x^2 = (2 + x)(2 - x)$;
4) $8a^3 - 12a^2 + 6a - 1 = (2a - 1)^3$;
5) $4a^2 - 9b^2 = (2a + 3b)(2a - 3b)$;
6) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = a^2 - (b - c)^2$
$= (a + b - c)\, a - b + c)$;
7) $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc = (a + b + c)\, a - b - c)$.

V. Multiplicirt man $x + n$ mit $x + m$, so erhält man die Formel: $x^2 + (n + m)x + nm = (x + n)(x + m)$.

Man nennt eine algebraische Summe von der Form $x^2 + ax + b$ einen nach den fallenden Potenzen von x geordneten quadratischen Ausdruck; daher zeigt die vorstehende Formel die Verwandlung eines solchen Ausdrucks in ein Product, wenn sich der Factor von x (also a) als eine Summe zweier Zahlen und das letzte Glied (b) als das Product derselben Zahlen darstellen läßt. Solche zwei Zahlen (n und m) zu finden, lehrt später die Algebra, und zwar nach Einführung zweier neuer Zahlenformen, der irrationalen und der imaginären Zahl, für ganz beliebige Werthe von a und b. Hier soll nur die Anwendung der oben angegebenen Formel für den Fall dem Leser erläutert und als eine Uebung empfohlen werden, daß sich für n und m durch Probiren ganze oder gebrochene algebraische Zahlen finden lassen, für welche $n + m = a$ und $n \cdot m = b$ ist.

Um $x^2 + ax + b$ in ein Product zu verwandeln, suche man entweder a in eine Summe zweier algebraischen Zahlen zu zerlegen, deren Product gleich b ist, oder man suche b in ein Product zweier algebraischen Zahlen zu zerlegen, deren Summe gleich a ist. Findet man solche Zahlen, sie mögen n und m heißen, so hat man:

$$x^2 + ax + b = (x + n) \cdot (x + m).$$

Das zweite Verfahren wird man vorzugsweise dann anwenden, wenn a und b ganze Zahlen sind, in welchem Falle nach §. 79. Nr. 12. auch n und m ganze Zahlen sein müssen, wenn bei Ausschließung irrationaler und imaginärer Zahlen das Zerlegen in ein Product überhaupt möglich sein soll. Denn das Zerlegen der Zahl b in ein Product ganzer Zahlen gestattet immer nur eine beschränkte Anzahl von Auflösungen, die leicht zu finden sind, während a auf unendlich viele Arten in eine Summe algebraischer ganzer Zahlen zerlegt werden kann.

Beispiel 1. Es sei gegeben: $x^2 + x - 6$. Man kann -6 nur in 4 Producte zerlegen, nämlich:

$$\begin{aligned} -6 &= (-1) \cdot (+6) \\ &= (+1) \cdot (-6) \\ &= (-2) \cdot (+3) \\ &= (+2) \cdot (-3). \end{aligned}$$

Von diesen vier Producten paßt hier $(-2)(+3)$, weil $(-2) + (+3) = +1$ ist; folglich ist $x^2 + x - 6 = (x - 2) \cdot (x + 3)$.

Beispiel 2. Es sei gegeben: $a^2 - 7a + 10$. Auch hier kann das letzte Glied nur in 4 Producte zerlegt werden, von denen $(-2) \cdot (-5)$ das passende ist. Man findet also $a^2 - 7a + 10 = (a - 2)(a - 5)$.

Beispiel 3. $y^2 - 8y + 7 = (x - 1)(x - 7)$. Hier ist 7 nur in $1 \cdot 7$ oder $(-1) \cdot (-7)$ zu zerlegen.

Beispiel 4. $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4}$. Es ist $-\frac{5}{4} = (-1) + (-\frac{1}{4})$, und weil $(-1) \cdot (-\frac{1}{4}) = +\frac{1}{4}$ ist, so folgt:

$$x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = (x - 1)(x - \frac{1}{4}).$$

Beispiel 5. $a^2 - \frac{5}{2}a - 6$. Es ist $-6 = -\frac{12}{2} = (+\frac{3}{2})(-4)$, und weil $(+\frac{3}{2}) + (-4) = -\frac{5}{2}$ ist, so folgt:

$$a^2 - \frac{5}{2}a - 6 = (a + \frac{3}{2}) \cdot (a - 4).$$

Beispiel 6. $x^2 + (a - b)x - ab = (x + a)(x - b)$.

Hat das erste Glied x^2 einen Coefficienten, so sondere man ihn aus dem ganzen Ausdruck ab; z. B.

Beispiel 7. $2x^2 + 3x + 1 = 2(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2})$. Man zerlegt nun $\frac{3}{2}$ in $1 + \frac{1}{2}$, und findet so:

$$2x^2 + 3x + 1 = 2(x + 1)(x + \frac{1}{2}) = (x + 1)(2x + 1).$$

Beispiel 8. $9 - 3a - 2a^2 = -2(a^2 + \frac{3}{2}a - \frac{9}{2})$. Man zerlegt $\frac{3}{2}$ in $-\frac{3}{2} + 3$ und erhält:

$$9 - 3a - 2a^2 = -2(a - \frac{3}{2})(a + 3) = (3 - 2a)(3 + a).$$

Beisp. 9. $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$.

Beisp. 10. $a^2 - 2ab - 8b^2 = (a + 2b)(a - 4b)$.

Beisp. 11. $z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2} = (z - 1)(z - \frac{1}{2})$.

Beisp. 12. $a^2 + 17a + 70 = (a + 10)(a + 7)$.

Beisp. 13. $a^2 + 2a - 99 = (a + 11)(a - 9)$.

Beisp. 14. $a^2 - 2a - 99 = (a - 11)(a + 9)$.

Beisp. 15. $3a^2 + a - 2 = (a + 1)(3a - 2)$.

Beisp. 16. $6a^2 - a - 1 = (3a + 1)(2a - 1)$.

Beisp. 17. $n^2 + 5n + 6 = (n + 2)(n + 3)$.

Beisp. 18. $n^2 + 6n + 5 = (n + 1)(n + 5)$.

§. 90.

Die nächste Anwendung des vorigen §. ist das **Heben eines Bruches**, dessen Zähler und Nenner **algebraische Summen** sind. Man verwandelt Zähler und Nenner in Producte und hebt durch die gemeinschaftlichen Factoren. z. B.:

1) $$\frac{12a^3b - 12a^2b^2}{16a^2b^2 - 16ab^3} = \frac{3a}{4b}.$$

2) $$\frac{8a^2b^2 - 4ab^3}{12a^2b^2 + 6ab^3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a - b}{2a + b}.$$

3) $$\frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 - ab + b^2}{a - b}.$$

4) $$\frac{3bd - 2d - 3bc + 2c}{3b^2 - 3bd - 2b + 2d} = \frac{d - c}{b - d} = \frac{c - d}{d - b}.$$

5) $$\frac{6a^4b - 6a^2b + 12a^2b^3}{8a^3b^2 - 8ab^2 + 16ab^4} = \frac{3a}{4b}.$$

6) $$\frac{2b^2 - b - 1}{2b^2 + 3b + 1} = \frac{b - 1}{b + 1}.$$

7) $\frac{2ac - bc - bd + 2ad}{2ac + 2ad + bc + bd} = \frac{2a - b}{2a + b}$.

8) $\frac{2a - ab - b + 2}{3 + 3a + ab + b} = \frac{2 - b}{3 + b}$.

9) $\frac{2a^2 - ab - 6b^2}{3a^2 - 7ab + 2b^2} = \frac{2a + 3b}{3a - b}$.

10) $\frac{3a - 2 - a^2 + ab - 2b}{5 + 4b - 5a + ab - b^2} = \frac{a - 2}{5 - b}$.

Man zerlege im Zähler: 3a in 2a + a und im Nenner: 4b in 5b — b.

11) $\frac{a^3 + 3a^2b - ac^2 + 3ab^2 + b^3 - bc^2}{4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2} = \frac{a + b}{(c + b - a)(c + a - b)}$.

12) $\frac{6\sqrt[3]{a^2} + 13\sqrt[3]{ab} + 5\sqrt[3]{b^2}}{6\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} - 15\sqrt[3]{b^2}} = \frac{2\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{2\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{b}}$; man zerlege im Zähler $13\sqrt[3]{ab}$ in $3\sqrt[3]{ab} + 10\sqrt[3]{ab}$ und im Nenner $\sqrt[3]{ab}$ in $-9\sqrt[3]{ab} + 10\sqrt[3]{ab}$.

13) $\frac{6\sqrt[3]{a^2} + 7\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{8b^2}}{15\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} - 6\sqrt[3]{b^2}} = \frac{2\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{5\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{b}}$.

14) $\frac{6\sqrt[3]{c^2} + 7\sqrt[3]{cd} + 2\sqrt[3]{d^2}}{8\sqrt[3]{c^2} - 2\sqrt[3]{cd} - 3\sqrt[3]{d^2}} = \frac{3\sqrt[3]{c} + 2\sqrt[3]{d}}{4\sqrt[3]{c} - 3\sqrt[3]{d}}$.

§. 91.

Bestimmung des Werthes eines Bruches, welcher für einen bestimmten Werth eines Buchstaben die Form $\frac{0}{0}$ annimmt.

Multiplicirt man Zähler und Nenner eines Bruches $\frac{x + 7}{x + 2}$ mit $x - 3$, so erhält man $\frac{x + 7}{x + 2} = \frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - x - 6}$. Beide Brüche sind für jeden Werth von x gleich. Setzt man z. B. $x = 1$, so entsteht $\frac{8}{3} = \frac{-16}{-6}$. Setzt man aber $x = 3$, so nimmt der Bruch $\frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - x - 6}$ die Form $\frac{0}{0}$ an, während $\frac{x + 7}{x + 2}$ den Werth 2 erhält. Der Grund ist leicht einzusehen: der Factor $x - 3$, mit welchem man Zähler und Nenner des Bruches $\frac{x + 7}{x + 2}$ multiplicirte, wird 0 für $x = 3$; daher müssen auch Zähler und Nenner für $x = 3$ den Werth 0 erhalten. Der wahre Werth 2 des Bruches verbirgt sich

also unter der Form $\frac{0}{0}$, und man erhält diesen Werth 2 nur dadurch, daß man den Bruch durch $x - 3$ hebt. Hieraus folgt: Nimmt ein Bruch für einen bestimmten Werth eines Buchstaben, etwa für $x = \alpha$, den Werth $\frac{0}{0}$ an, so können wir schließen, daß der Bruch durch einen Factor sich heben läßt, der selbst für $x = \alpha$ zu Null wird. Der einfachste Factor dieser Art ist $x - \alpha$, und durch ihn kann man zunächst den Bruch zu heben suchen. (Vergl. §. 88. Anmerk.) Nimmt der Bruch dann nochmals die Form $\frac{0}{0}$ an, so suche man ihn wieder zu heben.

Beispiele. Welchen Werth hat:

1) $\frac{x^2 + 2x}{x^3 - 3x}$ für $x = 0$? Antwort $-\frac{2}{3}$.

2) $\frac{x^2 + ax - 2a^2}{x^2 - a^2}$ für $x = a$? Antw. $\frac{3}{2}$.

3) $\frac{a^2 + 6a + 9}{a^2 - 9}$ für $a = -3$? Antw. 0.

4) $\frac{2n^2 + n - 3}{6n^2 - 7n + 1}$ für $n = 1$? Antw. 1.

5) $+\sqrt{\frac{2 - x}{4 - x^2}}$ für $x = 2$? Antw. $+\frac{1}{2}$.

6) $\frac{2a^2 - 5a - 12}{a^2 - 5} \cdot \frac{a^2 + 5}{3a^2 - 17a + 20}$ für $a = 4$? Antw. 3.

7) $\frac{4x^2 + 4x - 3}{10x^2 - x - 2}$ für $x = \frac{1}{2}$? Antw. $\frac{8}{9}$. — Man kann durch $x - \frac{1}{2}$ heben; bequemer aber hebt man durch $2x - 1$.

8) $\frac{12x^2 - 17x + 6}{12x^2 + 3x - 9}$ für $x = \frac{3}{4}$? Antw. $\frac{1}{21}$.

9) $\frac{3a^2 - 4ab - 4b^2}{5a^2 + ab - 22b^2}$ für $a = 2b$? Antw. $\frac{8}{21}$.

10) $+\sqrt{\frac{3a^4 - 6a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 + b^4}{2a^4 - 5a^3b + 4a^2b^2 - ab^3}}$ für $a = b$? Antw. $+2$.

§. 92.

Gesetz.

Der Quotient $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ hat für $b = a$ den Werth na^{n-1}, wobei n jede beliebige reelle Zahl sein kann. Diese Behauptung kann man so schreiben:

$$\left(\frac{a^n - b^n}{a - b}\right)_{a=b} = n \cdot a^{n-1}.$$

Beweis. 1) Ist n eine positive ganze Zahl, so folgt der Beweis aus §. 88. I.

2) Ist n eine positive gebrochene Zahl, etwa $n = \frac{p}{q}$, so hat man:

$$\frac{a^{\frac{p}{q}} - b^{\frac{p}{q}}}{a - b} = \frac{(\sqrt[q]{a})^p - (\sqrt[q]{b})^p}{a - b}.$$ Setzt man nun $\sqrt[q]{a} = x$

und $\sqrt[q]{b} = y$, also $a = x^q$ und $b = y^q$, so folgt:

$$\frac{a^{\frac{p}{q}} - b^{\frac{p}{q}}}{a - b} = \frac{x^p - y^p}{x^q - y^q} = \frac{\frac{x^p - y^p}{x - y}}{\frac{x^q - y^q}{x - y}}$$

Jetzt $b = a$ gesetzt, also $y = x$, so erhält man aus 1):

$$\left(\frac{a^{\frac{p}{q}} - b^{\frac{p}{q}}}{a - b}\right)_{a=b} = \frac{px^{p-1}}{qx^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot x^{p-q} = \frac{p}{q}(\sqrt[q]{a})^{p-q} = \frac{p}{q} \cdot a^{\frac{p}{q}-1}.$$

3) Ist n eine beliebige negative Zahl, etwa $n = -m$, so hat man:

$$\frac{a^{-m} - b^{-m}}{a - b} = \frac{b^m - a^m}{a^m b^m (a - b)} = -\frac{1}{a^m b^m} \cdot \frac{a^m - b^m}{a - b}.$$

Setzt man nun $b = a$, so folgt aus 1) und 2):

$$\left(\frac{a^{-m} - b^{-m}}{a - b}\right)_{a=b} = -\frac{1}{a^{2m}} \cdot ma^{m-1} = -m \cdot a^{-m-1}.$$

Beispiele. 1) $\left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}\right)_{a=b} = \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$

2) $\left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}\right)_{a=b} = \frac{3}{2}\sqrt[6]{a}.$ Man setzt $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}}{\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{a - b}}$;

auf dieselbe Weise verfährt man in den folgenden Beispielen.

3) $\left(\frac{1 - \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}\right)_{x=1} = \frac{3}{4}.$

4) $\left(\frac{1 - \sqrt[5]{a^2}}{1 - \sqrt[8]{a^5}}\right)_{a=1} = \frac{16}{25}.$

5) $\left(\frac{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}{\sqrt[5]{a^3} - \sqrt[5]{b^3}}\right)_{a=b=32} = \frac{5}{48}\sqrt[4]{2}.$

6) $\left(\frac{\sqrt[5]{a^4}-\sqrt[5]{b^4}}{\sqrt{a^{-3}}-\sqrt{b^{-3}}}\right)_{a=b} = -\frac{8}{15}a^2\sqrt[10]{a^3}.$

7) $\left(\frac{\sqrt[5]{2}-\sqrt[5]{3x}}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3x}}\right)_{x=\frac{2}{3}} = \frac{4}{5\sqrt[20]{2}}.$

8) $\left(\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{bx}}{\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{bx}}\right)_{x=\frac{a}{b}} = \frac{m}{n}\sqrt[mn]{a^{m-n}}.$

9) $\left(\frac{a^5-b^5}{2a^2-3ab+b^2}\right)_{a=b} = 5a^3$; statt des gegebenen Ausdrucks setze man $\frac{a^5-b^5}{a-b} : (2a-b)$.

10) $\left(\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3-x}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-x}}\right)_{x=1} = \frac{1}{3}\sqrt[6]{32}.$

§. 93.

Addition und Subtraction von Buchstaben-Brüchen.

Um Brüche, deren Zähler und Nenner Buchstabenausdrücke sind, zu addiren und zu subtrahiren, suche man auf ähnliche Weise, wie dies für Zahlen gelehrt wurde, den General-Nenner. Man verwandelt die Nenner so weit in Producte, bis die Factoren nicht mehr zerlegbar sind, und bildet dann den General-Nenner auf folgende Weise: Man schreibt die Factoren eines Nenners neben einander hin und vermehrt dieses Product noch um so viele und um solche Factoren, daß auch alle Factoren des zweiten Nenners, dann auch alle des dritten u. s. w., endlich alle des letzten Nenners vorhanden sind. Nun bringt man alle Brüche auf diesen General-Nenner und dividirt die algebraische Summe der Zähler durch denselben. z. B.

1) $A = \frac{a-2b}{2ab} + \frac{1}{a-b} - \frac{a+b}{a^2-ab}.$

Setzt man $a^2 - ab = a(a-b)$, so erkennt man, daß der General-Nenner $= 2ab \cdot (a-b)$ ist.

$$A = \frac{(a-2b)(a-b) + 2ab - (a+b) \cdot 2b}{2ab(a-b)}$$

$$= \frac{a^2 - 3ab + 2b^2 + 2ab - 2ab - 2b^2}{2ab(a-b)}$$

$$= \frac{a^2-3ab}{2ab(a-b)} = \frac{a-3b}{2b(a-b)}.$$

2) $B = \frac{3a+b}{3a^2-ab} - \frac{2a+3b}{12ab-4b^2} + \frac{3a^2-ab-6b^2}{18a^2b-6ab^2}.$

Um den General-Nenner zu finden, zerlegt man:

$$3a^2 - ab = a(3a - b)$$
$$12ab - 4b^2 = 2 \cdot 2b(3a - b)$$
$$18a^2b - 6ab^2 = 2 \cdot 3ab(3a - b)$$

Gen.-Nenner $= a(3a - b) \times 2 \cdot 2b \times 3 = 12ab(3a - b)$.

$$B = \frac{(3a + b)12b - (2a + 3b)3a + (3a^2 - ab - 6b^2)2}{12ab(3a - b)}$$

$$B = \frac{36ab + 12b^2 - 6a^2 - 9ab + 6a^2 - 2ab - 12b^2}{12ab(3a - b)}$$

$$B = \frac{25ab}{12ab(3a - b)} = \frac{25}{12(3a - b)}.$$

3) $C = \frac{3a - 2b}{6a - 6b} - \frac{4}{9} + \frac{a + 3b}{4a + 4b} - \frac{2a^2 - ab}{9a^2 - 9b^2}.$

Der General-Nenner $= 36 \cdot (a^2 - b^2)$.

$$C = \frac{6(a+b)(3a-2b) - 16(a^2-b^2) + 9(a-b)(a+3b) - 4(2a^2-ab)}{36(a^2 - b^2)}.$$

Man löst nun im Zähler die Klammern auf und schreibt zur bequemen Uebersicht:

$$\begin{array}{r} +18a^2 - 12ab - 12b^2 \\ -16a^2 + 18ab + 16b^2 \\ +\ 9a^2 + 27ab - 27b^2 \\ -\ 8a^2 - \ 9ab \qquad \\ +\ 4ab \qquad \\ \hline 3a^2 + 28ab - 23b^2. \end{array}$$

$$C = \frac{3a^2 + 28ab - 23b^2}{36(a^2 - b^2)}.$$

4) $\frac{8a - 11b}{12ab - 12b^2} - \frac{3}{4a - 4b} + \frac{2a + b}{3a^2 - 3ab} = \frac{2a - b}{3ab}.$

5) $\frac{3a + 2b}{3a - 3b} - \frac{2a - 4b}{4a - 4b} - \frac{a + 12b}{6a - 6b} = \frac{1}{3}.$

6) $\frac{3a + 4b}{3a + b} + \frac{2a - 5b}{9a + 3b} - \frac{6a + 5b}{12a + 4b} = \frac{13}{12} \cdot \frac{2a + b}{3a + b}.$

7) $\frac{a - 2b}{a - 6b} - \frac{2}{3} - \frac{6b - 2a}{3a - 18b} = \frac{a}{a - 6b}.$

8) $\frac{3a^2 + b^2}{4a^2 - 4b^2} + \frac{2a + b}{6b - 6a} - \frac{a - 2b}{6a + 6b} = \frac{1}{4}.$

9) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{8 - 4x} - \frac{1}{8 + 4x} - \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{2x - x^2}.$

10) $\frac{1}{2x + x^2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4 + 2x} - \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{2 - x}.$

11) $\frac{3a}{4a - 4b} - \frac{a^2 + 5ab}{4a^2 - 4b^2} + \frac{2a^2 + ab}{2ab + b^2} = \frac{a}{2b} \cdot \frac{2a + 3b}{a + b}$

12) $\frac{3a}{4b-4a}+\frac{a^2+5ab}{4a^2-4b^2}-\frac{2a^2+ab}{2ab+2b^2}=-\frac{a}{b}$.

13) $\frac{x^2-3xy}{2x^2+y^2}-\frac{6x^3+x^2y}{2x^2y+y^3}+\frac{3x^2}{xy-y^2}=\frac{3x}{x-y}$.

14) $\frac{9a^2+2ab}{12ab-6b^2}-\frac{11a^2+ab}{12a^2-3b^2}-\frac{3a^2}{4ab+2b^2}=0$.

15) $\frac{a}{2b}+\frac{a^2+6ab}{6ab+6b^2}-\frac{4a^2-ab}{6ab-6b^2}+\frac{2a^2+ab}{3a^2-3b^2}=\frac{a}{a+b}$.

16) $\frac{5a}{6b}-\frac{10a^2-17ab}{12ab-6b^2}+\frac{b}{2a-b}=\frac{2a+b}{2a-b}$.

17) $\frac{2a+b}{3a^2-3ab}+\frac{3}{4b-4a}-\frac{4a-b}{12ab-12b^2}=-\frac{a+b}{3ab}$.

18) $\frac{8}{9-9x}-\frac{1}{3-6x+3x^2}+\frac{8}{18+9x}=\frac{2-3x}{(1-x)^2(2+x)}$.

19) $\frac{a+b^2}{ab-b^2-ac+bc}-\frac{a+ab}{a^2-ab+bc-ac}=\frac{a+bc}{(a-c)(b-c)}$.

20) $\frac{128a^2+72ab}{392a^2-49b^2}+\frac{a^2}{7a^2-14ab+7b^2}-\frac{23a}{49a-49b}=\frac{ab^3}{(8a^2-b^2)(a-b)^2}$

21) $\frac{10}{3a^3}-\frac{10}{9a^2}+\frac{10}{27a}-\frac{10}{81+27a}=\frac{10}{a^3(3+a)}$.

22) $\frac{a}{2a-b}-\frac{4ab}{4a^2+4ab-3b^2}=\frac{a}{2a+3b}$.

23) $\frac{a}{2}\cdot\frac{1+b}{1+a^2}+\frac{a+b}{12+12a}+\frac{a-b}{12-12a}-\frac{a+2ab}{6+3a^2}=\frac{a-a^3b}{(1-a^4)(2+a^2)}$

24) $\frac{6a^2+2b^2}{3a^2+3b^2}-\frac{6a^2-b^2}{6a^2-6b^2}+\frac{19a^2b^2+3b^4}{6a^4-6b^4}=\frac{a^2}{a^2-b^2}$.

25) $\frac{9x^2-11y^2}{12x^2-6y^2}-\frac{x^2-y^2}{4x^2+2y^2}-\frac{x^2y^2-7y^4}{12x^4-3y^4}=\frac{x^2}{2x^2+y^2}$.

26) $\frac{2a^2}{6a^2+3b}-\frac{8a^4-3a^2b}{12a^2b-6b^2}-\frac{6a^4-5a^2b}{24a^4-6b^2}+\frac{8a^2}{3b}=\frac{2a^2}{b}$.

27) $\frac{5a^2}{18a^2-6b}-\frac{a^4-a^2b}{6a^2b+2b^2}-\frac{27a^4+a^2b}{54a^4-6b^2}+\frac{7a^2}{6b}=\frac{a^2}{b}$.

28) $\frac{a^2}{2a^2+2b}-\frac{7a^2}{2a^2-2b}+\frac{5a^4+2a^2b}{a^4-b^2}-\frac{2a^2b-a^4}{a^2b+b^2}=\frac{a^4}{(a^2+b)b}$.

29) $\frac{9a-22b}{12a-12b}-\frac{a-2b}{4a+4b}+\frac{2ab}{3a^2+2ab-b^2}-\frac{ab-14b^2}{6a^2-6b^2}$
$=\frac{3a}{2(3a-b)}$.

30) $\frac{a+b}{12a^2+17ab+6b^2}-\frac{a+7b}{12a^2-7ab-12b^2}+\frac{6a-2b}{9a^2-6ab-8b^2}$
$=\frac{2}{3a+2b}$.

§. 94.

Vermischte Uebungs-Aufgaben.

1) $\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}.$

2) $\left(\frac{3b^2}{2a}-\frac{9b^4}{8a^3}+\frac{9b^3}{2a^2}\right)\cdot\left(-\frac{4a^3}{9b^2}\right)=-\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{2}b^2-2ab.$

3) $\left(-\frac{5a^4}{3bc^2}+\frac{5a^4}{12c^2}+\frac{5a^4}{2c}\right):\left(-\frac{5a^3}{6bc^2}\right)=2a-\frac{1}{2}ab-3abc.$

4) $\frac{3ab}{2c}\left(\frac{c}{ab}-\frac{2c}{ab}+\frac{c}{3ab}\right)=-1.$

5) $\frac{a-b}{4}-\frac{6a-3b}{12}-\frac{4b-a}{4}=-b.$

6) $\frac{8ab-8ac}{3b^2-3bc}\cdot\frac{9ab}{16}=\frac{3}{2}a^2.$

7) $\frac{\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b\right):\frac{ab}{12}}{\frac{1}{2b}-\frac{2}{3a}}=12.$

8) $\frac{(\frac{2}{7}:\frac{8}{21}+\frac{5}{18}:\frac{15}{36})\cdot\frac{12}{5}}{(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\frac{3}{4})\cdot\frac{18}{10}}:\frac{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}{\frac{5}{8}-\frac{10}{12}}=\frac{17}{27}.$

9) $1-\frac{a-b}{a+b}=\frac{2b}{a+b}.$

10) $1+\frac{a+b}{a-b}=\frac{2a}{a-b}.$

11) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{(a-b)^2}{ab}.$

12) $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2.$

13) $(1-x)^2+4x=(1+x)^2.$

14) $(n+m)^2-(n-m)^2=4nm.$

15) $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a.$

16) $\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b.$

17) $\left(a^{\frac{2}{3}}b^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{b}{\sqrt[3]{a}}.$

18) $8^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=1.$

19) $\left(\frac{a^2b}{c^{-1}}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{c^0}{a^9b^3}\right)^{-1}=\left(\frac{a}{c}\right)^3.$

20) $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}=1.$

21) $\frac{2-3x+x^2}{1-2x-x^2}+\frac{x+3x^2}{x^2+2x-1}=2.$

22) $\frac{2a-4b}{3a-3b}-\frac{b^2-5ab}{6a^2-6ab}-\frac{1}{2}=\frac{a+b}{6a}.$

23) $\frac{x^3-x^5-x^7+x^9}{x^3-x^4-x^5+x^6}=1+x+x^2+x^3.$

Dieses Beispiel zeigt, wie auch eine falsche Rechnung einmal ein richtiges Resultat geben kann. Dividirt man jedes Glied des Zählers durch das ebensovielte Glied des Nenners, so entsteht auch das richtige Resultat.

24) $\left(\frac{3b}{2a^4}-\frac{c}{a}-\frac{6a^2c^2}{b}\right)\cdot\left(\frac{b}{2a^4}+\frac{c}{3a}-\frac{2a^2c^2}{b}\right)$
$=\frac{3b^2}{4a^8}-\frac{19c^2}{3a^2}+\frac{12a^4c^4}{b^2}.$

25) $\left(\frac{6}{b^2}-\frac{23}{2}f^2+\frac{1}{6}b^2f^4\right):\left(\frac{3}{b}+\frac{9}{2}f+\frac{1}{2}bf^2\right)=\frac{2}{b}-3f+\frac{1}{3}bf^2.$

26) $\left(\frac{a^6}{3b^4}-\frac{112}{9}b^4+\frac{4b^{12}}{27a^6}\right):\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a^3}{b^2}+4b^2-\frac{4}{9}\cdot\frac{b^6}{a^3}\right)$
$=\frac{a^3}{2b^2}-3b^2-\frac{1}{3}\,\frac{b^6}{a^3}.$

27) $A=\frac{\frac{3a-6b}{4}-\frac{a-9b}{6}}{\frac{a}{a-2b}-\frac{2b}{a+2b}}\cdot\frac{a+\frac{4b^2}{a}}{\frac{7a}{8b}-\frac{7b}{2a}}.$

Aufl. Zähler und Nenner des 2ten Bruches mit 8ab multiplicirt:

$$A=\frac{\frac{9a-18b-2a+18b}{12}}{\frac{a^2+2ab-2ab+4b^2}{a^2-4b^2}}\cdot\frac{8b(a^2+4b^2)}{7\cdot(a^2-4b^2)}$$

$$=\frac{7}{12}a\cdot\frac{a^2-4b^2}{a^2+4b^2}\cdot\frac{8}{7}b\cdot\frac{a^2+4b^2}{a^2-4b^2}=\frac{2}{3}ab.$$

28) $B=\frac{\frac{2}{3}ab-\frac{3}{4}b^2}{\frac{5}{6}a-\frac{8}{9}b}:\frac{\frac{2}{3b}-\frac{3}{4a}}{\frac{5}{6bc}-\frac{8}{9ac}}.$

Aufl. Multiplicirt man Zähler und Nenner des ersten Bruches mit 36 und des zweiten mit 36abc, so entsteht:

$$B=\frac{24ab-27b^2}{30a-32b}:\frac{24ac-27bc}{30a-32b}=\frac{3b(8a-9b)}{3c(8a-9b)}=\frac{b}{c}.$$

Noch schneller erhält man das Resultat, wenn man nur Zähler und Nenner des zweiten Bruches mit abc multiplirt.

29) $\frac{\frac{3a+2b}{4a}-\frac{5a+6b}{8b}}{\frac{2}{1-a}+\frac{2}{1+a}}:\frac{\frac{b}{2a}-\frac{5a}{8b}}{4+4a^2}=1-a^4.$

30) $\dfrac{\frac{3}{4}a - \frac{2}{3}b}{\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}b} : \dfrac{\frac{3}{2b} - \frac{4}{3a}}{\frac{2}{3} - \frac{b}{2a}} = \frac{1}{2}b.$

31) $\dfrac{\frac{a-3b}{3} + \frac{a+4b}{4}}{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}} \cdot \dfrac{6b}{7a+7b} = \dfrac{a-b}{8}.$

32) $\dfrac{\frac{a}{4} - \frac{b}{3}}{\frac{a}{6} - \frac{b}{5}} \cdot \dfrac{\frac{5a}{2} - 3b}{\frac{a}{4} + \frac{b}{3}} = 15 \cdot \dfrac{3a-4b}{3a+4b}.$

33) $\dfrac{\frac{3a-2b}{4} - \frac{2a-3b}{6}}{\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}} : \dfrac{5a^3 - 5ab^2}{12a^2 + 12b^2} = \dfrac{1}{2}.$

34) $\dfrac{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{3}b^2}{\frac{5}{6}a + \frac{5}{9}b} : \dfrac{\frac{3}{8}a - \frac{1}{4}b}{\frac{3}{5}a - \frac{11}{60}a} = a.$

35) $\dfrac{\frac{2a+6b}{3} + \frac{3a-8b}{4}}{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}} : \dfrac{34a^3 - 34ab^2}{24a^2 + 24b^2} = 1.$

36) $\dfrac{\frac{2}{3}a - \frac{1}{5}b}{\frac{3}{4}a - \frac{1}{10}b} : \dfrac{70a - 21b}{\frac{5}{2}a - \frac{1}{3}b} = \dfrac{2}{63}.$

37) $\dfrac{\frac{2-a}{3} - \frac{1-3a}{9}}{\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a}} : \dfrac{\frac{5}{2a} - \frac{5a}{2}}{9 + \frac{9b}{a}} = a + b.$

38) $\dfrac{\frac{3}{c} - \frac{4}{b}}{\frac{5}{b} - \frac{6}{a}} : \dfrac{\frac{b}{a} - \frac{4c}{3a}}{\frac{5a}{2b} - 3} = \dfrac{3a^2}{2bc}.$

39) $\dfrac{\frac{3a+3b}{2b} - \frac{5a+6b}{4b}}{\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b}} \cdot \dfrac{4a + \frac{4b^2}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} = \dfrac{a^2+b^2}{2b}.$

40) $\dfrac{(a+1)^2}{a^2-1} + \dfrac{a^2-1}{(a+1)^2} = 2 \cdot \dfrac{a^2+1}{a^2-1}.$

41) $\dfrac{(a+1)^2}{a^2-1} - \dfrac{a^2-1}{(a+1)^2} = \dfrac{4a}{a^2-1}.$

42) $h - \dfrac{2a^2+h^2}{3a^2+h^2} \cdot \dfrac{h}{2} = \dfrac{4a^2+h^2}{3a^2+h^2} \cdot \dfrac{h}{2}.$

43) $\dfrac{a^2+h^2}{2h} - \dfrac{4a^2+h^2}{3a^2+h^2} \cdot \dfrac{h}{2} = \dfrac{3a^4}{2h(3a^2+h^2)}.$

44) $(a^2+b^2)cd \pm (c^2+d^2)ab = (ac \pm bd)(ad \pm bc).$

45) $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2).$

46) $\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}.$

47) $+\sqrt{\left(a+\frac{b^2}{2a-2b}\right)^2-\left(b+\frac{b^2}{2a-2b}\right)^2} = +a.$ (§. 89. IV.)

48) $+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{\left(\frac{2a^2b}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{2ab^2}{a^2+b^2}\right)^2}$

$= +\sqrt{a^2+b^2}+\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

49) $\sqrt{\left(\frac{a^4b^2}{a^2+b^2}\right)^2-\left(\frac{a^2b^4}{a^2+b^2}\right)^2}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{(a^2b^2)^4}+\frac{2}{(a^2b^2)^3}} = \sqrt{a^2-b^2}.$

50) $\frac{a^3+3a^2c+3ac^2+c^3-ab^2-b^2c}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4} = \frac{a+c}{(a+b-c)(b+c-a)}.$

Zerlegt man im Nenner etwa $2b^2c^2$ in $4b^2c^2-2b^2c^2$, so wird der Nenner: $4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2$.

51) Was wird aus den beiden Ausdrücken $\frac{3-4a+a^2}{3+a^2}$ und $\frac{a+a^2}{3+a^2}$, wenn man in den ersten Ausdruck $\frac{3}{a}$ statt a setzt, in den zweiten aber $3\cdot\frac{a+1}{a-3}$ statt a?

Antw. Beide Ausdrücke bleiben unverändert.

52) Was wird aus den beiden Ausdrücken $\frac{3-4a+a^2}{3+a^2}$ und $2\cdot\frac{3+a}{3+a^2}$, wenn man $3\cdot\frac{a+1}{a-3}$ statt a setzt?

Antw. Aus jedem beider Ausdrücke wird der andere.

Fünftes Kapitel.

Die Decimalbrüche. Die Kettenbrüche.

1) Die Decimalbrüche.

§. 95.

Erklärung.

Ein Bruch, dessen Zähler eine ganze Zahl und dessen Nenner eine ganze positive Potenz von 10 ist, also 10, 100, 1000, ... 10^n, heißt ein zehntheiliger oder Decimalbruch. Gewöhnlich schreibt man nur den Zähler des Bruches hin und deutet den Nenner durch ein Komma (das Decimal-Komma) an, durch welches man vom Zähler so viel Ziffern von rechts nach links abschneidet, als der Nenner Nullen hat. Reichen dazu die Ziffern des Zählers nicht aus, so

hängt man links so viel Nullen an, daß auch vor dem Komma eine Null steht. z. B. $\frac{27}{10} = 2{,}7$; $\frac{3405}{100} = 34{,}05$; $\frac{2434178}{10000} = 243{,}4178$; $\frac{3}{100} = 0{,}03$; $\frac{9}{10} = 0{,}9$; $\frac{124}{1000} = 0{,}124$. Die allgemeine Form jedes Decimalbruches ist also: $\frac{a}{10^n}$ $(= a \cdot 10^{-n})$. Die Ziffern hinter dem Komma heißen die Decimalziffern, und jede nimmt eine Decimalstelle (die 1ste, 2te, 3te, u. s. w.) ein. Steht vor dem Komma eine Null, so ist der Decimalbruch echt, im andern Falle unecht.

§. 96.

Folgerungen.

1) Um einen Decimalbruch zu lesen, denkt man sich das Komma fort und hat dann den Zähler; der Nenner ist eine 1 mit so vielen Nullen, als Decimalstellen sind; z. B. $34{,}245 = \frac{34245}{1000}$. Will man einen unechten Decimalbruch in eine gemischte Zahl verwandeln, so giebt die Zahl vor dem Komma die Ganzen an; die Zahl hinter dem Komma ist der Zähler des echten Decimalbruches, dessen Nenner der des gegebenen Bruches ist. z. B. $34{,}245 = 34 + \frac{245}{1000} = 34 + 0{,}245$. Der Grund ist leicht einzusehen. Zerlegt man nämlich den Zähler des gegebenen Bruches in zwei Summanden, so daß die Zahl hinter dem Komma der eine Summand ist, so ist der andere die Zahl vor dem Komma mit so vielen angehängten Nullen, als der Nenner Nullen hat; diese Nullen heben sich also fort, wenn man jeden Summand durch den Nenner dividirt. Also:

$$34{,}245 = \frac{34245}{1000} = \frac{34000 + 245}{1000} = 34 + \frac{245}{1000}.$$

2) Der echte Decimalbruch ist eine Summe von Zehnteln, Hunderteln, Tausenteln u. s. w., und zwar enthält die erste Decimalstelle die Zehntel, die zweite die Hundertel u. s. w. Zum Beweise schreibe man den Zähler, der eine numerische Zahl ist, als eine nach den fallenden Potenzen von 10 geordnete Summe und dividire jedes Glied durch den Nenner; z. B. $0{,}4367 = \frac{4367}{10000} = \frac{4000 + 300 + 60 + 7}{10000}$ $= \frac{4}{10} + \frac{3}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{7}{10000} = 0{,}4 + 0{,}03 + 0{,}006 + 0{,}0007.$

3) Jeder Decimalbruch ist also, wie die numerische Zahl, eine

nach den fallenden Potenzen von 10 geordnete Summe; nur enthält diese Summe auch negative Potenzen von 10, deren Coefficienten die Decimalziffern sind, und so erscheint der Decimalbruch als eine Erweiterung der numerischen Zahl; z. B. $243{,}4165 = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}$. (Hierin liegt der Grund des bequemen und leichten Rechnens mit Decimalbrüchen.) Die Einheit jeder Decimalstelle ist der zehnte Theil der Einheit der vorhergehenden Stelle, und dies gilt auch von den Zehnteln in Bezug auf die Einer.

4) Ein Decimalbruch bleibt unverändert, wenn man rechts beliebig viele Nullen anhängt. z. B. $2{,}47 = 2{,}4700$. Man hat dann nur Zähler und Nenner mit derselben Potenz von 10 multiplicirt.

5) Ein Decimalbruch wird mit 10, 100, ... 10^n multiplicirt, oder durch eine solche Potenz von 10 dividirt, wenn man das Komma um 1, 2, ... n Stellen bezüglich nach rechts, oder links rückt, z. B.

1) $100 \times 0{,}3047 = 30{,}47$.
2) $10000 \times 0{,}24 = 2400$.
3) $83{,}214 : 10 = 8{,}3214$.
4) $3{,}1 : 1000 = 0{,}0031$.

Beweis. $\frac{a}{10^n} \cdot 10^m = \frac{a}{10^{n-m}}$ oder $= a \cdot 10^{m-n}$, wie im Beispiel 2. Ferner $\frac{a}{10^n} : 10^m = \frac{a}{10^{n+m}}$.

§. 97.

Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Decimalbruch.

1) 10^n hat nur die einfachen Theiler 2 und 5; folglich kann nur derjenige Bruch in einen Decimalbruch (vollständig) verwandelt werden, dessen Nenner nur die Primfactoren 2 und 5 hat. Man multiplicirt dann Zähler und Nenner mit so vielen Zweien oder Fünfen, bis der Nenner gleich viele Zweien und Fünfen hat, also eine Potenz von 10 ist; z. B.

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{10^3} = 0{,}375.$$

$$\frac{32}{25} = \frac{32}{5 \cdot 5} = \frac{32 \cdot 2 \cdot 2}{10^2} = 1{,}28.$$

$$\frac{3}{40} = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{10^3} = 0{,}075.$$

$$\frac{3}{500} = \frac{3}{10 \cdot 10 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 2}{10^3} = 0{,}006.$$

Der Nenner jedes hierher gehörigen Bruches ist auf die Form $2^n \cdot 5^m$ zu bringen, und der Decimalbruch, welcher aus ihm entsteht, hat dann genau n, oder m Decimalstellen, je nachdem n, oder m die größere beider Zahlen ist.

2) Hat aber der Nenner andere, oder doch auch andere Primfactoren, so kann die Verwandlung in einen Decimalbruch nur annähernd so geschehen: Man multiplicirt den Zähler mit einer beliebigen Potenz von 10, dividirt das Product durch den Nenner und dann noch den Quotienten, also auch den ergänzenden Bruch-Rest, durch jene Potenz von 10; z. B.

$$\frac{3}{7} = \frac{300000}{7} : 100000$$

$$= \left(42857 + \frac{1}{7}\right) : 100000 = 0{,}42857 + \frac{\frac{1}{7}}{100000}.$$

Da der Rest (hier $\frac{1}{7}$) immer < 1 ist, so ist der zweite Summand immer kleiner, als die Einheit der letzten (hier 5ten) Decimalstelle, und man sagt daher, es sei $\frac{3}{7}$ auf 5 Decimalstellen genau in einen Decimalbruch verwandelt, nämlich allgemein auf so viele Decimalstellen, als Nullen angehängt wurden. Praktisch führt man die Rechnung in bequemerer Form aus. Es sei z. B. $\frac{739}{34}$ gegeben, so ist:

$$\frac{739}{34} = \frac{739{,}0}{34} = \frac{739{,}00}{34} = \frac{739{,}000}{34} \text{ u. s. w.}$$

Dividirt man nun mit 34 in den Zähler, indem man sich das Komma fort denkt, so hat man in den mit einer Potenz von 10 multiplicirten Zähler dividirt; also muß man nachher durch diese Potenz noch dividiren, d. h. so viel Decimalstellen von rechts nach links abschneiden, als Nullen an den Zähler gehängt wurden. Es ergeben sich folgende Divisionen:

```
34 | 739 | 21          34 | 739,0 | 21,7
     68                     68
     --                     --
      59                     59
      34                     34
      --                     ---
      25                     250
                             238
                             ---
                              12
```

```
34 | 739,00 | 21,73        34 | 739,000 | 21,735
     68                         68
     59                         59
     34                         34
     250                        250
     238                        238
      120                        120
      102                        102
       18                         180
                                  170
                                   10
```

und läßt man die Reste fort, so erhält man die Resultate:

21; 21,7; 21,73; 21,735.

Nun ist aber jede Division die Fortsetzung der vorhergehenden; daher braucht man die Nullen gar nicht anfänglich anzuhängen, sondern man dividirt wie gewöhnlich, und wenn dann die Ziffern des Zählers erschöpft sind, setzt man hinter die letzte Ziffer des Quotienten das Komma, hängt an den Rest eine Null, dividirt weiter, hängt an den neuen Rest wieder eine Null und fährt so beliebig weit fort. Nur wenn der Bruch echt ist, würde man gleich anfänglich eine oder mehrere Nullen anhängen müssen; z. B. $\frac{7045}{26}$ und $\frac{11}{555}$ sind gegeben:

```
26 | 7045 | 270,9615....      555 | 11,00 | 0,0198198....
     52                              555
     184                             5450
     182                             4995
      250                             4550
      234                             4440
       160                             1100
       156                              555
        40                              5450
        26                              4995
        140                              4550
        130                              4440
         10                               110
```

3) Hiermit ist aber auch die Regel gewonnen, nach welcher man einen Decimalbruch durch eine ganze Zahl dividirt. Man verfährt wie bei ganzen Zahlen, muß aber in den Quotienten das Decimal-

Komma setzen, sobald man die erste Decimalstelle in die Rechnung zieht; z. B.

$$\frac{24,349}{11} = 2,213545454\ldots.$$

$$\frac{0,0478}{21} = 0,00227619\ldots.$$

$$\frac{2,4713}{402} = 0,00614751\ldots.$$

§. 98.

Der periodische Decimalbruch.

Der vorige §. lehrt, wie man durch Verwandlung eines Quotienten zu einem Decimalbruche von unendlich vielen Decimalstellen gelangen kann. Ein solcher ist eine Summe von unendlich vielen Gliedern, welche sich nach und nach ohne Aufhören der Null nähern, also zuletzt unendlich klein werden. Sind nämlich a, b, c u. s. w. die Decimalziffern, und denken wir uns den Bruch echt, so hat er die Form:

$$\frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{d}{10^4} + \frac{e}{10^5} + \ldots. \text{ in infinit.}$$

Da nun der Zähler jedes Gliedes kleiner als 10 ist, die Nenner aber Potenzen mit wachsenden Exponenten sind, so werden die Nenner zuletzt unendlich groß, die Glieder selbst also unendlich klein.

Das Beispiel im vorigen §.: $\frac{11}{555} = 0,0198198\ldots$ zeigt einen solchen Decimalbruch, in welchem eine Anzahl Decimalziffern (198) in derselben Ordnung und ohne Unterbrechung fortwährend wiederkehren. Ein solcher Decimalbruch wird ein periodischer genannt, und die immer wiederkehrenden Ziffern (198) bilden die Periode. Beginnt die erste Periode unmittelbar hinter dem Komma, so heißt der Bruch ein vollständig- oder rein-periodischer Decimalbruch; beginnt sie erst später: ein unvollständig- oder unrein-periodischer (auch gemischt-periodischer) Decimalbruch. Rein-periodische Decimalbrüche sind z. B. 0,3333....; 4,231 231 231....; 0,012 012 012....; unrein-periodische 0,43333....; 4,127 213 213 213....; 0,0 12 12 12 12....

Bezeichnet a die als ganze Zahl zu betrachtende Periode eines echten vollständig-periodischen Decimalbruches und 10^n den zur ersten Periode gehörigen Nenner, so hat die zweite Periode den Nenner 10^{2n}, die dritte 10^{3n}, u. s. w.; daher hat dieser Bruch selbst die Form:

$$\frac{a}{10^n} + \frac{a}{10^{2n}} + \frac{a}{10^{3n}} + \frac{a}{10^{4n}} + \ldots..$$

z. B. $0{,}021\,021\,021\,021\ldots = \frac{21}{10^3} + \frac{21}{10^6} + \frac{21}{10^9} + \frac{21}{10^{12}} + \ldots$

Ist der echte Bruch ein unvollständig-periodischer, bezeichnet a wieder jede Periode, b aber die ganze Zahl, welche mit den Ziffern vom Komma bis zum Anfange der ersten Periode geschrieben wird (gewöhnlich die vor-periodischen Decimalziffern genannt); ist ferner 10^m der zu b, und 10^{m+n} der zur ersten Periode gehörige Nenner: so hat der Bruch selbst die Form:

$$\frac{b}{10^m} + \frac{a}{10^{m+n}} + \frac{a}{10^{m+2n}} + \frac{a}{10^{m+3n}} + \ldots..$$

z. B. $0{,}21\,314\,314\,314\ldots = \frac{21}{10^2} + \frac{314}{10^5} + \frac{314}{10^8} + \frac{314}{10^{11}} + \ldots$

§. 99.

Lehrsatz.

Jeder gewöhnliche Bruch $\frac{a}{b}$, den wir uns gehoben und echt denken können, giebt, wenn er sich nicht vollständig in einen Decimalbruch verwandeln läßt, annähernd in einen solchen verwandelt, immer einen periodischen Decimalbruch, dessen zweite Periode spätestens in der bten Decimalstelle beginnt.

Beweis. Bei der Division mit b in a, Behufs der Umformung in einen Decimalbruch, muß jeder Rest $< b$ sein; es können also höchstens $b-1$ verschiedene Reste bleiben. Nun ist a selbst einer dieser Reste, und nehmen wir an, daß alle übrigen $b-2$ Reste vorkommen, so müssen doch diese nach $b-2$ Partial-Divisionen erschöpft ein, so daß der Rest, welcher bei der $b-1$ten Partial-Division bleibt, entweder a selbst, oder einer der andern Reste ist. Jetzt, wie vorher, hängt man nun an diesen Rest eine Null an; folglich muß die ganze weitere Division werden wie vorher, d. h. es muß spätestens mit der bten Decimalstelle die Periode zum erstenmal wiederkehren. Kommen alle $b-1$ Reste vor, so muß nothwendig a der letzte sein, und dann entsteht ein rein-periodischer Decimalbruch, dessen Periode gerade $b-1$ Ziffern hat; dieser Fall findet z. B. bei $\frac{3}{7}$ Statt. Man erhält:

$$\frac{3}{7} = 0{,}428571\,428571\,428571\ldots..$$

Ferner ist $\frac{1003}{1850} = 0{,}54\,216\,216\,216\ldots$; $\frac{3}{44} = 0{,}06\,81\,81\,81\ldots$

§. 100.

Verwandlung eines periodischen Decimalbruches in einen gewöhnlichen (gemeinen) Bruch.

Wir setzen echte Decimalbrüche voraus, weil die Ganzen immer von dem Decimalbruche getrennt werden können.

1) Der Decimalbruch sei vollständig-periodisch.

Man dividire die erste Periode (als ganze Zahl betrachtet) durch den um 1 verminderten zugehörigen Nenner; z. B.

$$0{,}27\,27\,27\ldots = \frac{27}{100-1} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

$$0{,}33333\ldots = \frac{3}{10-1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$6{,}021\,021\,021\ldots = 6 + \frac{21}{1000-1} = 6\frac{21}{999} = 6\frac{7}{333}.$$

Beweis. Es sei $A = 0{,}27272727\ldots..$

Man multiplicire beide Seiten der Gleichung mit einer solchen Potenz von 10, daß das Decimal-Komma hinter die letzte Ziffer der ersten Periode rückt; so entsteht:

$$100 \cdot A = 27 + 0{,}27272727\ldots.. \text{ (§. 96. 1).}$$

Der zweite Summand rechts ist wieder A (vergl. §. 98.), und zieht man also von beiden Seiten A ab, so folgt

$$(100-1)\,A = 27 \text{ oder, durch } 100-1 \text{ dividirt:}$$

$$A = \frac{27}{100-1}.$$

Allgemein wäre der Beweis so zu führen:

$$A = \frac{a}{10^n} + \frac{a}{10^{2n}} + \frac{a}{10^{3n}} + \ldots.., \text{ mit } 10^n \text{ multiplicirt:}$$

$$10^n \cdot A = a + \frac{a}{10^n} + \frac{a}{10^{2n}} + \frac{a}{10^{3n}} + \ldots.., \text{ aber}$$

$$A = \frac{a}{10^n} + \frac{a}{10^{2n}} + \frac{a}{10^{3n}} + \ldots.., \text{ subtrahirt:}$$

$$(10^n - 1)\,A = a, \text{ folglich } A = \frac{a}{10^n - 1}.$$

Da $10^n - 1$ nicht durch 2 und 5 theilbar sein kann (§. 73. 3), so giebt ein gehobener Bruch, dessen Nenner 2 oder 5 zu Theilern hat, nie einen rein periodischen Decimalbruch.

2) Der Decimalbruch sei unvollständig-periodisch.

Man betrachte die Ziffern vom Komma bis zum Ende der ersten Periode, dann auch die Ziffern vom Komma bis zum Anfange

derselben als Ziffern zweier ganzen Zahlen, ziehe diese von einander ab und dividire die Differenz durch die Differenz der zugehörigen Nenner; z. B.:

$$0{,}6\,351\,351\,351\,351\ldots = \frac{6351-6}{10000-10} = \frac{6345}{9990} = \frac{47}{74}$$

$$0{,}23333\ldots = \frac{23-2}{100-10} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$$

$$0{,}636666\ldots = \frac{636-63}{1000-100} = \frac{573}{900} = \frac{191}{300}$$

$$4{,}2083333\ldots = 4 + \frac{2083-208}{10000-1000} = 4 + \frac{1875}{9000} = 4\frac{5}{24}$$

$$0{,}0045\,45\,45\ldots = \frac{45}{10000-100} = \frac{45}{9900} = \frac{1}{220}.$$

Beweis. Es sei $A = 0{,}\ 6351351351\ldots\ldots$ Man multiplicire diese Gleichung zuerst mit einer solchen Potenz von 10, daß das Komma hinter die letzte Ziffer der ersten Periode rückt, und dann mit einer solchen Potenz von 10, daß das Komma vor die erste Ziffer der ersten Periode rückt, und ziehe beide Gleichungen von einander ab; so entsteht:

$$\begin{aligned} 10000\,A &= 6351 + 0{,}351351351\ldots\ldots \\ 10\,A &= 6 + 0{,}351351351\ldots\ldots, \text{ subtrahirt:} \\ \hline (10000-10)\,A &= 6351 - 6; \text{ folglich} \end{aligned}$$

$$A = \frac{6351-6}{10000-10} = \frac{6345}{9990} = \frac{47}{74}.$$

Bei der in §. 98. am Schlusse angegebenen Bezeichnung hat man den Beweis allgemein so:

$$A = \frac{b}{10^m} + \frac{a}{10^{m+n}} + \frac{a}{10^{m+2n}} + \frac{a}{10^{m+3n}} + \ldots$$

Mit 10^{m+n} und dann mit 10^m multiplicirt, dann subtrahirt:

$$\begin{aligned} 10^{m+n}\cdot A &= b\cdot 10^n + a + \frac{a}{10^n} + \frac{a}{10^{2n}} + \frac{a}{10^{3n}} + \ldots\ldots \\ 10^m\cdot A &= b + \frac{a}{10^n} + \frac{a}{10^{2n}} + \frac{a}{10^{3n}} + \ldots\ldots \\ \hline (10^{m+n} - 10^m)\,A &= (b\cdot 10^n + a) - b, \text{ folglich} \end{aligned}$$

$$A = \frac{(b\cdot 10^n + a) - b}{10^{m+n} - 10^m}.$$

Der Nenner kann $10^m\cdot(10^n - 1)$ geschrieben werden; folglich endet er mit so vielen (m) Nullen, als der ersten Periode Decimalziffern vorangehen. Da nun der Zähler nicht mit einer Null enden kann, so läßt sich der entstandene Bruch nie durch 10, 100 u. s. w.

heben; wohl aber kann er sich durch eine Potenz von 2 allein, oder durch eine Potenz von 5 allein heben lassen. Da ferner $10^n - 1$ weder durch 2, noch durch 5 theilbar ist, so folgt: Der Nenner jedes gehobenen Bruches, welcher einen unrein-periodischen Decimalbruch giebt, muß genau die 2, oder die 5, oder auch die 10 so oft als Factor enthalten, als der ersten Periode Decimalstellen vorangehen. Es ist z. B. $\frac{17}{240} = \frac{17}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5}$; verwandelt man also $\frac{17}{240}$ in einen Decimalbruch, so muß die erste Periode mit der 5ten Decimalziffer beginnen. Es entsteht:

$$\frac{17}{240} = 0{,}070833333\ldots..$$

Anmerkung. Faßt man das am Schlusse von No. 1) und von No. 2) Gesagte zusammen, so ergiebt sich mit Rücksicht auf den Lehrsatz in §. 99. Folgendes:

1) Jeder Bruch, dessen Nenner weder 2, noch 5 als Primfactor enthält, giebt, in einen Decimalbruch verwandelt, immer einen rein-periodischen Decimalbruch.

2) Jeder gehobene Bruch, der neben andern Primfactoren auch die 2 oder die 5 oder beide Zahlen als Primfactoren enthält, giebt, in einen Decimalbruch verwandelt, stets einen unrein-periodischen Decimalbruch. Kommt 2 im Nenner nmal und 5 mmal als Primfactor vor, so enthält der Decimalbruch genau n, oder m vor-periodische Decimalziffern, je nachdem n, oder m die größere beider Zahlen ist. Ist n = m, so ist auch die Anzahl der vor-periodischen Decimalziffern gleich n; z. B.:

$$\frac{79}{33} = \frac{79}{3\cdot11} = 2{,}39393939\ldots$$

$$\frac{79}{44} = \frac{79}{2\cdot2\cdot11} = 1{,}79545454\ldots.$$

$$\frac{79}{55} = \frac{79}{5\cdot11} = 1{,}4363636\ldots..$$

$$\frac{79}{120} = \frac{79}{2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5} = 0{,}6583333\ldots.$$

$$\frac{79}{150} = \frac{79}{2\cdot3\cdot5\cdot5} = 0{,}5266666\ldots.$$

$$\frac{79}{300} = \frac{79}{2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot5} = 0{,}2633333\ldots.$$

§. 101.

Addition, Subtraction, Multiplication und Division mit Decimalbrüchen.

1) Addition und Subtraction. Durch Anhängen von Nullen kann man den Decimalbrüchen gleich viel Decimalstellen, also

gleiche Nenner geben. Wenn man dann die Zähler der Decimalbrüche Behufs der Addition oder Subtraction unter einander schreibt, in jedem aber das Komma stehen läßt, so kommt immer Komma unter Komma; daher denkt man sich die Nullen nur angehängt und schreibt die Decimalbrüche so unter einander, daß die Ganzen unter die Ganzen, Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. w. kommen, addirt und subtrahirt nun und setzt in das Resultat das Komma dahin, wo es in den Summanden steht.

z. B. $A = 3{,}42 + 0{,}0748 + 12{,}3 + 0{,}214$
$B = 24{,}347 - 4{,}05134.$

Ausrechnung.

$$\begin{array}{r} 3{,}42 \\ 0{,}0748 \\ 12{,}3 \\ 0{,}214 \\ \hline A = 16{,}0088 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24{,}347 \\ 4{,}05134 \\ \hline B = 20{,}29566 \end{array}$$

2) Multiplication. Es ist

$$\frac{a}{10^n} \cdot \frac{b}{10^m} = \frac{a \cdot b}{10^{n+m}}.$$

Man multiplicirt also ohne Rücksicht auf das Decimal-Komma wie mit ganzen Zahlen und giebt dem Product so viele Decimalstellen, als die Factoren zusammen haben $(n + m)$; z. B.

$$A = 12{,}345 \cdot 4{,}04613.$$

Ausrechnung.

$$\begin{array}{r} 4{,}04613 \\ 12{,}345 \\ \hline 2023065 \\ 1618452 \\ 1213839 \\ 809226 \\ 404613 \\ \hline A = 49{,}94947485. \end{array}$$

$$4{,}21 \cdot 0{,}0031 = 0{,}013051;$$
$$0{,}03^2 = 0{,}0009.$$

3) Division. Man rückt im Zähler und Nenner das Decimal-Komma um gleich viele Stellen nach rechts (d. h. man multiplicirt Zähler und Nenner mit derselben Potenz von 10), bis Zähler und Nenner, oder doch der Nenner allein, ganze Zahlen sind. Dann verfährt man nach §. 97.

z. B. $\frac{4,3}{0,03} = \frac{430}{3} = 143,3333\ldots.$

$$\frac{14,4505}{0,06} = \frac{1445,05}{6} = 240,8416666\ldots.$$

$$\frac{2,734}{0,2035} = \frac{27340}{2035} = 13,434\ldots.$$

$$\frac{3,7465}{0,26} = \frac{374,65}{26} = 14,4096\ldots.$$

$$\frac{12}{4,312} = \frac{12000}{4312} = 2,78293\ldots.$$

§. 102.

Der abgekürzte Decimalbruch, die abgekürzte Multiplication und Division.

I. Da der Werth jeder Decimalziffer kleiner ist, als die Einheit der vorhergehenden Decimalstelle, so ist auch die Einheit jeder Decimalstelle größer, als der Werth aller nachfolgenden Decimalziffern zusammengenommen. Schreibt man also z. B. nur 6,4 statt 6,473598, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{10}$; denn es ist:

$0,000008 < 0,00001$, daher auch
$0,000098 < 0,0001$, daher auch
$0,000598 < 0,001$, folglich auch
$0,003598 < 0,01$, also endlich auch
$0,073598 < 0,1$.

Als eine Ausnahme kann man den periodischen Decimalbruch, dessen Periode 9 ist, betrachten, z. B. 0,499999..... Hier kommt 0,099999.... dem Werthe 0,1 unendlich nahe; auch giebt die Verwandlung in einen gemeinen Bruch:

$$0,4999\ldots. = \frac{49-4}{100-10} = \frac{45}{90} = 0,5.$$

II. Es kommt häufig vor, daß man bei einem Decimalbruch eine Anzahl der letzten Decimalziffern fortläßt, weil diese Ziffern für den praktischen Bedarf überflüssig sind; man weiß dann, daß der so entstandene unvollständige Decimalbruch noch nicht um eine Einheit der letzten Decimalstelle von dem wahren Bruche abweicht. Man schreibt z. B. 12,734 Ruthen statt 12,734659 Ruthen und hat also einen Fehler, der kleiner als 0,001 Ruthe ist.

Sehr einfach läßt sich aber ein solcher Fehler so vermindern, daß er noch nicht, oder doch nur eine halbe Einheit der letzten Decimalstelle beträgt: man muß nämlich die letzte Decimal-

ziffer des unvollständigen Bruches um 1 vermehren, wenn die erste fortgelassene Ziffer 5 oder größer als 5 ist; hingegen sie unverändert lassen, wenn die erste fortgelassene Ziffer kleiner als 5 ist. Unter dieser Voraussetzung heißt der unvollständige Decimalbruch ein abgekürzter Decimalbruch. Sollen z. B. die folgenden Brüche auf drei Decimalstellen abgekürzt werden:

$$4{,}23437;\quad 0{,}29463;\quad 2{,}07981;\quad 3{,}0455,$$

so schreibt man bezüglich:

$$4{,}234;\quad 0{,}295;\quad 2{,}080;\quad 3{,}046.$$

Im letzten Beispiele ist der Fehler $= 0{,}0005$, in den andern $< 0{,}0005$. Eine solche Abkürzung, vorausgesetzt, daß sie praktisch gerechtfertigt ist, hat nur dann ein Bedenken, wenn man mit dem abgekürzten Decimalbruche weiter rechnet. Der Fehler kann dann sehr bedeutend werden. Setzt man z. B. statt 2,43163 den abgekürzten Bruch 2,432 und multiplicirt nun mit 8203, so entsteht:

$$8203 \times 2{,}432 = 19949{,}696,$$

während

$$8203 \times 2{,}43163 = 19946{,}66089$$

ist. Der Fehler ist $= 3{,}03511$, beträgt also mehr als 3 Einer.

Die Rechnung mit abgekürzten Decimalbrüchen ist oft nicht zu vermeiden; sie ist auch praktisch bequem, aber ohne Werth, wenn die Beurtheilung fehlt, wie weit das Resultat zuverlässig ist. Jedem Rechner ist daher dringend zu empfehlen, diese Beurtheilung nicht außer Acht zu lassen. Sie kann so geschehen: Bezeichnen a, b, c,... die abgekürzten Decimalbrüche, $a+\alpha$, $b+\beta$, $c+\gamma$,... die vollständigen, also α, β, γ,... die Ergänzungen (Fehler, Reste), so hat man:

1) $(a+\alpha)+(b+\beta)+(c+\gamma)+\ldots = (a+b+c+\ldots)+(\alpha+\beta+\gamma+\ldots).$

2) $(a+\alpha)-(b+\beta) = (a-b)+(\alpha-\beta).$

3) $(a+\alpha)(b+\beta) = ab+a\beta+b\alpha+\alpha\beta.$

4) $\dfrac{a+\alpha}{b+\beta} = \dfrac{a}{b}+\dfrac{b\alpha-a\beta}{b(b+\beta)}.$

Im Allgemeinen sind α, β, γ,... nur kleiner als die halbe Einheit der letzten Decimalstelle von resp. a, b, c,...; in besonderen Fällen können sie bedeutend kleiner sein; übrigens sind sie positiv oder negativ. In den 4 vorstehenden Gleichungen ist immer das erste Glied der rechten Seite das Resultat der Rechnung mit den abgekürzten Decimalbrüchen, also sind die nachfolgenden Glieder der Fehler. Hieraus folgt, wenn die abgekürzten Decimalbrüche gleich viel Decimalstellen haben:

1) Bei der Addition ist der Fehler $(\alpha + \beta + \gamma + \ldots)$ im ungünstigsten Falle (wenn $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gleiche Vorzeichen haben) noch nicht die halbe Einheit der letzten Decimalstelle multiplicirt mit der Anzahl der Summanden. In der Regel gleicht sich hier aber der Fehler dadurch aus, daß $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ theils positiv, theils negativ sind. z. B. $A = 3{,}414213 + 0{,}497723 + 4{,}201582 + 7{,}10344 + 0{,}677889$. Kürzt man alle Brüche auf 3 Stellen ab, so entsteht $A = 15{,}895$. Das genaue Resultat ist $= 15{,}894847$.

2) Bei der Subtraction ist der Fehler $(\alpha - \beta)$ im ungünstigsten Falle (wenn α und β ungleiche Vorzeichen haben) noch nicht eine Einheit der letzten Decimalstelle; z. B. $3{,}4275138 - 1{,}3724891 = 2{,}0550247$. Kürzt man auf 3 Stellen ab, so folgt $3{,}428 - 1{,}372 = 2{,}056$.

3) Bei der Multiplication ist der Fehler $= a\beta + b\alpha + \alpha\beta$. Das letzte Glied ist im Verhältniß zu den beiden anderen sehr klein; man kann es also fortlassen und erhält, immer im ungünstigsten Falle, den Fehler noch nicht so groß, als die halbe Einheit der letzten Decimalstelle multiplicirt mit der Summe $(a + b)$ der abgekürzten Decimalbrüche. Sind z. B. 3,47 und 2,53 abgekürzte Decimalbrüche, so ist $3{,}47 \times 2{,}53 = 8{,}7791$, und der Fehler ist kleiner als $(3{,}47 + 2{,}53) \cdot \frac{0{,}01}{2}$, d. h. kleiner als 0,03. Ist der eine Factor $(a + \alpha)$ vollständig gegeben, oder etwa auch eine ganze Zahl, so setzt man $\alpha = 0$, und der Fehler ist dann $= a \cdot \beta$; z. B. $1850 \cdot 3{,}14159 = 5811{,}9415$. Der Fehler ist $< 1850 \cdot \frac{0{,}00001}{2}$, d. h. $< 0{,}00925$; er kann also beinah eine Einheit der zweiten Decimalstelle sein. Wüßte man im vorliegenden Falle, daß 3,14159 die Abkürzung von 3,141592... ist, so könnte man den Fehler noch genauer bestimmen; er ist $< 1850 \cdot 0{,}000003$, d. h. $< 0{,}00555$.

4) Bei der Division ist der Fehler $= \frac{b\alpha - a\beta}{b(b + \beta)}$. Im ungünstigsten Falle haben α und β ungleiche Vorzeichen, und dann ist der Fehler $< \frac{b\alpha + a\beta}{b(b + \beta)}$ zu setzen, wenn man α und β gleich der halben Einheit der letzten Decimalstelle nimmt. Läßt man im Nenner β fort, wodurch der Quotient nicht wesentlich verändert, wenn aber β positiv ist, sogar vergrößert wird: so ist der Fehler $< \frac{b \cdot \alpha + a \cdot \beta}{b^2}$, d. h. kleiner, als $\frac{a + b}{b^2}$ multiplicirt mit der halben Einheit der letzten Decimalstelle.

$$\text{z. B. } \frac{4{,}735}{3{,}142} = 1{,}507001\ldots.$$

Der Fehler ist kleiner als $\frac{4{,}735 + 3{,}142}{3{,}142^2} \cdot \frac{0{,}001}{2}$, d. h. kleiner als 0,00039 .... Gesetzt es wäre 4,735 die Abkürzung von 4,73545 und 3,142 die Abkürzung von 3,14165, so wäre genau

$$\frac{4{,}73545}{3{,}14165} = 1{,}50731\ldots.$$

5) Soll ein abgekürzter Decimalbruch mit einem gemeinen Bruche $\frac{n}{m}$ multiplicirt werden, so ist es rathsam, zuerst mit n zu multipliciren und dann durch m zu dividiren, nicht umgekehrt; denn in diesem Falle müßte man auf mehr Stellen dividiren, als der abgekürzte Bruch Stellen hat. So ist z. B.

$$\frac{11}{9} \cdot 4{,}32675 = 6{,}28825.$$

Kürzt man 4,32675 auf 3 Stellen ab, so ist

$$\frac{11}{9} \cdot 4{,}327 = \frac{11 \cdot 4{,}327}{9} = \frac{47{,}597}{9} = 5{,}288\ldots.$$

Aber auch $\frac{11}{9} \cdot 4{,}327 = 11 \cdot \frac{4{,}327}{9}$; dividirt man jetzt nur auf 3 Stellen, so entsteht 5,280; dividirt man aber auf mehr Stellen: 5,28855 ....

Anmerk. Es kann vorkommen, daß man mit Decimalbrüchen rechnen muß, die unvollständige, aber nicht abgekürzte sind, deren spätere Ziffern man also gar nicht kennt (wenn z. B. 3,4248 .... gegeben und die 4te Decimalziffer noch richtig ist, die nächsten aber ganz unbekannt sind); dann muß man überall, wo oben die halbe Einheit der letzten Decimalstelle in Rechnung gebracht ist, jetzt die ganze nehmen.

III. Die abgekürzte Multiplication. Multiplicirt man abgekürzte Decimalbrüche, so erhält man, wie oben gezeigt wurde, eine Anzahl falscher Decimalstellen.

z. B. A = 3,72436 × 2,34587. Man erhält:

```
      3,72436
      2,34587
    ---------
      2607052
     2979488
    1862180
   1489744
  1117308
  744872
-------------
A = 8,7368643932.
```

Es ist leicht einzusehen, daß die letzten Ziffern als falsch betrachtet werden müssen; denn sie würden sich geändert haben, wenn man die späteren unbekannten in die Rechnung hätte ziehen können. (Wäre z. B. noch die 6te Decimalstelle des Factors 3,72436 bekannt, etwa = 4, so würde das letzte Partial-Product (744872) heißen: 7448728, und schon die 5te Decimalstelle hätte sich geändert.) Der Fehler im Product ist kleiner als 0,00003035 ....; man würde also A auf 4 Stellen abkürzen und A = 8,7369 erhalten. — Die abgekürzte Multiplication giebt das Product ohne die falschen letzten 5 Decimalstellen. Man multiplicirt 3,72436 mit den Ziffern des andern Factors in umgekehrter Ordnung, d. h. zuerst mit der Ziffer 2, welche auf das Product den größten Einfluß hat, dann mit 3, dann mit 4, 5, 8 und 7. So entstehen dieselben Partialproducte wie oben, aber in umgekehrter Ordnung, so daß jedes folgende um eine Stelle nach rechts hinauszurücken ist:

```
3,72436
2,34587
-------
744872
1117308
 1489744
  1862180
   2979488
    2607052
-------------
8,7368643932.
```

Weil aber die hinausgerückten Ziffern doch nur unrichtige Decimalstellen geben, so läßt man sie fort, und zwar geschieht dies so, daß man, nachdem mit der ersten Ziffer 2 multiplicirt ist, die letzte Ziffer von 3,72436 durchstreicht, oder doch sich fort denkt. Nun multiplicirt man mit 3, multiplicirt aber die durchstrichene 6 im Kopfe mit, um die sich ergebenden Zehner übertragen zu können. Man sagt also: 3 × 6 = 18 und trägt, weil 18 näher an 20, als an 10 liegt, 2 über, fährt also fort: 3 × 3 = 9, und 2 hinzu giebt 11, u. s. w. (Auch schon bei 15 würde man 2, statt 1, übertragen.) Multiplicirt man nun mit der nächsten Ziffer 4, so streicht man vorher wieder die jetzt letzte Ziffer 3 durch, u. s. w. Um nicht zu irren, pflegt man auch wohl die Ziffern des Factors 2,34587 durchzustreichen, mit denen man multiplicirt hat. Das Decimal-Komma setzt man zweckmäßig gleich in das erste Partial-Product richtig ein, wie folgende Darstellung zeigt:

```
   3,72436
   2,34587
----------
   7,44872
   1 11731
     14897
      1862
       298
        26
----------
  8,73686.
```

Da die letzte Ziffer unsicher ist, selbst die vorletzte falsch sein kann, so nimmt man 8,7369 oder 8,737 als Resultat.

Beispiel 2.

```
  0,423851
   237,173
----------
   84,7702
   12 7155
    2 9670
       424
       296
        13
----------
 100,5260.
```

Resultat = 100,526 oder 100,53.

Um in das erste Partial-Product das Decimal-Komma richtig zu setzen, kann man so untersuchen, in welche Stelle die letzte Ziffer (2) dieses Products kommt:

$$200 \times \frac{1}{1000000} = \frac{2}{10000},$$

also in 4te Decimalstelle.

Die abgekürzte Multiplication kann man auch bei vollständigen Decimalbrüchen anwenden, ja selbst bei ganzen Zahlen, wenn man nur eine gewisse Anzahl der ersten Ziffern des Products wissen will.

z. B.

```
 0,0047837
     31564
----------
   143,511
     4 784
     2 392
       287
        19
----------
  150,993.
```

Da $30000 \times \frac{7}{10000000} = \frac{21}{1000}$, so kommt im ersten Partial-Product die letzte 1 in die 3te Decimalstelle. Das Product ist also = 150,99 oder 151,0.

Haben die Factoren nicht gleich viel Ziffern (Ziffern, nicht Decimalziffern), so kürzt man entweder den einen Factor ab, oder man setzt den Factor, welcher mehr Ziffern hat als der andere, bei der Multiplication unter diesen; thut man dies nicht, so erhält man zwar mehr Ziffern, aber unrichtige. Man vergleiche folgende Multiplicationen mit einander:

342,573	0,7246
0,7246	342,573
239,8011	217,38
6 8515	28 98
1 3703	1 45
2055	36
248,2284	5
	248,22.

Also das Product = 248,2.

Beispiele. 1) 0,09320846 ... × 0,210374 ... = 0,0196086.
2) 3,72453 ... × 2,43346 ... = 9,0635.
3) 24,37425 ... × 0,3736 ... = 9,11.
4) 0,00527 ... × 0,01342 ... = 0,000071.
5) 243,162 ... × 132,345 ... = 32181.
6) 22,1346 ... × 0,00113474 ... = 0,025117.

IV. Die abgekürzte Division besteht darin, daß man bei dem gewöhnlichen Verfahren, anstatt an den Rest eine Null anzuhängen, die letzte Ziffer des Divisors durchstreicht; doch muß man bei jeder Multiplication einer Ziffer des Quotienten mit dem Divisor die zuletzt durchgestrichene Ziffer im Kopfe mit multipliciren, um zu erfahren, welche Zahl man überzutragen hat. Man wendet diese Division an, wenn Divisor und Dividendus Decimalbrüche sind, deren spätere Ziffern man nicht kennt, dann bei abgekürzten Decimalbrüchen, endlich selbst bei ganzen Zahlen, wenn man nur einige der ersten Ziffern des Quotienten wissen will.

z. B. $A = \frac{4,934256\ldots.}{2,316749\ldots.} = \frac{4934256}{2316749}$

2316749 | 4934256 | 2,129819....
4633498
300758
231675
69083
46335
22748
20850
1898
1853
45
23
22
21

Als Resultat ist zu nehmen: A = 2,12982.

Beispiel 2) $\frac{3,72456}{2,20345} = 1,69033.$

3) $\frac{0,712343}{8,031224} = 0,088696.$

4) $\frac{50}{0,031477\ldots} = \frac{50000000}{31477} = 1588,5.$

5) $\frac{32,55562}{15,93476} = 2,043057.$

6) Um $\frac{673142890}{37489524}$ etwa auf zwei Decimalstellen in einen Decimalbruch zu verwandeln, kann man im Zähler und Nenner die letzten 4 Ziffern fortlassen und die Division $\frac{67314}{3749}$ abgekürzt ausführen. Man erhält 17,955. Dividirt man, ohne abzukürzen, so entsteht 17,955493...

2) Die Kettenbrüche.

§. 103.

Einleitung.

Denken wir uns einen nicht zu hebenden Bruch, z. B. $\frac{15}{49}$, so kann es in irgend einem Falle wünschenswerth sein, statt dieses Bruches einen anderen, dessen Zähler und Nenner kleinere Zahlen sind, zu finden, der aber dem Werthe $\frac{15}{49}$ recht nahe kommt. Man könnte

etwa so verfahren: Macht man den Nenner um 1 kleiner, oder um 1 größer, so läßt sich der Bruch jedesmal heben, und es entsteht:

$$\frac{15}{48} = \frac{5}{16} \text{ und } \frac{15}{50} = \frac{3}{10}.$$

Man würde also von den Brüchen $\frac{5}{16}$ und $\frac{3}{10}$ den einen wählen. Nun findet man aber, daß $\frac{3}{10}$ nicht nur ein bequemerer Bruch ist, als $\frac{5}{16}$ (insofern man recht kleine Zahlen haben will), sondern auch, daß $\frac{3}{10}$ dem Werthe $\frac{15}{49}$ näher liegt, als $\frac{5}{16}$; denn es ist:

$$\frac{15}{49} - \frac{3}{10} = \frac{3}{490} = \frac{24}{3920},$$

hingegen:

$$\frac{5}{16} - \frac{15}{49} = \frac{5}{784} = \frac{25}{3920}.$$

Man wird also in dem angenommenen Falle von beiden Brüchen $\frac{3}{10}$ wählen, doch aber die Frage nicht zurückweisen können, ob es nicht einen Bruch in noch kleineren Zahlen giebt, der dem Werthe $\frac{15}{49}$ zugleich auch noch näher kommt. Diese Frage beantworten die **Kettenbrüche**, d. h. mittelst der Kettenbrüche erhalten wir nur solche **Näherungswerthe**, welche dem gegebenen Bruche näher liegen, als alle anderen Brüche, welche in kleineren Zahlen, als sie, geschrieben werden. Für die vorliegende Aufgabe ergeben sich (§. 104.) durch die Kettenbrüche 3 Näherungswerthe: $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$ und $\frac{4}{13}$, und diese Brüche sind so aufzufassen: Jeder Bruch, welcher dem Werthe $\frac{15}{49}$ näher liegt, als $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$ oder $\frac{4}{13}$, hat einen größeren Zähler und Nenner, als resp. $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$ und $\frac{4}{13}$; anderseits kommt jeder folgende Näherungswerth dem Bruche $\frac{15}{49}$ näher, als der vorhergehende. — Durch dieses Beispiel ist der Inhalt des Abschnittes über Kettenbrüche im Allgemeinen angegeben: man hat zu zeigen, wie die Näherungswerthe gefunden werden, und warum die von ihnen behaupteten Eigenschaften Statt finden.

§. 104.

Erklärung. Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Kettenbruch. Näherungswerthe.

Im Allgemeinen heißt jeder Bruch ein continuirlicher oder Kettenbruch, wenn er folgende Form hat:

$$\cfrac{a}{b + \cfrac{c}{d + \cfrac{e}{f + \cfrac{g}{h + \text{u. s. w.}}}}}$$

und man nennt die Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$ u. s. w. seine Glieder; hier aber sollen ausschließlich nur solche Kettenbrüche betrachtet werden, bei welchen die Nenner der Glieder, also b, d, f, h, ..., ganze positive Zahlen sind, und die Zähler a, c, e, ... sämmtlich = 1. Die Form ist also:

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{u. s. w.}}}}}, \text{ auch geschrieben: } \frac{1}{a}\!+\!\frac{1}{b}\!+\!\frac{1}{c}\!+\!\frac{1}{d}\!+ \text{u. s. w.}$$

Auf diese Form kann man aber sehr leicht jeden echten Bruch bringen, wenn man seinen Zähler und Nenner durch den Zähler dividirt. Der Zähler wird dann 1, der Nenner wird zu einer ganzen Zahl + einem echten Bruche, welchen man gerade wieder so behandelt (falls nicht sein Zähler schon 1 ist), wie den ursprünglichen Bruch. So fährt man fort, bis die Zähler aller Glieder 1 sind.

z. B. $$\frac{15}{49} = \frac{1}{3 + \frac{4}{15}} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \frac{3}{4}}} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$$

So hat man für $\frac{15}{49}$ drei Kettenbrüche erzeugt; aber nur der letzte hat 1 zum Zähler jedes Gliedes. — Läßt man in jedem der 3 Kettenbrüche das letzte Glied fort, so erhält man die Näherungsbrüche des gegebenen Bruches:

den 1sten Näherungsbruch $= \frac{1}{3}$,

den 2ten " " $= \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}$,

$$\text{den 3ten Näherungsbruch} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\frac{1}{1}}}.$$

Verwandelt man aber diese Näherungsbrüche, welche, mit Ausnahme des ersten, auch Kettenbrüche sind, in gemeine Brüche, so erhält man die Näherungswerthe des gegebenen Bruches:

$$\text{den 1sten Näherungswerth} = \frac{1}{3},$$

$$\text{den 2ten „ „} = \frac{3}{10},$$

$$\text{den 3ten „ „} = \frac{4}{13}.$$

Bei der Verwandlung von $\frac{15}{49}$ in einen Kettenbruch mußten wir mit 15 in 49 dividiren und erhielten $3 + \frac{4}{15}$, d. h. der Quotient war 3, der Rest 4. Nun mußten wir mit 4 in 15 dividiren, d. h. mit dem Rest in den vorigen Divisor u. s. w. Man erkennt leicht, daß diese einzelnen Divisionen nichts weiter sind, als die Partial-Divisionen bei dem Verfahren (§. 74.), durch welches man den größten gemeinschaftlichen Theiler der beiden Zahlen 15 und 49 findet.

Wir wollen dies noch an einem zweiten Beispiel zeigen. Man vergleiche die folgende Verwandlung von $\frac{791}{2667}$ in einen Kettenbruch mit der nebenstehenden Division:

$$\frac{791}{2667} = \cfrac{1}{3+\frac{294}{791}}$$

$$= \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\frac{203}{294}}}$$

$$= \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{91}{203}}}}$$

$$= \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{21}{91}}}}}.$$

```
791 | 2667 | 3
      2373
      ----
       294 | 791 | 2
             588
             ---
             203 | 294 | 1
                   203
                   ---
                    91 | 203 | 2
                         182
                         ---
                          21 | 91 | 4
                               84
                               --
                                7 | 21 | 3
                                    21
                                    --
                                     0
```

$$= \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\frac{7}{21}}}}}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{791}{2667} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\frac{1}{3}}}}}}$$

Aus dem bisher Gesagten ergiebt sich nun folgende Regel: Um einen echten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln, dividire man mit dem Zähler in den Nenner, mit dem Rest in den vorigen Divisor und so fort, bis die Division aufgeht; die Quotienten sind dann in der Ordnung, wie sie sich ergeben, die Nenner der einzelnen Glieder, deren Zähler sämmtlich 1 sind. Das erste Glied des Kettenbruches ist der erste Näherungsbruch; den 2ten, 3ten, 4ten u. s. w. erhält man, wenn man jedesmal den ganzen Bruch fortläßt, welcher bezüglich zum Nenner des 2ten, 3ten, 4ten u. s. w. Gliedes noch addirt ist. Verwandelt man die Näherungsbrüche in gemeine Brüche, so erhält man die Näherungswerthe.

Da die Näherungsbrüche auch Kettenbrüche sind, so mag noch erwähnt werden, daß die Umformung eines Kettenbruches in einen gemeinen Bruch mit dem letzten Gliede beginnen muß; man addirt es zum Nenner des vorletzten Gliedes, dividirt dann in 1 u. s. w., wie folgende, den eben erhaltenen Kettenbruch betreffende Darstellung zeigt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} + 4 &= \frac{13}{3} \\
\frac{3}{13} + 2 &= \frac{29}{13} \\
\frac{13}{29} + 1 &= \frac{42}{29} \\
\frac{29}{42} + 2 &= \frac{113}{42} \\
\frac{42}{113} + 3 &= \frac{381}{113} \\
\hline
\text{Resultat} &= \frac{113}{381}.
\end{aligned}$$

Man sieht, daß der gegebene Bruch $\frac{791}{2667}$ gehoben herauskommt, und so werden auch alle Näherungswerthe Brüche, deren Zähler und Nenner relative Primzahlen sind, die sich also nicht heben lassen. Es folgt dies aber unmittelbar aus §. 75., Anmerkung.

Die Näherungsbrüche von $\frac{113}{381}$ oder $\frac{791}{2667}$ sind nun:

Der 1ste Näherungsbruch $= \frac{1}{3}$

der 2te " " $= \cfrac{1}{3+\frac{1}{2}}$

der 3te " " $= \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\frac{1}{1}}}$

der 4te " " $= \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$

der 5te " " $= \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{4}}}}}$,

und aus ihnen folgen die Näherungswerthe:

$\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{8}{27}, \frac{35}{118}.$

Beispiel 2. Die Näherungswerthe von $\frac{188}{487}$ sind:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{5}{13}, \frac{17}{44}, \frac{22}{57}, \frac{83}{215}.$

Beispiel 3. $\frac{107}{359}$ hat die Näherungswerthe:

$\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{14}{47}$ und $\frac{31}{104}.$

§. 105.

Der Kürze und Deutlichkeit wegen soll für die folgenden Untersuchungen eine bestimmte Bezeichnung eingeführt werden, die wohl zu merken ist. Wir setzen immer echte und gehobene Brüche voraus; ist ein unechter gegeben, so denken wir uns die Ganzen herausgenommen.

Den gegebenen echten gehobenen Bruch, dessen Näherungswerthe zu suchen sind, bezeichnen wir durch $\frac{Z}{N}$. Dividiren wir nun mit Z in N, wie im §. 104. angegeben, so sollen $Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4\ldots$ nach der Reihe die Quotienten, $R_1\,R_2\,R_3\,R_4\ldots$ die Reste vorstellen, so daß aus folgender Darstellung:

$$\begin{array}{l}
Z \mid N \mid Q_1 \\
\quad \underline{Q_1 Z} \\
\quad R_1 \mid Z \mid Q_2 \\
\qquad \underline{Q_2 R_1} \\
\qquad R_2 \mid R_1 \mid Q_3 \\
\qquad\quad \underline{Q_3 R_2} \\
\qquad\quad R_3 \mid R_2 \mid Q_4 \\
\qquad\qquad \underline{Q_4 R_3} \\
\qquad\qquad R_4 \\
\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad R_{n-1} \mid R_{n-2} \mid Q_n \\
\qquad\qquad\quad \underline{Q_n R_{n-1}} \\
\qquad\qquad\quad R_n \mid R_{n-1} \mid Q_{n+1} \\
\qquad\qquad\qquad \underline{Q_{n+1} R_n} \\
\qquad\qquad\qquad R_{n+1} \quad \text{u. s. w.}
\end{array}$$

folgt:

$$\frac{Z}{N} = \cfrac{1}{Q_1 + \cfrac{1}{Q_2 + \cfrac{1}{Q_3 + \cfrac{1}{Q_4 + \ldots + \cfrac{1}{Q_n + \cfrac{1}{Q_{n+1} + \ldots}}}}}}$$

Man mache sich nun folgende Bemerkung recht klar und halte sie fest: *Hat man irgend einen, z. B. den nten Näherungswerth berechnet, welcher aus dem nten Näherungsbruche, dessen letztes Glied $\frac{1}{Q_n}$ ist, hervorgeht, so findet man den folgenden, n + 1sten Näherungswerth, wenn man in den nten Näherungswerth statt Q_n hineinsetzt: $Q_n + \frac{1}{Q_{n+1}}$; und will man aus dem nten Näherungswerthe den ursprünglichen Bruch $\frac{Z}{N}$ wieder bilden, so setze man statt Q_n die Summe $Q_n + \frac{R_n}{R_{n-1}}$.*

So ist z. B. der 2te Näherungsbruch $= \cfrac{1}{Q_1 + \cfrac{1}{Q_2}}$, also der 2te Näherungswerth $= \frac{Q_2}{Q_2 \cdot Q_1 + 1}$. Hieraus folgt der 3te Näherungs-

$$\text{werth} = \frac{Q_2 + \frac{1}{Q_3}}{\left(Q_2 + \frac{1}{Q_3}\right)Q_1 + 1} = \frac{Q_3Q_2 + 1}{(Q_3Q_2 + 1)Q_1 + Q_3},$$

hingegen der ursprüngliche Bruch:

$$\frac{Z}{N} = \frac{Q_2 + \frac{R_2}{R_1}}{\left(Q_2 + \frac{R_2}{R_1}\right)Q_1 + 1} = \frac{R_1Q_2 + R_2}{(R_1Q_2 + R_2)Q_1 + R_1}.$$

Der Zähler dieses Bruches ist $= Z$, wie aus der oben stehenden Division unmittelbar zu sehen ist; der Nenner ist $ZQ_1 + R_1$, also $= N$.

Endlich sollen $Z_1\ Z_2\ Z_3\ Z_4 \ldots\ldots$ die Zähler, und
$N_1\ N_2\ N_3\ N_4 \ldots\ldots$ die Nenner der Näherungswerthe bedeuten, also $\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \frac{Z_3}{N_3}, \frac{Z_4}{N_4}, \ldots\ldots$ den 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, ... Näherungswerth selbst.

§. 106.

Lehrsatz.

Den Zähler (und den Nenner) eines Näherungswerthes, z. B. des nten, findet man, wenn man den eben so vielten, also nten, Quotienten mit dem Zähler (Nenner) des vorhergehenden Näherungswerthes multiplicirt und zum Product den Zähler (Nenner) des vorvorhergehenden Näherungswerthes addirt.

$$\text{I.}\quad \frac{Z_n}{N_n} = \frac{Q_n \cdot Z_{n-1} + Z_{n-2}}{Q_n \cdot N_{n-1} + N_{n-2}}.$$

Auf dies Gesetz kommt man leicht, wenn man die Näherungswerthe nach der Reihe (in Buchstaben) berechnet. Nach der Bezeichnung in §. 105. ist:

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{Q_1}$$

$$\frac{Z_2}{N_2} = \frac{1}{Q_1 + \frac{1}{Q_2}} = \frac{Q_2}{Q_2Q_1 + 1}$$

$$\frac{Z_3}{N_3} = \frac{Q_2 + \frac{1}{Q_3}}{\left(Q_2 + \frac{1}{Q_3}\right) Q_1 + 1} = \frac{Q_3Q_2 + 1}{Q_3[Q_2Q_1 + 1] + Q_1} = \frac{Q_3Z_2 + Z_1}{Q_3N_2 + N_1}$$

$$\frac{Z_4}{N_4} = \frac{\left(Q_3 + \frac{1}{Q_4}\right) Z_2 + Z_1}{\left(Q_3 + \frac{1}{Q_4}\right) N_2 + N_1} = \frac{Q_4Z_3 + Z_2}{Q_4N_3 + N_2}, \text{ u. s. w.}$$

Es fehlt jetzt noch der Beweis, daß dieses für $\frac{Z_3}{N_3}$ und $\frac{Z_4}{N_4}$ entwickelte Gesetz für alle Näherungswerthe gilt. Diesen Beweis führt man durch Induction, d. h. man zeigt, daß aus der Annahme, das Gesetz wäre für irgend einen, z. B. für den mten Näherungswerth richtig, folgt, daß es auch für den nächsten, m + 1sten richtig sein muß. Kann man dies zeigen, so fährt man im Beweise so fort: das Gesetz ist für den 4ten Näherungswerth wahr, folglich gilt es auch für den 5ten, daher auch für den 6ten, aus demselben Grunde dann auch für den 7ten, 8ten, u. s. w. für alle. Aber aus der Annahme:

$$\frac{Z_m}{N_m} = \frac{Q_m Z_{m-1} + Z_{m-2}}{Q_m N_{m-1} + N_{m-2}} \text{ folgt: } \frac{Z_{m+1}}{N_{m+1}} = \frac{\left(Q_m + \frac{1}{Q_{m+1}}\right) Z_{m-1} + Z_{m-2}}{\left(Q_m + \frac{1}{Q_{m+1}}\right) N_{m-1} + N_{m-2}}.$$

Zähler und Nenner mit Q_{m+1} multiplicirt, giebt:

$$\frac{Z_{m+1}}{N_{m+1}} = \frac{(Q_{m+1} \cdot Q_m + 1) Z_{m-1} + Q_{m+1} \cdot Z_{m-2}}{(Q_{m+1} \cdot Q_m + 1) N_{m-1} + Q_{m+1} \cdot N_{m-2}}$$

$$= \frac{Q_{m+1} [Q_m Z_{m-1} + Z_{m-2}] + Z_{m-1}}{Q_{m+1} [Q_m N_{m-1} + N_{m-2}] + N_{m-1}},$$

also nach der Annahme: $\frac{Z_{m+1}}{N_{m+1}} = \frac{Q_{m+1} \cdot Z_m + Z_{m-1}}{Q_{m+1} \cdot N_m + N_{m-1}}$.

Die Formel giebt aber für den m + 1sten Näherungswerth genau dasselbe Gesetz, welches für den mten Näherungswerth als wahr angenommen wurde; daher ist das Gesetz allgemein richtig.

§. 107.

Praktisches Verfahren bei Berechnung der Näherungswerthe.

Nach dem Gesetze §. 106. I. kann man unmittelbar alle Näherungswerthe hinschreiben, wenn man die beiden ersten hat; denn auf diese kann sich natürlich das Gesetz nicht erstrecken; sie würden auf dem gewöhnlichen Wege zu finden sein. Aber auch diese kleine Unbequemlichkeit kann man dadurch beseitigen, daß man sich vor dem ersten Näherungswerth noch zwei vorhergehende denkt, nämlich einen vorhergehenden $\frac{0}{1}$ und einen vorvorhergehenden $\frac{1}{0}$; dann kann man aus ihnen, ganz dem Wortlaute des Gesetzes nach, auch $\frac{Z_1}{N_1}$ und $\frac{Z_2}{N_2}$ hinschreiben; denn

es ist
$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{Q_1 \cdot 0 + 1}{Q_1 \cdot 1 + 0} = \frac{1}{Q_1} \text{ und}$$
$$\frac{Z_2}{N_2} = \frac{Q_2 \cdot Z_1 + 0}{Q_2 \cdot N_1 + 1} = \frac{Q_2 \cdot 1}{Q_2 \cdot Q_1 + 1}.$$

Um also die Näherungswerthe eines gegebenen echten Bruches, z. B. $\frac{151}{347}$ zu finden, vollzieht man zuerst die Division, welche die Quotienten giebt, und schreibt dann mittelst der Hülfsbrüche $\frac{1}{0}$ und $\frac{0}{1}$ nach der Formel I. in §. 106. die Näherungswerthe hin, wie folgt:

```
151 | 347 | 2
      302
      ---
       45 | 151 | 3
            135
            ---
             16 | 45 | 2
                  32
                  --
                  13 | 16 | 1
                       13
                       --
                        3 | 13 | 4
                            12
                            --
                             1 | 3 | 3
                                 3
```

Quotienten:			2	3	2	1	4	3
Näherungswerthe:	$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{10}{23}$	$\frac{47}{108}$	$\frac{151}{347}$

Die Näherungswerthe sind also: $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{7}{16}, \frac{10}{23}$ und $\frac{47}{108}$.

Man pflegt auch den gegebenen Bruch selbst $\left(\frac{151}{347}\right)$ noch zu erzeugen, weil man durch ihn eine Controle der Rechnung hat.

Beispiel 2. Gegeben $\frac{64}{151}$;

Näherungswerthe: $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{11}{26}, \frac{14}{33}, \frac{25}{59}$.

3) Gegeben $\frac{1403}{3633}$;

Näherungswerthe: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{5}{13}, \frac{17}{44}, \frac{39}{101}, \frac{56}{145}, \frac{95}{246}, \frac{436}{1129}$.

4) Gegeben 0,23;

Näherungswerthe: $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{13}$.

5) Gegeben 3,14159;

Näherungswerthe: $\frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{9208}{2931}, \frac{9563}{3044}, \frac{76149}{24239}$. Man sucht entweder die Näherungswerthe von 0,14159 und addirt 3 zu jedem hinzu, oder man sucht die Näherungswerthe von $\frac{100000}{314159}$ und nimmt von jedem den reciproken Werth.

§. 108.

Lehrsätze.

1) Wenn man von zwei auf einander folgenden Näherungswerthen den Zähler eines jeden mit dem Nenner des anderen multiplicirt, so ist die Differenz dieser (Kreuz-) Producte entweder $= +1$, oder $= -1$; oder noch bestimmter:

$$\text{II.} \quad Z_{n-1} \cdot N_n - Z_n \cdot N_{n-1} = (-1)^n.$$

2) Zieht man zwei auf einander folgende Näherungswerthe von einander ab, z. B. den nten vom $n-1$ten, so ist die Differenz, je nachdem n gerade oder ungerade ist, gleich ± 1 dividirt durch das Product der Nenner.

$$\text{III.} \quad \frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{Z_n}{N_n} = \frac{(-1)^n}{N_{n-1} \cdot N_n}.$$

Beweis zu II. Setzt man statt Z_n und N_n aus Formel I. (§. 106.) die Werthe, und löst die Klammern auf, so folgt:

$$Z_{n-1} N_n - Z_n \cdot N_{n-1} = -(Z_{n-2} \cdot N_{n-1} - Z_{n-1} \cdot N_{n-2})$$

d. h. multiplicirt man den Zähler jedes Näherungswerthes mit dem Nenner des folgenden, und den Zähler des folgenden mit dem Nenner des vorhergehenden, und zieht letzteres Product von ersterem ab: so haben alle diese Differenzen denselben absoluten Werth, nur die Vorzeichen sind abwechselnd + und —. Nun ist aber

$Z_1 N_2 - Z_2 \cdot N_1 = 1 \cdot (Q_2 Q_1 + 1) - Q_2 \cdot Q_1 = +1$, folglich

$Z_2 N_3 - Z_3 \cdot N_2 = -1$, $Z_3 N_4 - Z_4 N_3 = +1$, u. s. w.

Beweis zu III. Dividirt man die Gleichung II. (links und rechts) durch $N_{n-1} \cdot N_n$, so folgt unmittelbar die Formel III.

Beispiel. $\frac{26}{67}$ hat die Näherungswerthe $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{5}{13}, \frac{7}{18}$. Nun ist $1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = +1$, $1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = -1$, $2 \cdot 13 - 5 \cdot 5 = +1$ u. s. w.; auch $7 \cdot 67 - 26 \cdot 18 = +1$. Ferner:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \ \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{15}, \ \frac{2}{5} - \frac{5}{13} = \frac{1}{65} \text{ u. s. w.}$$

§. 109.

Lehrsatz.

Einen (echten gehobenen) Bruch findet man aus zwei auf einander folgenden Näherungswerthen desselben so wieder: Man erhält seinen Zähler (und Nenner), wenn man den Zähler (Nenner) des nten Näherungswerthes mit dem n — 1sten Rest, und den Zähler (Nenner) des n — 1sten Näherungswerthes mit dem nten Rest multiplicirt und die Producte addirt.

$$\text{IV.}\quad \frac{Z}{N} = \frac{Z_n \cdot R_{n-1} + Z_{n-1} R_n}{N_n \cdot R_{n-1} + N_{n-1} R_n}.$$

Beweis. Es war $\frac{Z_n}{N_n} = \frac{Q_n Z_{n-1} + Z_{n-2}}{Q_n N_{n-1} + N_{n-2}}$. Setzt man nun $Q_n + \frac{R_n}{R_{n-1}}$ statt Q_n (§. 105.), so folgt:

$$\frac{Z}{N} = \frac{\left(Q_n + \frac{R_n}{R_{n-1}}\right) Z_{n-1} + Z_{n-2}}{\left(Q_n + \frac{R_n}{R_{n-1}}\right) N_{n-1} + N_{n-2}} = \frac{(Q_n R_{n-1} + R_n) Z_{n-1} + Z_{n-2} R_{n-1}}{(Q_n R_{n-1} + R_n) N_{n-1} + N_{n-2} R_{n-1}}$$

$$= \frac{(Q_n Z_{n-1} + Z_{n-2}) R_{n-1} + R_n Z_{n-1}}{(Q_n N_{n-1} + N_{n-2}) R_{n-1} + R_n N_{n-1}} = \frac{Z_n R_{n-1} + Z_{n-1} R_n}{N_n R_{n-1} + N_{n-1} R_n} \quad (\text{§. 106.}).$$

Beispiel. Es sei gegeben $\frac{41}{147}$. Man erhält:

```
41 | 147 | 3
     123
     ---
      24 | 41 | 1
           24
           --
           17 | 24 | 1
                17
                --
                 7 | 17 | 2
                     14
                     --
                      3 | 7 | 2
                          6
                          -
                          1 | 3 | 3
                              3
                              -
```

Quotienten:			3	1	1	2	2	3
Näherungswerthe:	$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{12}{43}$	$\frac{41}{147}$
Reste:			24	17	7	3	1	0

Hieraus folgt:

$$\frac{41}{147} = \frac{1 \cdot 24 + 1 \cdot 17}{4 \cdot 24 + 3 \cdot 17} = \frac{2 \cdot 17 + 1 \cdot 7}{7 \cdot 17 + 4 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 7 + 2 \cdot 3}{18 \cdot 7 + 7 \cdot 3}$$

$$= \frac{12 \cdot 3 + 5 \cdot 1}{43 \cdot 3 + 18 \cdot 1} = \frac{41 \cdot 1 + 12 \cdot 0}{147 \cdot 1 + 43 \cdot 0}.$$

§. 110.

Lehrsatz.

Zieht man von einem Bruche seinen nten Näherungswerth ab, so erhält man als Differenz den nten Rest dividirt durch das Product der Nenner, und zwar + oder —, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

$$\text{V.}\quad \frac{Z}{N} - \frac{Z_n}{N_n} = (-1)^n \cdot \frac{R_n}{N \cdot N_n}.$$

Beweis. Es war $\frac{Z}{N} = \frac{Z_n R_{n-1} + Z_{n-1} R_n}{N_n R_{n-1} + N_{n-1} R_n}$ (§. 109.), folglich

$$\frac{Z}{N} - \frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_n N_n R_{n-1} + Z_{n-1} N_n R_n - N_n Z_n R_{n-1} - Z_n R_n N_{n-1}}{N \cdot N_n}$$

$$= \frac{R_n}{N \cdot N_n} \cdot (Z_{n-1} \cdot N_n - Z_n N_{n-1}) = \frac{R_n}{N \cdot N_n} (-1)^n \text{ (§. 108. II.)}.$$

§. 111.

Aus V. folgt unmittelbar das Gesetz: Die Näherungswerthe eines (echten) Bruches sind abwechselnd größer und kleiner, als der Bruch selbst; jeder folgende kommt ihm aber näher, als der vorhergehende.

Bew. Es ist: $\frac{Z}{N} - \frac{Z_1}{N_1} = -\frac{R_1}{N \cdot N_1}$

$$\frac{Z}{N} - \frac{Z_2}{N_2} = +\frac{R_2}{N \cdot N_2}$$

$$\frac{Z}{N} - \frac{Z_3}{N_3} = -\frac{R_3}{N \cdot N_3}$$

$$\frac{Z}{N} - \frac{Z_4}{N_4} = +\frac{R_4}{N \cdot N_4} \text{ u. s. w.}$$

Da die Differenzen abwechselnd — und + sind, so sind die Subtrahenden abwechselnd größer und kleiner, als der Minuend; nämlich: $\frac{Z_1}{N_1} > \frac{Z}{N}$, $\frac{Z_2}{N_2} < \frac{Z}{N}$, $\frac{Z_3}{N_3} > \frac{Z}{N}$, $\frac{Z_4}{N_4} < \frac{Z}{N}$, ..., $\frac{Z_{2n-1}}{N_{2n-1}} > \frac{Z}{N}$, $\frac{Z_{2n}}{N_{2n}} < \frac{Z}{N}$. Die absoluten Werthe dieser Differenzen werden aber

nach und nach immer kleiner, nämlich:

$$\frac{R_1}{N \cdot N_1} > \frac{R_2}{N \cdot N_2} > \frac{R_3}{N \cdot N_3} > \text{u. s. w.},$$

weil die Zähler abnehmen, die Nenner aber gleichzeitig wachsen.

Beispiel. Die Näherungswerthe von $\frac{49}{129}$ sind:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5.$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$$

$$\frac{2}{5} = 0{,}4.$$

$$\frac{3}{8} = 0{,}375.$$

$$\frac{8}{21} = 0{,}3809\ldots.$$

$$\frac{11}{29} = 0{,}3793\ldots$$

$$\frac{19}{50} = 0{,}38.$$ Der gegebene Bruch selbst ist:

$$\frac{49}{129} = 0{,}3798\ldots$$

§. 112.

Lehrsatz.

Jeder Bruch $\frac{a}{b}$, der einem gegebenen Bruche $\frac{Z}{N}$ näher kommt, als ein Näherungswerth $\frac{Z_n}{N_n}$, hat einen größeren Nenner und Zähler, als $\frac{Z_n}{N_n}$ (mit einer einzigen am Schlusse des Beweises angegebenen Ausnahme).

Beweis. Da $\frac{Z}{N}$ zwischen $\frac{Z_n}{N_n}$ und $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$ liegt, und zwar näher an $\frac{Z_n}{N_n}$, so muß $\frac{a}{b}$ auch zwischen $\frac{Z_n}{N_n}$ und $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$ liegen; folglich muß der absolute Unterschied zwischen $\frac{Z_n}{N_n}$ und $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$, d. h. $\frac{1}{N_n \cdot N_{n-1}}$ (§. 108. III.) größer sein, als der absolute Unterschied zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$. Dieser letzte Unterschied hat den Nenner $b \cdot N_{n-1}$, und

weil der Zähler nicht kleiner als 1 sein kann, so muß der Nenner $b \cdot N_{n-1} > N_n \cdot N_{n-1}$ sein, d. h. $b > N_n$.

Ferner liegt der Bruch $\frac{b}{a}$ zwischen $\frac{N_n}{Z_n}$ und $\frac{N_{n-1}}{Z_{n-1}}$ (§. 38.), folglich muß wieder der absolute Unterschied zwischen $\frac{N_n}{Z_n}$ und $\frac{N_{n-1}}{Z_{n-1}}$, d. h. $\frac{Z_{n-1} \cdot N_n - Z_n \cdot N_{n-1}}{Z_n \cdot Z_{n-1}}$ oder $\frac{1}{Z_n \cdot Z_{n-1}}$ (§. 108.) größer sein, als der absolute Unterschied zwischen $\frac{b}{a}$ und $\frac{N_{n-1}}{Z_{n-1}}$. Dieser letztere hat den Nenner $a \cdot Z_{n-1}$, und weil der Zähler nicht kleiner als 1 sein kann, so muß der Nenner $a \cdot Z_{n-1} > Z_n \cdot Z_{n-1}$, d. h. $a > Z_n$ sein.

Der Beweis gilt nicht für den ersten Näherungswerth (weil dieser keinen vorhergehenden $\left[\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}\right]$ hat); aber in Bezug auf diesen kann man so schließen: da $\frac{Z_1}{N_1} > \frac{Z}{N}$, so muß nothwendig $\frac{Z_1}{N_1} > \frac{a}{b}$ sein, oder $\frac{1}{Q_1} > \frac{a}{b}$. Da aber a nicht kleiner als 1 sein kann, so muß $b > Q_1$ sein. Was den Zähler a betrifft, so kann dieser zwar nicht kleiner als 1 sein, wohl aber $= 1$, und dies ist die eine im Lehrsatz angegebene Ausnahme, nach welcher also ein Bruch $\frac{a}{b}$, welcher dem Bruche $\frac{Z}{N}$ näher liegt, als der erste Näherungswerth, zwar einen größeren Nenner haben muß, als dieser, aber nicht nothwendig einen größeren Zähler; die Zähler können gleich sein. Ein Beispiel ist der erste Näherungswerth $\frac{1}{2}$ des Bruches $\frac{49}{129}$ im §. 111. Der zweite Näherungswerth $\frac{1}{3}$ liegt natürlich näher an $\frac{49}{129}$, hat aber mit $\frac{1}{2}$ denselben Zähler.

§. 113.

Uebungsaufgaben zum fünften Kapitel.

1) $2{,}1 \cdot [3{,}4 - 0{,}07 + 0{,}0035] - 0{,}2 \cdot [3{,}278 - 4{,}177 + 0{,}90075] = 7$.

2) $0{,}3 \cdot (2{,}4 + 7{,}6 - 0{,}3) - (1{,}5 + 7{,}6 - 0{,}034) : 5{,}25 = 1{,}18314\ldots$

3) $[(2{,}37 - 0{,}905) \cdot 3{,}22 - (0{,}58 - 2{,}335) \cdot 0{,}42] : 0{,}64 = 8{,}5225$.

4) $(0{,}7 \cdot 3{,}2 + 0{,}828 : 0{,}3) : 1{,}25 = 4$.

5) $A = a^2 - 4ab + b^2$. Es sei $a = 0{,}342$ und $b = 1{,}310$, wie groß A? Antw. $A = 0{,}040984$. Man kann $A = (a - b)^2 - 2ab$ setzen.

6) Wenn 0,342 und 1,310 abgekürzte Decimalbrüche sind, wie groß ist

der Fehler in 5) zu schätzen? Antw. Er ist $< 0{,}002904$. Es ist also $A = 0{,}04$ anzunehmen. Es mögen $a + \alpha$ und $b + \beta$ die vollständigen Brüche sein, so ist $(a+\alpha)^2 + (b+\beta)^2 - 4(a+\alpha)(b+\beta)$

$$= a^2 + b^2 - 4ab + 2a\alpha + 2b\beta - 4a\beta - 4b\alpha + \alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha\beta.$$

Der Fehler im Product ist also $(a - 2b)2\alpha + (b - 2a)2\beta + \alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha\beta$. Da $a - 2b$ negativ, $b - 2a$ positiv ist, so ist der ungünstigste Fall, wenn α negativ, β positiv ist. Setzt man dann für α und β die halbe Einheit der dritten Stelle und läßt $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha\beta$ außer Acht, so ist der Fehler kleiner als $(2b - a + b - 2a) \cdot 0{,}001$ oder $(b - a) \cdot 0{,}003 = 0{,}968 \cdot 0{,}003 = 0{,}002904$.

7) Wie groß ist bei dem Producte der abgekürzten Decimalbrüche $22{,}731 \times 0{,}04358$ der Fehler zu schätzen, wie weit also das Product als richtig anzunehmen? Antw. Das Product ist $= 0{,}99061698$. Der Fehler ist $< 0{,}000135445$. Es liegt sonach das richtige Product zwischen den Grenzen 0,99075 und 0,99048. Drei Stellen sind also richtig; für die vierte ist etwa 5 oder 6 zu setzen.

8) $$\frac{3{,}6666\ldots \times 0{,}636363\ldots}{0{,}0111\ldots \times 1{,}9444\ldots} = 108.$$

9) $$\frac{0{,}12222\ldots \times 3{,}5555\ldots}{0{,}272727\ldots \times 2{,}04444\ldots} = \frac{484}{621} = 0{,}779388\ldots.$$

10) Der vierte Näherungswerth von $\frac{138}{727}$ soll, nachdem sein Nenner um 3 verringert ist, zu dem zweiten Näherungswerthe von $\frac{23}{28}$ addirt werden. Wie groß ist die Kubikwurzel aus der Summe? Antw. 1.

11) Den Kettenbruch
$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}}}$$
so umzuformen, daß alle Glieder 1 zum Zähler erhalten.

Auflös. Es entsteht:
$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{4}}}}}$$

12) $$\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a}}}} = \frac{a^3}{a^4 - a^2 + 1}.$$

13) Das neue Preußische Pfund ist = 1 Pfund 2,209158143 Loth des alten Gewichts; wie verhält sich annähernd in den kleinsten Zahlen das alte Pfund zum neuen?

Auflös. Wie 1 : 1, 14 : 15, 29 : 31, 478 : 511, 985 : 1053, 1463 : 1564, u. s. w.

14) Wie verhält sich der alte Centner zum neuen?

Auflös. Wie 1 : 1, 35 : 34, 36 : 35, 71 : 69, 675 : 656, u. s. w. Das genaue Verhältniß ist 110 : 106,903619 ....

15) Wie verhält sich das alte Loth zum neuen?

Auflös. Wie 1 : 1, 7 : 8, 50 : 57, 57 : 65, 335 : 382, u. s. w. Das genaue Verhältniß ist 1 : 1,1403052714 ....

16) Der Planet Mars hat 467 Millionen Kubikmeilen Inhalt, die Venus 2280 Millionen; wie verhalten sich die Inhalte annähernd?

Auflös. Wie 1 : 4, 1 : 5, 8 : 39, 17 : 83.

17) Welche Näherungswerthe hat $\frac{83}{284}$, und um wie viel weicht jeder von $\frac{83}{284}$ ab?

Auflös. Die Näherungswerthe sind: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{17}$, $\frac{7}{24}$ und $\frac{19}{65}$, die Reste: 35, 13, 9, 4, 1; folglich die Differenzen, wenn man immer den Näherungswerth von $\frac{83}{284}$ abzieht (§. 110.):

$$-\frac{35}{3 \cdot 284},\ +\frac{13}{7 \cdot 284},\ -\frac{9}{17 \cdot 284},\ +\frac{4}{24 \cdot 284} \text{ und } -\frac{1}{65 \cdot 284}.$$

18) $$\frac{79}{36} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} - \sqrt{\frac{0{,}45370370370\ldots}{0{,}75}}$$
$$-\left(\frac{1}{10 - 5x} + \frac{2}{5 + 10x}\right) : \frac{1}{2 + 3x - 2x^2} = 1.$$

19) Der periodische Decimalbruch 0,234567901 234567901 ..... soll in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, letzterer gehoben und dann sein Zähler um 101, sein Nenner um 200 vermehrt werden; endlich soll der letzte Näherungswerth des so entstandenen Bruches wieder in einen Decimalbruch verwandelt werden; wie heißt dieser Decimalbruch?

Antw. 0,42708333333 .....

Sechstes Kapitel.

Das Wurzelausziehen aus Zahlen und Buchstabenausdrücken. Regeln über das praktische Rechnen mit Wurzeln. Die Briggsschen Logarithmen.

§. 114.

Einleitung. Das Quadrat und der Kubus numerischer Zahlen.

Das Vergleichen einer Zahl mit ihrem Quadrate, wenn man es nach §. 86. und 87. bildet, führt zu einem bequemen Verfahren,

mittelst dessen aus dem Quadrate die Zahl gefunden werden kann. Es ist z. B. $74^2 = (70 + 4)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 4 + 4^2 = 4900 + 560 + 16 = 5476$. Zunächst bemerkt man, daß die zwei Nullen, mit welchen 4900, und die eine Null, mit welcher 560 endet, nicht zufällig bei diesem Beispiele, sondern bei dem Quadrate jeder zweiziffrigen Zahl vorkommen. Es ist $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, und bezeichnen a die Zehner (70), b die Einer (4), so muß a^2 mit zwei und 2ab mit einer Null enden. Aus diesem Grunde kann man 74 quadriren, wenn man $a = 7$ und $b = 4$ setzt, aber bei der Addition der Glieder a^2, $2ab$, b^2 diese so unter einander setzt, wie sie stehen würden, wenn man die Nullen mit hingeschrieben hätte. Also:

$$74^2 = \begin{array}{r} 49 \\ 56 \\ 16 \\ \hline 5476 \end{array} \qquad \text{Eben so } 87^2 = \begin{array}{r} 64 \\ 112 \\ 49 \\ \hline 7569 \end{array}$$

$$58^2 = \begin{array}{r} 25 \\ 80 \\ 64 \\ \hline 3364 \end{array}$$

Das Verfahren läßt sich auf mehrziffrige Zahlen übertragen, z. B.

$$243^2 = \begin{array}{l} 4 \\ 16 \\ 16 \\ 12 \\ 24 \\ 9 \\ \hline = 59049 \end{array} \qquad \text{oder} = \begin{array}{l} 4 \\ 16 \\ 16 \\ 144 \\ 9 \\ \hline = 59049 \end{array}$$

Grund: $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$, oder
$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$.

Auf ähnliche Weise kann man nach der Formel $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ eine Zahl auf die dritte Potenz erheben. Bedeutet a die Zehner, b die Einer, so endet a^3 mit drei Nullen, $3a^2b$ mit zwei und $3ab^2$ mit einer Null. z. B.

$$74^3 = \begin{array}{r} 343 \\ 588 \\ 336 \\ 64 \\ \hline 405224 \end{array} \qquad 15^3 = \begin{array}{r} 1 \\ 15 \\ 75 \\ 125 \\ \hline 3375 \end{array}$$

§. 115.

Bestimmung der Anzahl der Ziffern einer Wurzel aus der Anzahl der Ziffern des Radicanden.

Aus der Anzahl der Ziffern des Radicanden kann man auf die Anzahl der Ziffern der Wurzel schließen. Es ist $\sqrt{10^{2n}} = 10^n$, also $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{10000} = 100$ u. s. w. Hieraus folgt:

Die Quadratwurzel aus einer

1	oder	2ziffrigen	Zahl	kann nur eine	1ziffrige	Zahl	sein.
3	„	4	„	„	2	„	„
5	„	6	„	„	3	„	„, u. s. w.
2n — 1	„	2n	„	„	n	„	„

Die Wurzel hat also halb so viel Ziffern, als der Radicand; ist aber die Anzahl der Ziffern desselben ungerade, so nimmt man die Hälfte der um 1 vermehrten Anzahl. Praktisch erreicht man dasselbe Resultat durch Eintheilung des Radicanden in Klassen von immer zwei Ziffern, so daß in der zuletzt erzeugten Klasse auch blos eine Ziffer zu stehen braucht; die Anzahl der Klassen stimmt dann mit der Anzahl der Ziffern der Wurzel überein. z. B. $\sqrt{4|41|05|04|01|44}$ ist eine 6ziffrige Zahl. — Es ist nun leicht, die entsprechende Regel für Kubikwurzeln herzuleiten. Da $\sqrt[3]{10^{3n}} = 10^n$ ist, so folgt $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{1000} = 10$, $\sqrt[3]{1000000} = 100$ u. s. w.; daher ist die Kubikwurzel aus einer

1	bis	3ziffrigen	Zahl	eine	1ziffrige	Zahl,	
4	„	6	„	„	2	„	„
7	„	9	„	„	3	„	„ u. s. w.
3n — 2	„	3n	„	„	n	„	„.

Hieraus ergiebt sich, ähnlich wie bei der Quadratwurzel, daß man bei der Kubikwurzel den Radicand in Klassen von immer drei Ziffern theilen muß, so daß in der zuletzt erzeugten Klasse eine oder zwei oder drei Ziffern stehen können; die Anzahl der Ziffern der Kubikwurzel stimmt wieder mit der Anzahl der Klassen überein; z. B. $\sqrt[3]{33|199|964|344}$ ist eine 4ziffrige Zahl. Aus Gründen, welche später folgen, macht man die Eintheilung immer von rechts nach links.

§. 116.

Das Ausziehen der Quadratwurzel aus einem vollständigen Quadrat.

Wählen wir, um die Quadratwurzel auszuziehen, zunächst eine 3= oder 4ziffrige Zahl, z. B. $\sqrt{5476}$, so zeigt die Klasseneinthei=

lung, daß die Wurzel zwei Ziffern hat, also aus Zehnern (a) und Einern (b) besteht. Daher ist $\sqrt{54|76} = a + b$, $5476 = a^2 + 2ab + b^2$.

Man fasse nun folgende Bemerkungen als entscheidend auf:

1) a^2 endet mit zwei Nullen, hat also auf die zwei letzten Ziffern keinen Einfluß, und eben so diese nicht auf a. Macht man daher immer die Klasseneintheilung von rechts nach links, so sind die zwei Nullen auf die zwei Ziffern der letzten Klasse zu rechnen, und man findet a, wenn man aus der ersten Klasse die Wurzel zieht, d. h. die Zahl sucht, deren Quadrat der Zahl in der ersten Klasse am nächsten kommt, ohne größer als sie zu sein, und eine Null anhängt.

$$\begin{array}{r} \sqrt{54|76} = 70 + b \\ \underline{49\,00} \\ 5\,76. \end{array}$$

Hier ist $a = 70$, und zieht man a^2 von 5476 ab, so muß der Rest 576 noch die Glieder $2ab$ und b^2 enthalten.

2) Nun ist aber $2ab > b^2$; denn $a > b$, folglich $ab > b^2$, also um so mehr $2ab > b^2$. Man setzt daher annähernd den Rest $576 = 2ab$ allein; dann ist $b = \frac{576}{2a}$, und man findet also b, indem man mit 2a in den Rest dividirt. Ob so b nicht zu groß geworden ist, erfährt man, wenn man 2ab und b^2 ausrechnet und die Summe vom Rest abzieht.

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{54|76} = \overset{(a)}{70} + \overset{(b)}{4} \\ (a^2 =) & \underline{49\,00} \\ & 5\,76 \\ (2a =) & (1\,40) \\ (2ab =) & \{5\,60\} \\ (b^2 =) & \{\;\;16\} \\ (2ab + b^2 =) & \underline{5\,76} \\ & 0. \end{array}$$

Zu klein kann b auf diese Weise nicht werden; denn bezeichnet r den Rest (576), so folgt aus $2ab + b^2 = r$, daß $2ab < r$, also $b < \frac{r}{2a}$ ist.

3) Man kürzt dieses Verfahren zuerst dadurch ab, daß man die Nullen, welche bei jedem Beispiele vorkommen müssen, also die zwei Nullen, mit welchen a^2 endet, und die eine Null, mit der a,

2a und 2ab enden, **fortläßt**, die andern Ziffern aber in die ihnen zukommenden Stellen setzt; dann aber auch dadurch, **daß man** $2ab + b^2$ **in der Form** $(2a + b) \cdot b$ **ausrechnet**. Da 2a mit einer Null endet und b eine einziffrige Zahl ist, so setzt man b in die Stelle der Null und multiplicirt die entstandene Zahl mit b. So erhält man folgende Darstellung:

$$\sqrt{54|76} = \overset{(a)}{7}\overset{(b)}{4}$$

	54|76
$(a^2 =)$	49
	5 76
$(2a + b =)$	(14 4)
$[(2a + b) \cdot b =]$	5 76
	0.

Beispiel 2. $\sqrt{75|69} = 87.$

64
11 69
(16 7)
11 69
0.

3. $\sqrt{3364} = 58.$

4. $\sqrt{676} = 26.$

Es ist nun leicht, dieses Verfahren auf Wurzeln, deren Radicand mehr als zwei Klassen hat, auszudehnen. Hat er drei Klassen, so hat die Wurzel drei Ziffern, besteht also aus Hunderten (a), Zehnern (b) und Einern (c), ist also $= a + b + c$; der Radicand $= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$. Nun endet $(a + b)^2$ wieder mit zwei Nullen; man findet also $a + b$, wenn man aus den beiden ersten Klassen die Wurzel zieht und eine Null anhängt. Ist dann $(a + b)^2$ vom Radicand abgezogen, so findet man c, wenn man mit $2(a + b)$ in den Rest dividirt. Hat der Radicand vier Klassen, so zieht man zunächst aus den drei ersten Klassen die Wurzel u. s. w.; z. B.

$\sqrt{22|37|29} = 473;$

16
6 37
(8 7)
6 09
28 29
(94 3)
28 29

$\sqrt{11|66|90|56} = 3416$

9
2 66
(6 4)
2 56
10 90
(68 1)
4 09 56
(682 6)
4 09 56

$$\sqrt{5|47|82|21|11|36} = 234056$$

4
___
147
(43)
129
___
1882
(464)
1856
___
262111
(46805)
234025
___
2808636
(468106)
2808636

Zur Uebung. 1) $\sqrt{8281} = 91$; 2) $\sqrt{110889} = 333$;
3) $\sqrt{277729} = 527$; 4) $\sqrt{83064996} = 9114$;
5) $\sqrt{4222140484} = 64978$; 6) $\sqrt{44105040144} = 210012$;
7) $\sqrt{160881292626610609} = 401100103$;
8) $\sqrt{3737373414351721} = 61134061$;
9) $\sqrt{100020001} = 10001$;
10) $\sqrt{186711476424322756} = 432101234$.

§. 117.

Das Ausziehen der Kubikwurzel aus einem vollständigen Kubus.

Das Ausziehen der Kubikwurzel schließt sich an die Formel $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ an und ist dem Verfahren beim Ausziehen der Quadratwurzel analog. Man theilt den Radicand in Klassen von immer drei Ziffern (§. 115.), und hat er zunächst zwei Klassen, z. B. $\sqrt[3]{405224}$, so besteht die Kubikwurzel aus Zehnern (a) und Einern (b), ist also $= a + b$, daher der Radicand $405224 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Nun endet a^3 mit drei Nullen; folglich findet man a, wenn man (die Klasseneintheilung von rechts nach links vorausgesetzt) aus der ersten Klasse die Kubikwurzel zieht und eine Null anhängt.

Für das vorliegende Beispiel entnimmt man aus der Tafel der Kubikzahlen:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kubus:	1	8	27	64	125	216	343	512	729

a = 70, und zieht man a^3 vom Radicand ab, so muß der Rest 62224 gleich $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ sein.

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{405|224} = \overset{(a)}{70} + b \\ 343\,000 \\ \hline 62\,224 \end{array}$$

Von diesen drei Gliedern ist $3a^2b$ das größte; denn es ist

1) $a > b$ und 2) $a^2 > b^2$

$\underline{3ab = 3ab}$, folglich $\underline{3b > b}$, folglich

$3a^2b > 3ab^2$ $3a^2b > b^3$.

Man setzt daher annähernd $62224 = 3a^2b$ allein und findet sonach b, wenn man mit $3a^2$ in den Rest dividirt. Ob so b nicht zu groß wird, erfährt man, wenn man die Glieder $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3 ausrechnet und ihre Summe vom Reste abzieht.

$$\begin{array}{rr} & \sqrt[3]{405|224} = \overset{(a)}{70} + \overset{(b)}{4} \\ (a^3 =) & 343\,000 \\ \hline & 62\,224 \\ (3a^2 =) & (14\,700) \\ (3a^2b =) & 58\,800 \\ (3ab^2 =) & 3\,360 \\ (b^3 =) & 64 \\ \hline & 62\,224 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Zu klein kann b nicht werden; denn bezeichnet r den Rest, so ist $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = r$, folglich $3a^2b < r$, also $b < \frac{r}{3a^2}$.

Man kürzt das Verfahren durch Fortlassen der Nullen ab, welche, von dem besonderen Beispiele unabhängig, bei jedem vorkommen, und erhält die gewöhnliche Darstellung:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{405|224} = 74 \\ 343 \\ \hline 62\,224 \\ (147) \\ 58\,8 \\ 3\,36 \\ 64 \\ \hline 62\,224 \\ \hline 0 \end{array}$$

Man kann auch $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ in der Form $(3a^2 + 3ab + b^2)b$ ausrechnen, wie folgt:

$$\sqrt[3]{405|224} = 74$$

```
 343
 62 224
⎧147
⎨  84
⎩   16
(15 556)  [= 3a² + 3ab + b²]
 62 224
      0
```

Die Anwendung auf Zahlen mit mehr als zwei Klassen ist nach dem, was bei Quadratwurzeln hierüber gesagt wurde, leicht. z. B.

$$\sqrt[3]{44|361|864} = 354$$

```
 27
 17 361
 (27)
⎧135
⎨ 225
⎩  125
 15 875
  1 486 864
  (3675)
 ⎧14700
 ⎨  1680
 ⎩     64
  1 486 864
          0
```

$$\sqrt[3]{238|501|021|853|375} = 62015.$$

```
 216
  22 501
 (108)
⎧216
⎨  72
⎩   8
  22 328
     173 021 853
    ⎧115 3200
    ⎨    1860
    ⎩       1
     115 338 601
      57 683 252 375
     (11 535 7203)
     ⎧57 678 6015
     ⎨    4 650 75
     ⎩         125
      57 683 252 375
                  0.
```

Zur Uebung. 1) $\sqrt[3]{79507} = 43$; 2) $\sqrt[3]{195112} = 58$;
3) $\sqrt[3]{941192} = 98$; 4) $\sqrt[3]{34012224} = 324$;
5) $\sqrt[3]{221445125} = 605$; 6) $\sqrt[3]{1367631} = 111$;
7) $\sqrt[3]{337153536} = 696$; 8) $\sqrt[3]{33199964344} = 3214$.
9) $\sqrt[3]{8124237632727} = 20103$.

§. 118.

Das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel aus unvollständigen Quadraten und Kuben. Die irrationale Zahl.

Geht die Quadrat- oder Kubikwurzel aus einer ganzen Zahl nicht auf, so findet man durch das Verfahren im vorigen §. zunächst zwei auf einander folgende ganze Zahlen, zwischen welchen der Werth der Wurzel liegen muß.

So findet man z. B., daß $\sqrt{555}$ zwischen 23 und 24 liegt; folglich ist $\sqrt{555}$ keine ganze Zahl, aber auch keine gebrochene, weil eine solche potenzirt, wieder eine gebrochene Zahl giebt (§. 76. 7). Eben so wenig kann $\sqrt{555}$ ein periodischer Decimalbruch sein, denn dieser läßt sich in einen gemeinen Bruch verwandeln. Annähernd kann man aber $\sqrt{555}$ berechnen. Gewöhnlich geschieht dies in Form eines Decimalbruches auf folgende Art: Man setzt $\sqrt{555} = \sqrt{555{,}00} = \sqrt{555{,}0000} = \sqrt{555{,}000000}$ u. s. w., zieht nun aus Zähler und Nenner die Wurzel und dividirt dann. Natürlich wird man also eine solche Anzahl von Nullen anhängen, daß die Wurzel aus dem Nenner aufgeht: bei Quadratwurzeln eine gerade Anzahl, bei Kubikwurzeln eine durch 3 theilbare. Weil nun bei der Klasseneintheilung ein Theilstrich immer dahin kommt, wo das Komma steht, also die Nullen beginnen, so ist es bequem, letztere erst dann anzuhängen, wenn man sie braucht, nämlich an den Rest, nachdem die Ziffern der gegebenen Zahl erschöpft sind. An diesen Rest und an die folgenden Reste hängt man also immer 2, oder 3 Nullen an, je nachdem die 2te, oder 3te Wurzel auszuziehen ist. Hängt man zum ersten Male Nullen an, so setzt man in das Resultat das Decimalkomma und hat dadurch, so weit man auch rechnen mag, ein für alle Mal durch die Wurzel aus dem Nenner dividirt. z. B.

$\sqrt{5|55} = 23$
4
1 55
(43)
1 29
26

$\sqrt{5|55} = 23{,}5584\ldots$

```
 4
 ----
 1 55
  (43)
 1 29
 ------
   2600
   (465)
   2325
 --------
    27500
    (4705)
    23525
 ---------
     397500
     (47108)
     376864
 -----------
     2063600
     (471164)
     1884656
 ------------
      178944
      u. s. w.
```

$\sqrt[3]{555} = 8{,}2179\ldots\ldots$

```
 512
 -----
  43000
 (192)
  384
   96
    8
 -------
  39368
 ---------
  3632000
  20172
   2461
 ---------
  2019661
 ------------
  1612339000
  (2022123)
  14154861
    120687
       343
 ------------
  1416693313
 --------------
  195645687000
  (202557267)
  u. s. w.
```

Da die Wurzel nie aufgeht, so erscheint $\sqrt{555}$ als ein Bruch, dessen Zähler und Nenner unendlich viele Ziffern haben $\left(\sqrt{555} = \frac{235584\ldots.}{10000\ldots.}\right)$, der sich also durch die numerische ganze oder gebrochene Zahl nicht genau angeben läßt, dessen Werth aber zwischen Grenzen liegt, welche nicht allein durch numerische Zahlen bestimmt angegeben werden können, sondern welche sich auch nach Belieben nahe aneinander rücken lassen, so daß ihr Unterschied immer kleiner und kleiner wird und sich ohne Aufhören der Null nähert. Denn es liegt $\sqrt{555}$

zwischen 23 und 24
" 23,5 " 23,6
" 23,55 " 23,56
" 23,558 " 23,559
" 23,5584 " 23,5585 u. s. w. Jede Zahl, welche diese Eigenschaft hat, nennt man eine **irrationale** (auch incommensurabele) **Zahl**. Im Gegensatz zur irrationalen Zahl heißt nun jede Zahl eine **rationale** (commensurabele), wenn sie sich in eine bestimmte ganze

oder gebrochene Zahl oder in Null verwandeln läßt. Irrational ist z. B. jede nte Wurzel aus einer ganzen Zahl, welche nicht die nte Potenz einer andern ganzen Zahl ist ($\sqrt[n]{2}$, $\sqrt[n]{3}$, $\sqrt[n]{5}$, ..., auch $\sqrt[n]{4}$, wenn $n > 2$).

Die irrationalen Zahlen sind, wie die rationalen, reelle Zahlen. In §. 18. haben wir uns die ganzen Zahlen durch Punkte versinnlicht, welche in gleichen Abständen in einer Linie neben einander lagen. In §. 37. haben wir zwischen diese Punkte andere Punkte eingeschaltet, um auch die gebrochenen Zahlen zu versinnlichen. Jetzt können wir uns auch die irrationalen Zahlen eingeschaltet denken, d. h. wir können uns die Grenzwerthe eintragen, zwischen welchen eine irrationale Zahl liegt, können (durch genauere Berechnung der irrationalen Zahl) diese Grenzen, also auch die ihnen entsprechenden Punkte, immer näher an einander rücken und uns so dem wahren Punkte, welcher die irrationale Zahl versinnlicht, beliebig weit nähern. So lange wir nur rationale Zahlen kannten, hatten wir immer noch nicht alle Punkte der Linie; erst die irrationale Zahl in Verbindung mit der rationalen läßt jeden Punkt der Linie als die Versinnlichung einer Zahl erscheinen. So liegen z. B. zwischen den Punkten, welche $+1$ und $+2$ vorstellen, zunächst Punkte für alle rationalen Brüche zwischen 1 und 2, dann aber noch Punkte für unendlich viele irrationale Zahlen, z. B. für alle irrationalen Wurzeln zwischen $\sqrt[n]{1}$ und $\sqrt[n]{2^n}$, für zusammengesetzte irrationale Zahlen: $\sqrt[n]{1 + \sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{3 - \sqrt{2}}$ u. s. w.

Durch diese Vorstellung wird der geometrische Begriff der **Stetigkeit** in die Arithmetik übertragen. Wenn wir uns z. B. den

A B C

u. s. w. -3 -2 -1 0 $+1$ $+2$ $+3$ u. s. w.

Punkt B bis nach C hin bewegt denken, so durchläuft er alle Punkte, welche zwischen B und C liegen; wir sagen: B hat seinen Ort stetig geändert. Denken wir uns hierbei B als Endpunkt der Linie AB, so sagen wir: AB ist bis zur Größe AC stetig verlängert worden; AB hat dann nach und nach alle Längen erhalten, welche zwischen AB und AC denkbar sind. Sind B und C die Punkte, welche die Zahlen $+1$ und $+2$ vorstellen, so sagen wir endlich: **der Buchstabe x hat seinen Werth, von $x = 1$ bis $x = 2$ wachsend, stetig geändert**, und meinen damit, **daß dem x nach und nach alle stetig auf einander folgenden Zahlenwerthe von $+1$ bis $+2$ beigelegt worden sind**, wie sie durch die stetig auf einander folgenden Punkte der Länge BC repräsentirt werden. Die stetige

Aenderung einer Zahl erhält später eine große Wichtigkeit, auf welche wir hiermit aufmerksam gemacht haben wollen.

Schließlich ist noch zu bemerken, daß, wenn das praktische Rechnen mit irrationalen Zahlen mittelst eines ihrer Grenzwerthe geschieht, die Beurtheilung des Fehlers (§. 102.) nicht außer Acht zu lassen ist. Soll z. B. $\frac{7}{\sqrt{2}}$ ausgerechnet werden, und man hat $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ gefunden, durch die Division aber $4{,}95049\ldots$ erhalten, so beurtheilt man den Fehler so: Setzt man $1{,}414 = a$ und den Rest $= \alpha$, so ist $\frac{7}{a+\alpha} = \frac{7}{a} - \frac{7\alpha}{a(a+\alpha)}$. Kennt man die vierte Stelle in $1{,}414\ldots$ nicht, so muß man $\alpha < 0{,}001$ setzen, und läßt man im Nenner von $\frac{7\alpha}{a(a+\alpha)}$, α als unbedeutend fort, so folgt, daß der Fehler kleiner als $\frac{7}{1{,}414^2} \cdot 0{,}001$ oder $0{,}0035\ldots.$ ist. Es ist also $\frac{7}{\sqrt{2}} = 4{,}95$ zu setzen. Genau ist $\frac{7}{\sqrt{2}} = 4{,}94974\ldots.$

Zur Uebung. 1) $\sqrt{13} = 3{,}60555127\ldots$;

2) $\sqrt[3]{13} = 2{,}35133468\ldots$; 3) $\sqrt{90100} = 300{,}166\ldots$;

4) $\sqrt[3]{589} = 8{,}38246\ldots$; 5) $\sqrt[3]{7418} = 19{,}5027\ldots$

Wurzeltafel.

Radicand.	Quadratwurzel.	Kubikwurzel.
2	1,4142136	1,2599210
3	1,7320508	1,4422496
4	2,0000000	1,5874011
5	2,2360680	1,7099759
6	2,4494897	1,8171206
7	2,6457513	1,9129312
8	2,8284271	2,0000000
9	3,0000000	2,0800837
10	3,1622777	2,1544347
11	3,3166248	2,2239800
12	3,4641016	2,2894285

§. 119.

Das Wurzelausziehen aus Decimalbrüchen.

Um aus einem Decimalbruche die Wurzel zu ziehen, nimmt man zunächst darauf Bedacht, daß aus dem Nenner die Wurzel aufgehe. Man erreicht dies dadurch, daß man durch Anhängen von Nullen bei Quadratwurzeln eine gerade, bei Kubikwurzeln eine durch 3 theilbare Anzahl von Decimalstellen erzeugt. Zieht man nun aus dem Zähler die Wurzel, so muß ein Theilstrich dahin kommen, wo das Komma steht. Dies giebt Veranlassung, die Klasseneintheilung mit diesem Theilstrich zu beginnen und von ihm aus nach rechts und links hin abzutheilen. Enthält dann die letzte Klasse nicht die nöthige Anzahl Ziffern, so hängt man Nullen an, und kann noch so viel weitere Klassen mit Nullen ausfüllen, als zu der beabsichtigten Genauigkeit erforderlich sind. In der Regel hängt man die Nullen erst dann an, wenn man sie braucht. Sobald die erste Klasse nach dem Komma in die Rechnung gezogen wird, setzt man in das Resultat das Decimal-Komma. z. B.

$\sqrt{2|00,|34|5} = 14,154\ldots;$

```
 1
———
 100
 (24)
  96
————
  434
 (281)
—————
  15350
  (2825)
  14125
———————
   122500
   (28304)
   113216
—————————
u. s. w.
```

$\sqrt{0,|00|50} = 0,0707106\ldots..$

```
    49
——————
 10000
 (1407)
  9849
———————
  15100
 (14141)
————————
   9590000
  (1414206)
   8485236
———————————
   u. s. w.
```

Zur Uebung. 1) $\sqrt{0,4} = 0,632455\ldots;$ 2) $\sqrt[3]{0,1} = 0,464158\ldots;$

3) $\sqrt[3]{1405,3212} = 11,20104\ldots;$ 4) $\sqrt[3]{32,8119} = 3,201428\ldots;$

5) $\sqrt[3]{0,27} = 0,64633\ldots;$ 6) $\sqrt{1026,04967} = 32,0320100836\ldots;$

7) $\sqrt{6451699,37} = 2540,0195609\ldots;$

8) $\dfrac{\sqrt{354,9456}}{37,5} - \dfrac{\sqrt[3]{0,00013344}}{0,875} = 0,444;$

9) $\dfrac{0,3\cdot\sqrt{0,003865}}{0,2\cdot\sqrt[3]{0,009265}} = 0,444.$

Anmerkung. Wenn man die Quadrat- oder Kubikwurzel aus einer Zahl gezogen und die ersten n Ziffern gefunden hat, und nun den Rest bezüglich durch $2a$ und $3a^2$ dividirt, so giebt der Quotient die nächsten $n-1$ Ziffern so genau, daß nur die letzte um eine Einheit zu groß sein kann.

Beweis. Wir können annehmen, daß die gefundene n ziffrige Zahl (a) Ganze sind, der Rest (b) also ein ächter Decimalbruch ist; denn setzt man das Komma an das Ende einer beliebigen Klasse, so werden die Ziffern der Wurzel nicht geändert. Ist nun A der Radicand, so folgt:

1) für die Quadratwurzel: $a^2 + 2ab + b^2 = A$, folglich, wenn man von beiden Seiten $a^2 + b^2$ abzieht und dann noch durch $2a$ dividirt: $b = \frac{A - a^2}{2a} - \frac{b^2}{2a}$. Da nun $b < 1$ und $a > 10^{n-1}$ ist, so folgt $\frac{b^2}{2a} < \frac{1}{10^{n-1}}$; daher hat $\frac{b^2}{2a}$ auf die ersten $n-1$ Decimalstellen (d. h. auf die nächsten $n-1$ Ziffern hinter a) keinen Einfluß. Nur durch die Subtraction $\frac{A - a^2}{2a} - \frac{b^2}{2a}$ kann die letzte Ziffer um 1 kleiner werden.

2) Für die Kubikwurzel hat man ganz analog:
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = A$, folglich $b = \frac{A - a^3}{3a^2} - \frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{3a^2}$, u. s. w.

Beispiel. Den Werth des Ausdrucks $\sqrt{\frac{8x^2 + 10x - 12}{4x^2 + 21x - 18}}$ für $x = \frac{3}{4}$ auf 12 Decimalstellen genau auszurechnen.

Auflös. Man erhält mit Hülfe von §. 91. das Resultat:

$$\sqrt{\frac{22}{27}} = \sqrt{\frac{66}{81}} = \frac{1}{9}\sqrt{66} = 0{,}902670933848\ldots.$$

§. 120.

Das Wurzelausziehen aus algebraischen Summen.

Das Wurzelausziehen aus algebraischen Summen geschieht in der Regel in der Voraussetzung, daß die Wurzel aufgehen wird, und ist dem Verfahren bei Zahlen analog. Es schließt sich unmittelbar an die Formeln in §. 87. an. Wir ordnen zuerst die Glieder des Radicanden nach den Potenzen eines Buchstaben, etwa nach den steigenden Potenzen von x. Die Wurzel ist dann wieder eine nach den steigenden Potenzen von x geordnete Summe, welche durch $a + b + c + d + e \ldots$ bezeichnet werden mag.

I. Das Quadratwurzelausziehen. Erhebt man $a + b + c + d + \ldots$ auf das Quadrat, so enthält a^2 die niedrigste Potenz von x, ist also das erste Glied des Radicanden. Man ziehe also aus dem ersten Gliede die Wurzel, so hat man a. Nachdem a^2 vom Radicand abgezogen ist, hat von den Gliedern des Restes $2ab$ die

niedrigste Potenz von x; man dividire also mit $2a$ in das erste Glied des Restes, so hat man b, und ziehe noch $2ab + b^2$ vom Rest ab. Von den übrigen Gliedern hat $2ac$ die niedrigste Potenz von x, ist also das erste Glied des neuen Restes; man dividire mit $2a$ in dasselbe, so hat man c. Nachdem dann $2(a+b)c + c^2$ wieder abgezogen, ist das erste Glied des neuen Restes $= 2ad$; man dividire also mit $2a$ in dieses Glied, so hat man d, und kann nun wieder $2(a+b+c)\,d + d^2$ abziehen, u. s. w. Man beachte hierbei, daß man nach jeder Subtraction im Ganzen immer ein vollständiges Quadrat abgezogen hat, wie dies aus der im §. 87. hinter den Formeln I. und II. gemachten Bemerkung hervorgeht. Bleibt also ein Rest $= 0$, so ist ein vollständiges Quadrat abgezogen; der Radicand ist diesem Quadrate gleich, und das Resultat die gesuchte Wurzel. — Ist der Radicand nach den fallenden Potenzen von x geordnet, so ergiebt sich auch die Wurzel nach den fallenden Potenzen von x geordnet.

II. Das Kubikwurzelausziehen schließt sich eben so an die Formel §. 87. II. an. Das erste Glied ist a^3, und das erste Glied des 1sten, 2ten, 3ten, ... Restes ist entsprechend $3a^2b$, $3a^2c$, $3a^2d$, ...

Beispiel 1.

$$\text{Resultat} = \overset{(a)}{2x^2} - \overset{(b)}{3x^3} + \overset{(c)}{\tfrac{1}{2}x^5} - \overset{(d)}{4x^6}$$

$$\sqrt{4x^4 - 12x^5 + 9x^6 + 2x^7 - 19x^8 + 24x^9 + \tfrac{1}{4}x^{10} - 4x^{11} + 16x^{12}}$$

$$4x^4$$

$$(2a =)\ 4x^2 \mid -12x^5 + 9x^6 + 2x^7 - 19x^8 + 24x^9 + \tfrac{1}{4}x^{10} - 4x^{11} + 16x^{12}$$

$$-12x^5 + 9x^6$$

$$(2a + 2b =)\ 4x^2 - 6x^3 \mid +2x^7 - 19x^8 + 24x^9 + \tfrac{1}{4}x^{10} - 4x^{11} + 16x^{12}$$

$$+2x^7 - 3x^8 \qquad + \tfrac{1}{4}x^{10}$$

$$(2a + 2b + 2c =)\ 4x^2 - 6x^3 + x^5 \mid -16x^8 + 24x^9 \qquad -4x^{11} + 16x^{12}$$

$$-16x^8 + 24x^9 \qquad -4x^{11} + 16x^{12}.$$

Beispiel 2.

$$\text{Resultat} = \overset{(a)}{\tfrac{2}{3}x^2} + \overset{(b)}{x^3} - \overset{(c)}{x^4} - \overset{(d)}{2x^5}$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{8}{27}x^6 + \tfrac{4}{3}x^7 + \tfrac{2}{3}x^8 - \tfrac{17}{3}x^9 - 9x^{10} + 5x^{11} + 19x^{12} + 6x^{13} - 12x^{14} - 8x^{15}}$$

$$\tfrac{8}{27}x^6$$

$$(3a^2 =)\ \tfrac{4}{3}x^4 \mid + \tfrac{4}{3}x^7 + \tfrac{2}{3}x^8 - \tfrac{17}{3}x^9 - 9x^{10} + 5x^{11} + 19x^{12} + 6x^{13} - 12x^{14} - 8x^{15}$$

$$+ \tfrac{4}{3}x^7 + 2x^8 + x^9$$

$$[3(a+b)^2 =]\ \tfrac{4}{3}x^4 + 4x^5 + 3x^6 \mid -\tfrac{4}{3}x^8 - \tfrac{20}{3}x^9 - 9x^{10} + 5x^{11} + 19x^{12} + 6x^{13} - 12x^{14} - 8x^{15}$$

$$-\tfrac{4}{3}x^8 - 4x^9 - 3x^{10}$$

$$+2x^{10} + 3x^{11} - x^{12}$$

$$[3(a+b+c)^2 =]\ \tfrac{4}{3}x^4 + 4x^5 - x^6 - 6x^7 + 3x^8 \mid -\tfrac{8}{3}x^9 - 8x^{10} + 2x^{11} + 20x^{12} + 6x^{13} - 12x^{14} - 8x^{15}$$

$$-\tfrac{8}{3}x^9 - 8x^{10} + 2x^{11} + 12x^{12} - 6x^{13}$$

$$+ 8x^{12} + 12x^{13} - 12x^{14} - 8x^{15}$$

$$0.$$

Zuweilen erscheint das Ordnen nach den Potenzen eines Buchstaben unbequem, weil es ohne das Zusammenfassen mehrerer Glieder in ein Glied nicht auszuführen ist; dann suche man wenigstens nach dem Alphabet zu ordnen, ordne aber diejenigen Glieder, welche denselben Buchstaben haben, nach dessen Potenzen z. B.

$\sqrt{4a^2 + 1 - 4a - \frac{4a}{c} + \frac{2}{c} + \frac{1}{c^2}}$. Man ordne etwa so:

$\sqrt{1 - 4a + 4a^2 + \frac{2}{c} - \frac{4a}{c} + \frac{1}{c^2}}$; dann erhält man $1 - 2a + \frac{1}{c}$.

Aehnlich ordnend erhält man:

$$\sqrt[3]{1 - 8a^3 + \frac{3}{c} + 12a^2 + \frac{3}{c^2} + \frac{12a^2}{c} - 6a - \frac{6a}{c^2} - \frac{12a}{c} + \frac{1}{c^3}}$$
$$= 1 - 2a + \frac{1}{c}.$$

Man kann das Wurzelausziehen auch bei unvollständigen Quadraten und Kuben anwenden und erhält dann als Resultat eine Summe von unendlich vielen Gliedern, welche nach den Potenzen des Buchstaben geordnet sind, nach dessen Potenzen der Radicand geordnet ist. Uebrigens werden wir später bequemere Wege für eine solche Umformung finden. z. B.

$$\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \text{u. s. w.}$$

$$\begin{array}{l}
1 \\
2 \,|\, -x \\
\quad -x + \frac{1}{4}x^2 \\
2 - x \,|\, -\frac{1}{4}x^2 \\
\qquad -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{64}x^4 \\
2 - x - \frac{1}{4}x^2 \,|\, -\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{64}x^4 \\
\qquad\qquad -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{64}x^5 + \frac{1}{256}x^6 \\
2 - x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 \,|\, -\frac{5}{64}x^4 - \frac{1}{64}x^5 - \frac{1}{256}x^6, \text{ u. s. w.}
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{1 - x^3} = 1 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^6 - \frac{5}{81}x^9 - \frac{10}{243}x^{12} - \text{u. s. w.}$$

Für das Ausziehen der Quadratwurzel merke man noch: Man findet $\sqrt{1 - 2x + x^2} = 1 - x$, aber auch $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 1$,

d. h. man kann $1-x$ und $-(1-x)$ als Resultat erhalten. So lange wir nur absolute Wurzeln gelten lassen (§. 55.), ist nur **ein** Resultat richtig, nämlich $1-x$, oder $-(1-x)$, je nachdem $1>x$, oder $1<x$ ist. So lange man hierüber in Ungewißheit ist, setzt man also $\sqrt{1-2x+x^2}=\left\{\begin{matrix}1-x, \text{ oder} \\ x-1\end{matrix}\right\}$; läßt man aber reelle Wurzeln zu, so hat $\sqrt{1-2x+x^2}$ wirklich zwei Werthe, und es ist dann $\sqrt{1-2x+x^2}=\pm(1-x)$.

Anmerkung. Will man vor der Ausziehung der Wurzel aus einer algebraischen Summe versuchen, ob die Wurzel aufgeht, so setze man für die Buchstaben Zahlen, etwa 0, 1, -1, 2, u. s. w., doch solche, daß der Radicand rational wird, und sehe zu, ob die Wurzel aus der entstandenen Zahl aufgeht. Geht sie auch nur in einem Falle nicht auf, so geht sie auch aus der algebraischen Summe nicht auf.

Zur Uebung. 1) $\sqrt{4-12a+25a^2-24a^3+16a^4}=\pm(2-3a+4a^2)$.

2) $\sqrt{4b^2-12ab+11a^2-\frac{3a^3}{b}+\frac{a^4}{4b^2}}=\pm\left(2b-3a+\frac{a^2}{2b}\right)$.

3) $\sqrt{\frac{9a^4}{25b^2}-\frac{3a^2}{5b}+\frac{25}{4}-\frac{5b}{a^2}+\frac{25b^2}{a^4}}=\pm\left(\frac{3a^2}{5b}-\frac{1}{2}+\frac{5b}{a^2}\right)$.

4) $\sqrt{16-24a+25a^2-20a^3+10a^4-4a^5+a^6}=\pm(4-3a+2a^2-a^3)$.

5) $\sqrt{1+4a+20a^4-16a^5+16a^6}=\pm(1+2a-2a^2+4a^3)$.

6) $\sqrt{\frac{4}{a^2}-\frac{4}{a^3b^2}+\frac{13}{a^4b^4}-\frac{6}{a^5b^6}+\frac{9}{a^6b^8}}=\pm\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{a^2b^2}+\frac{3}{a^3b^4}\right)$.

7) $\sqrt{\frac{4a^2}{9b^4}-\frac{4ac}{3b^2}+5c^2+27\frac{b^6c^5}{a^3}+81\frac{b^8c^6}{4a^4}}=\pm\left(\frac{2a}{3b^2}-c+\frac{3b^2c^2}{a}+\frac{9b^4c^3}{2a^2}\right)$.

8) $\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{2}{3}a^2b-\frac{20a^6}{27b}+\frac{32a^{10}}{243b^3}+\frac{16a^{12}}{729b^4}}=\pm\left(\frac{b}{2}+\frac{2}{3}a^2-\frac{4}{9}\frac{a^4}{b}-\frac{4}{27}\frac{a^6}{b^2}\right)$.

9) $\sqrt{\frac{4a^{2n+2}}{b^{2p}c^6}-\frac{8a^{2n}}{3b^{3p}}+\frac{4a^{2n-4}c^{12}}{27b^{5p}}+\frac{a^{2n-6}c^{18}}{81b^{6p}}}=\pm\left(\frac{2a^{n+1}}{b^pc^3}-\frac{2a^{n-1}c^3}{3b^{2p}}-\frac{a^{n-3}c^9}{9b^{3p}}\right)$.

10) $\sqrt{36\sqrt[3]{a}-36\sqrt{a}-15\sqrt[3]{a^2}+12\sqrt[6]{a^5}+4a}=\pm(6\sqrt[6]{a}-3\sqrt[3]{a}-2\sqrt{a})$.

11) $\sqrt{\frac{4a}{9\sqrt[3]{b^2}}+\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}+\frac{19}{12}-\frac{3\sqrt[3]{b}}{2\sqrt{a}}+\frac{\sqrt[3]{b^2}}{4a}}=\pm\left(\frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{b}}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}\right)$.

12) $\sqrt[3]{1+3x-5x^3+3x^5-x^6}=1+x-x^2$.

13) $\sqrt[3]{27-27x^3+5x^9-\frac{1}{3}x^{15}-\frac{1}{27}x^{18}}=3-x^3-\frac{1}{3}x^6$.

14) $\sqrt[3]{8a^3-4a^2b+\frac{32}{3}ab^2-\frac{91}{27}b^3+\frac{40}{9}\frac{b^4}{a}-\frac{25}{36}\frac{b^5}{a^2}+\frac{125}{216}\frac{b^6}{a^3}}=2a-\frac{1}{3}b+\frac{5}{6}\frac{b^2}{a}$.

15) $$\sqrt[3]{\frac{8b}{27\sqrt{a^3}}+\frac{4\sqrt[3]{b^2}}{3a}+\frac{2\sqrt[3]{b}}{3\sqrt{a}}-\frac{17}{3}-\frac{9\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}+\frac{5a}{\sqrt[3]{b^2}}+\frac{19\sqrt{a^3}}{b}+\frac{6a^2}{\sqrt[3]{b^4}}-\frac{12\sqrt{a^5}}{\sqrt[3]{b^5}}-\frac{8a^3}{b^2}}$$
$$=\frac{2\sqrt[3]{b}}{3\sqrt{a}}+1-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}-\frac{2a}{\sqrt[3]{b^2}}.$$

16) $$\frac{\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{32+9a\sqrt{a}}{4}\cdot a\sqrt{a}}-\sqrt[3]{\frac{8}{27}+\frac{9}{2}a^3-\frac{16+27a^3}{8}\cdot a\sqrt{a}}}{\frac{1+a\sqrt{a}}{(2+a\sqrt{a})\,a\sqrt{a}}+\frac{1}{2-a\sqrt{a}}}$$
$$=(4-a^3)\cdot a\sqrt{a}.$$

17) $$\left[\sqrt{1-2\sqrt{a}+a}+\sqrt[3]{\frac{27}{8}+\frac{9}{2}a+\frac{27+4a}{4}\sqrt{a}}\right]:\frac{1}{\frac{2}{5}-\frac{1}{\frac{5}{4}+\frac{1}{\frac{4}{5}\sqrt{a}}}}$$
$$=\frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$$ (absol. Wurz. und $1 > a$ vorausgesetzt).

18) $$\frac{10x^2+4y^2}{2xy}+\sqrt{\frac{x^4+4x^2y^2+4y^4}{x^4-2x^3y+x^2y^2}}-\frac{1}{1+\frac{1}{x+\frac{1}{-2+\frac{2x-4xy}{x-y-2xy}}}}$$
$$=\frac{5x^3+y^3}{y(x^2-y^2)}$$ (absol. Wurz. und $x > y$ vorausgesetzt).

19) $$\sqrt{a+(1+\sqrt{a})^2+(a+\sqrt{a})^2}=1+\sqrt{a}+a.$$

20) $$\sqrt{(2+3\sqrt{a}+a)^2+(1+3\sqrt{a}+2a)^2+(2+3\sqrt{a}+2a)^2}$$
$$=3+5\sqrt{a}+3a.$$

§. 121.

Das Ausziehen höherer Wurzeln.

Für das Ausziehen einer 4ten, 5ten, 6ten, ... Wurzel geben die Formeln für $(a+b)^4$, $(a+b)^5$, $(a+b)^6$, ... ein analoges Verfahren, dessen Schwierigkeit und Weitläuftigkeit mit dem Wurzelexponenten wächst. Bei numerischen Zahlen wendet man in diesem Falle Logarithmen an. Hat aber der Wurzelexponent nur die einfachen Theiler 2 und 3, so kann man die Wurzel auf Quadrat- und Kubik-

wurzeln mittelst der Formel $\sqrt[nm]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ zurückführen. z. B.:

$$\sqrt[4]{0{,}34} = \sqrt{\sqrt{0{,}34}} = 0{,}763606\ldots$$

$$\sqrt[12]{3} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{3}}} = 1{,}09587\ldots$$

$$\sqrt[6]{3462825991689} = 123.$$

$$\sqrt[4]{0{,}046415888} = 0{,}46415888\ldots.$$

§. 122.

Regeln über das praktische Rechnen mit Wurzeln.

Häufig ist es bequem, einen Ausdruck, welcher irrationale Wurzeln enthält, vor der Ausrechnung (Verwandelung in eine ganze Zahl oder einen Decimalbruch) umzuformen. So ist gewiß $2\cdot\sqrt{2}$ leichter auszurechnen, als $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, und doch sind beide Ausdrücke einander gleich. Dasselbe gilt von $2+\sqrt{3}$ und $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$, von $\sqrt{2}$ und $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ u. s. w. Dieser und der folgende §. geben zu solchen Umformungen die Anleitung.

I. Wenn eine Wurzel nicht aufgeht (irrational ist), so kann man häufig die Wurzel theilweise ausziehen, indem man den Radicanden so in Factoren zu zerlegen sucht, daß aus einem oder mehreren die Wurzel aufgeht. Aus diesen zieht man dann die Wurzel und läßt die anderen unter dem Wurzelzeichen stehen. Ist der Radicand ein Bruch, so kann man dasselbe mit Zähler und Nenner vornehmen, auch wohl den Bruch erst so umformen, daß die Wurzel aus dem Nenner oder Zähler aufgeht, z. B.

$\sqrt{24} = \sqrt{4\cdot6} = 2\sqrt{6}$; $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8\cdot2} = 2\sqrt[3]{2}$;

$\sqrt{12}+\sqrt{108}-\sqrt{75} = 2\sqrt{3}+6\sqrt{3}-5\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$;

$\sqrt{a^3+2a^2b+ab^2} = (a+b)\sqrt{a}$; $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

$\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{\frac{8}{3}} = \frac{2}{\sqrt[4]{6}}$; $\sqrt[5]{320} = 2\sqrt[5]{10}$; $3\sqrt{0{,}1} = 0{,}3\sqrt{10}$;

$\sqrt[n]{a^{n+2}\cdot b^{3n-4}} = ab^3\sqrt[n]{\frac{a^2}{b^4}}$; $\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$; $\sqrt[5]{a^{14}} = a^2\sqrt[5]{a^4}$;

$$\sqrt[3]{x^2-3x^3+3x^4-x^5} = (1-x)\sqrt[3]{x^2};$$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x};$$

$$\sqrt{\frac{8}{15}} = 2\sqrt{\frac{2}{15}} = \frac{4}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{120}}{15} = \frac{2\sqrt{30}}{15};$$

$$\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}; \quad \sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{9};$$

$$\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{a-1}{a}\sqrt[n]{a^{n-1}}; \quad \sqrt{45}-\sqrt{0{,}8} = \frac{13}{5}\sqrt{5};$$

$$\sqrt{2a^7b^4-a^6b^5} = a^3b^2\sqrt{2a-b}; \quad a-\sqrt{a}+\sqrt{ab}-\sqrt{b}$$
$$= \sqrt{a}(\sqrt{a}-1)+\sqrt{b}(\sqrt{a}-1) = (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-1);$$

$$\sqrt{\frac{a^3}{b}}+\sqrt{\frac{b^3}{a}} = \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\sqrt{ab};$$

$$\sqrt{a^3b^{-1}}-\sqrt{a^2b^{-1}}-\sqrt{ab}+\sqrt{b} = (a-b)\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}}$$

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a^{-2}\cdot c}}+\frac{\sqrt{b^3}}{\sqrt{a^{-1}\cdot c}}+\sqrt{abc} = (a+b+c)\sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

II. Zuweilen ist es vortheilhaft, wenn eine Wurzel mit einer rationalen oder auch irrationalen Zahl durch Multiplication oder Division verbunden ist, diese Zahl unter die Wurzel zu bringen; man muß sie dann mit dem Wurzelexponenten potenziren; denn es ist

$$a\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^nb}; \quad \frac{\sqrt[n]{b}}{a} = \sqrt[n]{\frac{b}{a^n}}; \quad \frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a^n}{b}}.$$ z. B.

$$ab\sqrt{\frac{c}{ab}} = \sqrt{abc}; \quad 3\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}; \quad \frac{a^3b^2c}{\sqrt[4]{a^3b^3c^3}} = a^2b\sqrt[4]{abc};$$

$$\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}; \quad a^2b\sqrt[n]{a^{2-n}\cdot b^{1-n}} = a\sqrt[n]{a^2b}; \quad 6\sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{15};$$

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}};$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$ Praktisch wichtig ist: $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt{a}.$

Ferner beachte man folgenden Fall: Werden alle Wurzeln absolut genommen, so ist

$$(1-\sqrt{2})\cdot\sqrt{1+\sqrt{2}} = -\sqrt{-1+\sqrt{2}}.$$

III. Um einen Ausdruck, welcher das Product oder der Quotient von Wurzeln ist, in eine Wurzel zu verwandeln, bringt man alle Wurzeln auf denselben Wurzelexponenten (§. 57., I. und II.); der General-Wurzelexponent ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Wurzelexponenten; z. B.

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt[6]{a^3b^2};\quad \sqrt[3]{ab}\cdot\sqrt[12]{a^{-1}b^{-5}}=\sqrt[12]{\frac{a^3}{b}};\quad \sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[6]{0{,}1}=\sqrt[12]{\frac{5}{4}};$$

$$\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[8]{6}=\sqrt[24]{96};\quad \frac{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{ab^3}}=\sqrt[12]{\frac{a^7}{b}};\quad \frac{\sqrt[6]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x}}=\sqrt[6]{\frac{1+x}{1-x}}.$$

IV. Sind Wurzeln mit einander oder mit rationalen Zahlen durch + oder — verbunden, so kann man einen solchen Ausdruck nur dadurch in eine Wurzel verwandeln, daß man ihn mit derselben Zahl potenzirt, welche der Exponent der Wurzel werden soll; z. B.

$$\sqrt{5}+\sqrt{2}=\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{7+2\sqrt{10}};$$

$$2-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{8-12\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{4}-2}=\sqrt[3]{6(1-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})};$$

$$3\sqrt{2}-2\sqrt{3}=\sqrt{30-12\sqrt{6}};\quad \sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-1}};$$

$$\sqrt{2+\tfrac{1}{2}\sqrt{7}}-\sqrt{2-\tfrac{1}{2}\sqrt{7}}=1;$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}};$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}.$$

V. Wir haben so eben $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ in $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ umgeformt. Umgekehrt können wir wünschen $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ wieder in $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ zu verwandeln. Diese Umformung geschieht durch die Formel:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Man beweist diese Formel entweder dadurch, daß man beide Seiten quadrirt, oder man leitet sie aus den letzten beiden Gleichungen (Beispielen) in No. IV. ab. Wenn man diese Gleichungen zuerst addirt, dann auch von einander abzieht, so entsteht:

$$2\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}+\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}};$$

$$2\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}-\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}.$$

Dividirt man beide Gleichungen noch durch 2, so erhält man die beiden Fälle, welche in der oben mitgetheilten Formel enthalten sind.

Die Anwendung dieser Formel ist dann bequem, wenn $a^2 - b$ ein vollständiges Quadrat, also $\sqrt{a^2 - b}$ rational ist; dies untersuche man also vorher. z. B. $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$. Man bringe zuerst 2 unter die Wurzel, so ist $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} = \sqrt{7 + \sqrt{40}}$, folglich $a = 7$, $b = 40$, $a^2 - b = 9$, $\sqrt{a^2 - b} = 3$; daher:

$$\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{7+3}{2}} + \sqrt{\frac{7-3}{2}} = \sqrt{5} + \sqrt{2};$$

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}; \quad \sqrt{19 - 4\sqrt{12}} = 4 - \sqrt{3};$$

$$\sqrt{30 + 3\sqrt{96}} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3};$$

$$\sqrt{1 + x^2 + 2\sqrt{2x - 4x^2 + 2x^3}} = x - 1 + \sqrt{2x}, \text{ wenn } x > 1.$$

$$\sqrt{0{,}21 + \sqrt{0{,}008}} = 0{,}1 + \sqrt{0{,}2};$$

$$a + \sqrt{\frac{a^2 + 2b^2}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{a^2 + 4b^2}} = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b^2}.$$

VI. Enthalten Brüche, welche addirt oder subtrahirt werden sollen, im Nenner Wurzeln als Factoren, so merke man in Bezug auf den Generalnenner: das kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist, wenn die Wurzeln gleiche Radicanden haben, diejenige Wurzel, welche den kleinsten Wurzelexponenten hat, und diese Regel gilt noch, wenn $\sqrt[1]{a}$ statt a geschrieben wird. Sind die Radicanden ungleich, so führe man gebrochene Exponenten ein; dann ist für Potenzen mit gleichen Dignanden diejenige als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches zu nehmen, welche den größten Exponenten hat (immer vorausgesetzt, daß man negative Exponenten vermeiden will).

z. B. $$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}} = \frac{1 + \sqrt[6]{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}};$$

$$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{bc}} + \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{ac}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{ab}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{abc}};$$

$$\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{bc}} + \frac{\sqrt[6]{b}}{\sqrt[3]{ac}} + \frac{\sqrt[6]{c}}{\sqrt[3]{ab}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt[3]{abc}};$$

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} + \frac{b}{a\sqrt{c}} + \frac{c}{a\sqrt{b}} = \frac{a^2 + b^2 + c\sqrt{bc}}{ab\sqrt{c}};$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[12]{b} \cdot \sqrt[4]{c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{ab} \cdot \sqrt[12]{c}} - \frac{\sqrt[12]{c}}{\sqrt{a}} = \frac{a\sqrt[4]{b} + \sqrt[6]{ac} - \sqrt[3]{bc}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[4]{c}};$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1 - \sqrt{a} + \sqrt[3]{a^2}}{a};$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a^4}} = \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{a^5} + 1}{\sqrt[3]{a^4}};$$

$$\frac{1}{z\sqrt{y}} + \frac{x}{y\sqrt[3]{z^2}} + \frac{y}{x\sqrt{z}} = \frac{x\sqrt{y} + x^2\sqrt[3]{z} + y^2\sqrt{z}}{xyz};$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{a^4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1 + \sqrt[20]{a} + \sqrt[15]{a^2} + \sqrt[10]{a^3}}{\sqrt[5]{a^4}};$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6} - 5\sqrt{2}}{6};$$

VII. Das Zerlegen einer Zahl in Primfactoren trägt oft zur Vereinfachung eines Ausdrucks bei, in welchem Producte und Quotienten von Potenzen und Wurzeln vorkommen. Man führt gebrochene Exponenten ein und zerlegt dann die Dignanden in Primfactoren.

z. B. $\frac{\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt{12}}{\sqrt[6]{4^5}} = \frac{6^{\frac{2}{3}}\cdot 12^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{5}{6}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot 2\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{5}{3}}} = 3\sqrt[6]{3};$

$$\frac{\sqrt[3]{6^2}\cdot 8^{-\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[12]{36\cdot 2^{11}}}{12^{-2}\cdot 4^{\frac{5}{4}}\cdot\sqrt[6]{3^{17}}} = 2.$$

Zur Uebung. 1) $2\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{18} + \sqrt{\frac{2}{9}} - \sqrt{\frac{25}{18}} + \sqrt{\frac{9}{8}} = -\frac{7}{4}\sqrt{2}.$

2) $0{,}8\sqrt{5} - \sqrt{1{,}8} + 0{,}4\sqrt{10} + 6\sqrt{0{,}05} - 4\sqrt{0{,}2} = 4\sqrt{0{,}1}.$

3) $\sqrt{a + 2a^2 + a^3} - \sqrt{ab^2} + \sqrt{4a + 4ab + ab^2} - \sqrt{a^3} - \sqrt{9a + 6a^2 + a^3} = -a\sqrt{a}.$

4) $\sqrt{4x^2 + 4x^3 + x} - \sqrt{4xy^2 + 4xy + x} - \sqrt{4x^3} + \sqrt{4xy^2 + 4x^2y + x^3} = x\sqrt{x}.$

5) $(2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3})\cdot(6 - 9\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) = -3(11 - 4\sqrt{3}).$

6) $(6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})\cdot(2\sqrt{6} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = -6(5 + \sqrt{2}).$

7) $\left(2 + \sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(3\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{3} - \sqrt{6}\right) = 5 + \sqrt{2}.$

8) $(\sqrt{10} - 2\sqrt{5} + \sqrt{30})\cdot(\sqrt{0{,}4} - \sqrt{0{,}2} + \sqrt{0{,}6}) = 4.$

9) $(\sqrt{0{,}3} - \sqrt{0{,}2} - \sqrt{0{,}9})\cdot(3\sqrt{0{,}4} - 5\sqrt{0{,}2} + 4\sqrt{0{,}3} - 3\sqrt{0{,}6}) = 0{,}4.$

10) $(\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b})\cdot[\sqrt[3]{a^2-b^2}-\sqrt[3]{(a+b)^2}-\sqrt[3]{(a-b)^2}] = -2a.$

11) $(\sqrt[3]{a+1}-\sqrt[3]{a-1})\cdot(\sqrt[3]{(a+1)^2}+\sqrt[3]{(a-1)^2}+\sqrt[3]{a^2-1}) = +2.$

12) $\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}.$

13) $\sqrt{-1+\sqrt{5}}+\sqrt{-4+2\sqrt{5}} = \sqrt{1+\sqrt{5}}.$ Man wendet IV. und dann V. an.

14) $\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \sqrt{25+10\sqrt{5}}.$

15) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}+\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}} = \sqrt{1+\sqrt{0,8}}.$

16) $\frac{(a+\sqrt[3]{ab^2})\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}}{\sqrt[3]{ab^2}} = (a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$

17) Es sollen die beiden Ausdrücke:

$A = \sqrt{1,1+2\sqrt{0,1}}+(2\sqrt{2}-3\sqrt{0,2})\,(3\sqrt{2}+4\sqrt{0,2})$ und

$B = \sqrt{1,4+\sqrt{1,8}}+\sqrt{1,4-3\sqrt{0,2}}$

auf die einfachste Form gebracht und dann ausgerechnet werden.

Auflös. $A = 10,6-\sqrt{0,1} = 10,2837722\ldots.$

$B = \sqrt{3,6} = 1,89736659\ldots.$

18) Was wird aus dem Quotienten $\frac{1+a^3}{1-a}$, wenn man $-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^3+3a^2+4}{4a-4}}$ statt a setzt, oder auch $-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^3+3a^2+4}{4a-4}}$ statt a?

Antw. In beiden Fällen bleibt der Ausdruck $\frac{1+a^3}{1-a}$ unverändert.

§. 123.

Das Rationalmachen des Nenners.

Um das Dividiren durch irrationale Zahlen zu vermeiden und so bequemer und sicherer rechnen zu können, formt man einen Bruch mit irrationalem Nenner vor der Ausrechnung so um, daß der Nenner rational wird.

1) Ist der Nenner eingliedrig und enthält er $\sqrt[n]{a}$, so multiplicirt man Zähler und Nenner mit $\sqrt[n]{a^{n-1}}$; enthält der Nenner also $\sqrt{a}$, so multiplicirt man mit $\sqrt{a}$. z. B.:

$\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$; $\frac{2}{\sqrt[3]{3}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{9}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$; $\frac{b}{\sqrt[n]{a^5}} = \frac{b}{a}\sqrt[n]{a^{n-5}}$;

$$\frac{a-b}{\sqrt{a+b}} = \frac{a-b}{a+b}\sqrt{a+b}; \quad \frac{0,27434}{\sqrt{2,7434}} = \frac{1}{10}\sqrt{2,7434} = 0,165632.$$

Im praktischen Rechnen kommen oft die Fälle vor:

$$\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}; \quad \frac{a}{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{a^2}; \quad \frac{a-b}{\sqrt{a-b}} = \sqrt{a-b}.$$

2) Enthält der zweigliedrige Nenner nur Quadratwurzeln, hat er also die Form $n\sqrt{a} \pm m\sqrt{b}$, so multiplicirt man Zähler und Nenner mit $n\sqrt{a} \mp m\sqrt{b}$; im Nenner entsteht dann die Differenz der Quadrate: $n^2a - m^2b$.

z. B. $\frac{3-\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}} = \frac{(3-\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}{25-20} = \frac{5+\sqrt{5}}{5}$;

3) Hat der Nenner mehr als zwei Glieder, aber nur Quadratwurzeln, so fasse man zwei Glieder in ein Glied zusammen und verfahre nach Nr. 2. Wird der Nenner dann noch nicht rational, so wiederhole man das Verfahren. Ein zweckmäßiges Zusammenfassen der Glieder erleichtert oft die Arbeit. z. B.:

Beispiel 1. $\frac{1-3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. Multiplicirt man Zähler und Nenner mit $2-\sqrt{2}+\sqrt{3}$, so geht der Nenner in $(2-\sqrt{2})^2-3 = 3-4\sqrt{2}$ über, und es entsteht:

$$\frac{1-3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{(1-3\sqrt{2}+\sqrt{3})(2-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{3-4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(1-3\sqrt{2}+\sqrt{3})(2-\sqrt{2}+\sqrt{3})(3+4\sqrt{2})}{9-32};$$

multiplicirt man im Zähler durch, so folgt:

$$\frac{-23+23\sqrt{2}-23\sqrt{3}}{-23} = 1-\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

Man kann auch den Nenner schreiben: $2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, und Zähler und Nenner mit $2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ multipliciren. Dann erhält man:

$$\frac{1-3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{(1-3\sqrt{2}+\sqrt{3})(2+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-1-2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{(1-3\sqrt{2}+\sqrt{3})(2+\sqrt{2}+\sqrt{3})(-1+2\sqrt{6})}{1-24}.$$

Multiplicirt man im Zähler durch, so entsteht das schon oben gefundene Resultat. — Man hätte endlich auch Zähler und Nenner mit $2-\sqrt{3}+\sqrt{2}$ multipliciren können.

Beispiel 2. $\frac{12-\sqrt{3}}{2-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. Während es bei dem vorigen Beispiele ziemlich gleichgültig ist, wie man im Nenner die Glieder zusammenfaßt, ist dies hier durchaus nicht der Fall. Geht man nämlich von der Erwägung aus, daß es möglich ist, es werde der gegebene Bruch, nachdem die eine Wurzel im Nenner fortgeschafft ist, sich heben lassen, so muß man darauf sehen, daß im Nenner $\sqrt{3}$ stehen bleibt, weil nur diese Wurzel im gegebenen Zähler vorkommt. Man würde also im Nenner die Glieder 2 und $\sqrt{3}$ zusammen fassen, den Nenner also $(2+\sqrt{3})-2\sqrt{2}$ schreiben und Zähler und Nenner mit $(2+\sqrt{3})+2\sqrt{2}$ multipliciren. So entsteht:

$$\frac{12-\sqrt{3}}{2-2\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(12-\sqrt{3})\,(2+2\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})^2-8}$$
$$= \frac{(12-\sqrt{3})(2+2\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-1+4\sqrt{3}}.$$

Dieser Bruch läßt sich aber wirklich heben; denn sondert man aus dem ersten Factor des Zählers $\sqrt{3}$ ab, so ist $12-\sqrt{3}=\sqrt{3}(4\sqrt{3}-1)$, und man erhält als Resultat: $\sqrt{3}(2+2\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 3+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

4) Ist der Nenner zweigliedrig, enthält er aber beliebige Wurzeln, so mache man erst die Wurzelexponenten gleich und wende dann die nachstehenden Formeln an, welche sich aus §. 88, I., II. und III. ergeben, wenn man statt a und b, in I. $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{b}$, in II. $\sqrt[2n]{a}$ und $\sqrt[2n]{b}$, in III. $\sqrt[2n+1]{a}$ und $\sqrt[2n+1]{b}$ setzt. Nur selten aber gewährt in diesem Falle das Rationalmachen des Nenners einen Vortheil.

$$\text{I.}\quad a-b = (\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})\cdot(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2}+\ldots$$
$$+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}).$$

$$\text{II.}\quad a-b = (\sqrt[2n]{a}+\sqrt[2n]{b})\cdot(\sqrt[2n]{a^{2n-1}}-\sqrt[2n]{a^{2n-2}b}+\sqrt[2n]{a^{2n-3}b^2}-+\ldots$$
$$+\sqrt[2n]{ab^{2n-2}}-\sqrt[2n]{b^{2n-1}}).$$

$$\text{III.}\quad a+b = (\sqrt[2n+1]{a}+\sqrt[2n+1]{b})\cdot(\sqrt[2n+1]{a^{2n}}-\sqrt[2n+1]{a^{2n-1}b}+\sqrt[2n+1]{a^{2n-2}b^2}-+\ldots$$
$$-\sqrt[2n+1]{ab^{2n-1}}+\sqrt[2n+1]{b^{2n}}).$$

z. B. $\frac{1}{2-\sqrt[3]{3}} = \frac{4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{5}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}} = \frac{\sqrt[6]{a^5}-\sqrt[6]{a^4b}+\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[6]{a^2b^3}+\sqrt[6]{ab^4}-\sqrt[6]{b^5}}{a-b}.$$

Beispiele über das Rationalmachen des Nenners.

1) $\frac{2+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{3}.$

2) $\frac{6}{\sqrt[5]{2}} = 3\sqrt[5]{16}.$

3) $\frac{6}{\sqrt[5]{8}} = 3\sqrt[5]{4}.$

4) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}.$

5) $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}.$

6) $\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{12}}{6}.$

7) $\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{6}}} = \sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}.$

8) $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{6}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{1}{6}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{3}.$

9) $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{3}}} = 5+2\sqrt{6}.$

10) $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{6}}} = \frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}.$

11) $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2}.$

12) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{7+3\sqrt{6}}{5}.$

13) $\frac{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{\frac{1}{3}}} = 2+\sqrt{3}.$

14) $\frac{2+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}} = \frac{4+3\sqrt{3}}{11}.$

15) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = 2+\sqrt{3}.$

16) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\sqrt{6}.$

17) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{ab}$; man kann hier auch zuerst im Nenner $\sqrt{ab}$ absondern und den Bruch heben.

18) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}+\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 0.$

19) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = -1+\sqrt{2}.$

20) $\frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}-\frac{2\sqrt{5}+5\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-5\sqrt{2}} = \frac{70+41\sqrt{10}}{30}.$

21) $\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$

22) $\frac{2}{a-\sqrt{a^2-4}} = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$. 23) $\frac{3}{2\sqrt{6}-\sqrt{15}} = \frac{2\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3}$.

24) $\frac{4a^2}{-a+\sqrt{a^2+b^2}\pm\sqrt{-2a^2+b^2-2a\sqrt{a^2+b^2}}}$
$= -a+\sqrt{a^2+b^2}\mp\sqrt{-2a^2+b^2-2a\sqrt{a^2+b^2}}$.

25) $\frac{12+3\sqrt{2}-7\sqrt{6}}{1-2\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}+\sqrt{6}$; 26) $\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = 2-\sqrt{2}$.

27) $\frac{4}{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}} = 1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 28) $\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2-3\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{4}$.

29) $\frac{1-\sqrt{15}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{6}}{2}$.

30) $\frac{7\sqrt{7}-12\sqrt{5}}{3-6\sqrt{5}+3\sqrt{7}} = \frac{13+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}{6}$.

31) $\frac{2-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} = 2(\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3})$. Man multiplicire hier Zähler und Nenner mit $(1+\sqrt{6})-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. — In den folgenden Beispielen kann man die Glieder im Nenner immer so zusammenfassen, daß, nachdem im Nenner multiplicirt ist, der gegebene Zähler sich forthebt.

32) $\frac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}$; 33) $\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

34) $\frac{9+2\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(3\sqrt{3}+2\sqrt{2}-1)$.

35) $\frac{2+\sqrt{6}}{1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{1}{2}(-1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})$.

Die Briggs'schen Logarithmen und ihre praktische Anwendung.

§. 124.

Das Briggs'sche Logarithmensystem. Elementare Berechnung der Logarithmen.

Die Logarithmen aller absoluten Zahlen für ein und dieselbe Basis bilden ein Logarithmen-System. Im praktischen Gebrauch sind zwei Logarithmen-Systeme. Das eine hat die Basis 10 und heißt das Briggs'sche (nach dem ersten Berechner Henry Briggs, gest. 1630 zu Oxford) oder zehntheilige (auch gemeine) Logarithmen-System, und von diesem soll hier nur die Rede sein. Das andere ist das natürliche Logarithmen-System; von ihm wird später gesprochen werden.

Jeden Briggs'schen Logarithmus $\overset{10}{\log} a$ schreiben wir ohne Basis: $\log a$, und $\log a$ bezeichnet sonach die Zahl, mit welcher 10 potenzirt a giebt; z. B. $\log 1000 = 3$, weil $10^3 = 1000$ ist. Man halte nun wohl fest, daß jeder Logarithmus nichts weiter ist, als der Exponent derjenigen Potenz von 10, welche dem Logarithmanden (Numerus) gleich ist. Zunächst soll gezeigt werden, daß jede absolute Zahl einen reellen Logarithmus hat; daß sie nur einen haben kann, folgt unmittelbar aus §. 60. Die Logarithmen, welche ganze Zahlen sind, ergeben sich aus den ganzen Potenzen von 10. Vergleicht man die nachstehende Potenz-Reihe mit den darunter gesetzten Werthen

$$\ldots\ldots 10^{-3},\ 10^{-2},\ 10^{-1},\ 10^{0},\ 10^{+1},\ 10^{+2},\ 10^{+3},\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots 0{,}001;\ 0{,}01;\ 0{,}1;\ 1;\ 10;\ 100;\ 1000;\ldots,$$

so folgt:

$$\log 1 = 0$$
$$\log 10 = +1 \qquad \log 0{,}1 = -1$$
$$\log 100 = +2 \qquad \log 0{,}01 = -2$$
$$\log 1000 = +3 \qquad \log 0{,}001 = -3$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$

Allgemein ist $\log(10^{+n}) = +n$, $\log(10^{-n}) = -n$; der Logarithmus jeder Zahl über 1 ist positiv; der Logarithmus jedes echten Bruches ist negativ. Geht man zu den Grenzen über, so ist

$$\log\infty = +\infty,\quad \log 0 = -\infty.$$

Alle gebrochenen Potenzen von 10 sind irrational (§. 118.), weil 10 keine ganze Potenz einer andern ganzen Zahl ist. z. B. $10^{\frac{11}{4}} = 10^2 \cdot 10^{\frac{3}{4}} = 100\sqrt[4]{10^3}$ Da nun 10 nicht in gleiche Factoren zerlegt werden kann, so kann auch 10^3 nur in drei gleiche Factoren $10 \times 10 \times 10$ zerlegt werden; folglich geht $\sqrt[4]{10^3}$ nicht auf, ist also irrational. Hieraus folgt aber, daß die Logarithmen aller (absoluten) rationalen Zahlen, mit Ausnahme der ganzen (positiven und negativen) Potenzen von 10 (10; 100; 1000; ... 0,1; 0,01; 0,001; ....) und der 1, nur irrationale Zahlen sein können. Daß sie aber wirklich als irrationale Zahlen existiren, daß also jede (absolute) Zahl einen Logarithmus hat, wollen wir jetzt zeigen. Zu diesem Zwecke ist also zu beweisen, daß jeder Logarithmus einer Zahl, welche keine ganze Potenz von 10 ist, zwischen Grenzwerthen liegt, die nicht bloß ausgerechnet, sondern auch beliebig nahe an einander gerückt werden können. Es mag das noch leidlich bequeme Beispiel $\log 200$ gewählt werden. Wir bemerken voraus, daß der Logarithmus jeder andern Zahl (auch der irrationalen) genau

ebenso berechnet werden kann, daß aber das Verfahren, obwohl es nur in einem einfachen Multipliciren besteht, so ermüdend ist, daß man andere Wege zur Berechnung suchen muß. Solche finden sich auch später; hier genügt, daß die oben angegebene Behauptung vollständig bewiesen wird. Wir schicken voraus, daß 10^n die erste $n+1$ziffrige Zahl ist. Soll also x aus der Gleichung $10^x = a$ bestimmt werden, und hat a in den Ganzen n Ziffern, so liegt x zwischen $n-1$ und n; daher ist $x = n-1 +$ einem echten Bruch, den man durch $\frac{y}{10}$ bezeichnen kann, wenn $y < 10$ vorausgesetzt wird. Aus $10^x = 237{,}4$ folgt z. B. $x = 2 + \frac{y}{10}$; aus $10^x = 54349{,}78$ folgt $x = 4 + \frac{y}{10}$; aus $10^x = 1{,}034$ folgt $x = 0 + \frac{y}{10}$; u. s. w.

Es sei $\log 200 = x$, so folgt $10^x = 200$. Da 200 drei Ziffern hat, so liegt x zwischen 2 und 3; wir setzen also:

1) $x = 2 + \frac{y}{10}$, so folgt $10^{2+\frac{y}{10}} = 200$ oder $100 \cdot 10^{\frac{y}{10}} = 200$, folglich $10^y = 2^{10}$, also $10^y = 1024$. Da 1024 vier Ziffern hat, so liegt y zwischen 3 und 4; folglich ist:

2) $y = 3 + \frac{z}{10}$. Hieraus folgt $10^{3+\frac{z}{10}} = 1024$ oder $10^{\frac{z}{10}} = 1{,}024$, also $10^z = 1{,}024^{10}$. Wir haben also 1,024 zehnmal mit sich selbst zu multipliciren, und hierin liegt das Ermüdende der Arbeit. Wir wollen das Resultat abgekürzt geben. Es ist $10^z = 1{,}26765$, und weil diese Zahl eine Ziffer in den Ganzen hat, so liegt z zwischen 0 und 1; folglich ist:

3) $z = 0 + \frac{v}{10}$, daher $10^{0+\frac{v}{10}} = 1{,}26765$, also $10^v = 1{,}26765^{10}$. Durch Multiplication entsteht $10^v = 10{,}71519$. Es liegt also v zwischen 1 und 2, d. h. es ist:

4) $v = 1 + \frac{w}{10}$, daher $10^{1+\frac{w}{10}} = 10{,}71519$, folglich $10^w = 1{,}071519^{10}$ u. s. w.

Wir haben also gefunden:

$$x = 2 + \frac{y}{10} = 2{,}3 + \frac{z}{100} = 2{,}30 + \frac{v}{1000} = 2{,}301 + \frac{w}{10000} \text{ 2c.}$$

Es liegt also

log 200	zwischen	2	und	3	(aus 1),
"	"	2,3	"	2,4	(aus 2),
"	"	2,30	"	2,31	(aus 3),
"	"	2,301	"	2,302	(aus 4) u. s. w.

Es ist sonach $\log 200 = 2{,}301\ldots$ oder $200 = 10^{2{,}301\ldots}$.

Wollte man das Verfahren auf einen echten Bruch $\frac{n}{m}$ anwenden, so kann man $\log\left(\frac{n}{m}\right) = -\log\left(\frac{m}{n}\right)$ setzen und $\log\left(\frac{m}{n}\right)$ berechnen.

§. 125.

Die Logarithmentafeln. Charakteristik und Mantisse.

Die Logarithmen aller Zahlen innerhalb gewisser Grenzen sind in den Logarithmentafeln so zusammengestellt, daß man mit Leichtigkeit zu jeder Zahl (Numerus) den Logarithmus und zu jedem Logarithmus wieder den zugehörigen Numerus finden kann. Erst durch solche Tafeln werden die Logarithmen für das praktische Rechnen wichtig. Wir setzen sie voraus. Ihre Einrichtung ist aus ihnen selbst zu ersehen; hier soll nur das für alle Tafeln Geltende erläutert werden.

Unmittelbar aus den Tafeln kann man die Logarithmen der ganzen Zahlen und der Decimalbrüche entnehmen; die Logarithmen anderer Brüche findet man nach dem Gesetze $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$.

Jede Zahl, welche nicht eine ganze Potenz von 10 ist, liegt zwischen zwei auf einander folgenden ganzen Potenzen von 10, ihr Logarithmus also zwischen den um 1 verschiedenen Logarithmen dieser Potenzen. So liegt z. B. 300 zwischen 10^2 und 10^3; 0,002 zwischen 0,001 und 0,01, d. h. zwischen 10^{-3} und 10^{-2}; folglich liegt log 300 zwischen 2 und 3, log 0,002 zwischen -3 und -2. Offenbar kann also der Logarithmus auf zweierlei Art bestimmt werden: man addirt entweder zu der kleineren Zahl einen echten Decimalbruch, oder zieht einen solchen von der größeren ab. So ist

$$\log 300 = +2 + 0{,}4771213 \text{ oder } = +3 - 0{,}5228787.$$
$$\log 0{,}002 = -3 + 0{,}3010300 \text{ oder } = -2 - 0{,}6989700.$$

Die Tafeln setzen immer die erste Art der Bestimmung voraus, d. h. man addirt immer zu der kleineren ganzen Zahl einen echten Decimalbruch und schreibt

$$\log 300 = 2{,}4771213 \text{ und } \log 0{,}002 = 0{,}3010300 - 3.$$

So erscheint jeder Logarithmus aus zwei Theilen bestehend: aus einer positiven oder negativen ganzen Zahl (auch Null), welche die Charakteristik (Kennziffer) heißt, und einem immer positiven echten Decimalbruch, welcher die Mantisse genannt wird. Die Logarithmentafeln enthalten nur die Mantisse der Logarithmen; die Charakteristik ist beim Gebrauche nach folgender Regel hinzuzufügen:

1. Ist der Numerus größer als 1 und hat er in den Ganzen n Ziffern, so ist die Charakteristik $= n - 1$; ist der

Numerus ein echter Decimalbruch und steht die erste Ziffer, welche nicht 0 ist, in der nten Decimalstelle, so ist die Charakteristik $= -n$. z. B.

log 25,3 = 1,4031205; log 8,3741 = 0,9229381;
log 21470000 = 7,3318320; log 0,4473 = 0,6505989 — 1;
log 0,00046 = 0,6627578 — 4; log 0,010009 = 0,0003907 — 2.

Beweis. Hat der Numerus n Ziffern in den Ganzen, so liegt er zwischen 10^{n-1} und 10^n, folglich sein Logarithmus zwischen $n-1$ und n, und weil die Mantisse immer positiv ist, so ist $n-1$ die Charakteristik. — Hat der echte Decimalbruch in der nten Decimalstelle die erste Ziffer, welche nicht Null ist, so liegt er zwischen 10^{-n} und 10^{-n+1}, also sein Logarithmus zwischen $-n$ und $-n+1$. Die Charakteristik ist die kleinere Zahl, also $-n$.

Umgekehrt kann man aus der Charakteristik eines gegebenen Logarithmus auf die Stellung des Decimalkommas im Numerus schließen.

II. Ist die Charakteristik $= +n$, so muß das Decimalkomma $n+1$ Ziffern als Ganze vom Numerus abschneiden; ist sie $= -n$, so kommt die erste Ziffer des Numerus in die nte Decimalstelle, während die vorhergehenden durch Nullen ausgefüllt werden. z. B.

log x = 2,8180410. Der Numerus hat die Ziffern 65772, folglich ist x = 657,72;

log y = 0,6385192. Der Numerus hat die Ziffern 43503, folglich ist y = 4,3503;

log z = 0,8850105 — 4. Der Numerus hat die Ziffern 76738, folglich ist z = 0,00076738.

Gewöhnlich schreibt man: Num [0,8850105 — 4] = 0,00076738, so daß Num [log a] = a ist.

§. 126.

Gesetz.

Die Mantisse ist nicht von der Stellung des Decimalkommas abhängig, sondern nur von den Ziffern des Numerus, d. h. die Logarithmen aller Zahlen, welche mit denselben Ziffern in derselben Ordnung geschrieben werden, gleichviel, an welcher Stelle das Decimalkomma steht und ob diesen Ziffern noch Nullen vorangehen oder folgen, haben dieselbe Mantisse. z. B.

log 34012 = 4,5316322;
log 3401200 = 6,5316322;
log 34,012 = 1,5316322;
log 0,0034012 = 0,5316322 — 3, u. s. w.

Beweis. Bezeichnet a eine dieser Zahlen, so hat jede andere die Form $a \cdot 10^n$ oder $\frac{a}{10^n}$. Nun ist aber, weil $\log 10 = 1$ ist,

$$\log (a \cdot 10^n) = \log a + n \text{ (§. 66.) und}$$

$$\log \left(\frac{a}{10^n}\right) = \log a - n.$$

Durch Addition oder Subtraction der ganzen Zahl n wird aber nur die Charakteristik von log a verändert, weil die Mantisse positiv bleiben soll.

§. 127.

Das Interpoliren.

Die Logarithmentafeln enthalten die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis zu einer gewissen Grenze; die Tafeln von Vega z. B. enthalten noch die Logarithmen aller fünfziffrigen Zahlen. Wir wollen nun zeigen, wie man mittelst dieser Tafeln die Logarithmen der sechs- und siebenziffrigen Zahlen finden kann, und umgekehrt, wie man zu einem nicht in den Tafeln befindlichen Logarithmus den Numerus bestimmen kann. — Alle nachfolgenden Beispiele sind mit den von Bremiker herausgegebenen Vega'schen Logarithmentafeln gerechnet.

I. Den Logarithmus einer Zahl mit mehr als fünf Ziffern zu bestimmen. Wir können das Decimalkomma hinter der fünften Ziffer annehmen, weil von der Stellung des Decimalkommas die Mantisse nicht abhängig ist. Es werde log 37245,76 gesucht. Er liegt zwischen

$$\log 37246 = 4{,}5710796 \text{ und}$$
$$\log 37245 = 4{,}5710680$$
$$\overline{\text{(Differenz} = 0{,}0000116).}$$

Man schließt nun so: hier wächst der Logarithmus in den letzten Decimalstellen um 116, während der Numerus um 1 wächst, folglich wird der Logarithmus respective um $\frac{1}{10} \times 116$, $\frac{2}{10} \times 116$, $\frac{3}{10} \times 116$, u. s. w. wachsen, wenn der Numerus um $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, u. s. w. wächst; d. h. man denkt sich die Differenz 116 auf die Logarithmen aller Zahlen zwischen 37245 und 37246 gleichmäßig vertheilt. Dieser Schluß ist bei Zahlen, welche erst in der sechsten Ziffer von einander abweichen, so weit richtig, als nur die sieben ersten Stellen der Mantisse in Betracht kommen; der Beweis dieses Ge-

setzes kann aber erst später erfolgen; jetzt genügt, daß man aus den Tafeln ersieht, wie selbst die Logarithmen der auf einander folgenden fünfziffrigen Zahlen, wenn die erste und die letzte nicht zu weit von einander liegen, um gleiche Differenzen wachsen. Es ist z. B.

	Differenzen:
log 37248 = 4,5711030	
	0,0000117
log 37247 = 4,5710913	
	0,0000117
log 37246 = 4,5710796	
	0,0000116
log 37245 = 4,5710680	
	0,0000117
log 37244 = 4,5710563	
	0,0000116
log 37243 = 4,5710447	
u. s. w.	

Da die Logarithmen abgekürzte Decimalbrüche sind, so kann die Abweichung in der letzten Decimalstelle um eine Einheit (7 und 6) nicht befremden.

Gehen wir zu unserem Beispiele zurück. Gesucht war log 37245,76 und aufgeschlagen log 37245 = 4,5710680. Wächst nun der Numerus um $\frac{7}{10}$, so muß der Logarithmus um $\frac{7}{10} \times 116$ in den letzten Ziffern wachsen; und kommen zu dem Numerus noch $\frac{6}{100}$ hinzu, so wächst der Logarithmus noch um $\frac{6}{100} \times 116$. Multiplicirt man aber 116 mit 0,1; 0,2; 0,3; ... bis 0,9, so erhält man die folgende Tabelle, in welcher die letzte Ziffer des Products, welche hinter dem Decimalkomma steht, bei der Addition zu der aufgeschlagenen Mantisse in die achte Decimalstelle zu setzen ist.

	116
1	11,6
2	23,2
3	34,8
4	46,4
5	58,0
6	69,6
7	81,2
8	92,8
9	104,4

Aus dieser Tabelle, welche in den Logarithmentafeln abgedruckt ist, entnehmen wir also den Zuwachs des Logarithmus, wenn die sechste Ziffer 7 ist (= 81,2), und auch den, welchen die siebente Ziffer 6 verursacht (= 69,6); nur müssen wir bei der Addition 69,6 um eine Stelle rechts hinausrücken, weil 69,6 nicht von $\frac{6}{10}$, sondern von $\frac{6}{100}$ herrührt. Man kann auch noch den Zuwachs, welcher von einer achten Ziffer des Numerus herrührt, in Rechnung bringen, muß aber dann noch um eine Stelle weiter hinausrücken.

So erhält man folgende Darstellung:

$$\log 37245{,}\not{7}\not{6} = 4{,}5710680 \quad (\text{Dff} = 116)$$
$$7 \,\ldots\ldots\ldots\, 81{,}2$$
$$6 \,\ldots\ldots\, 69{,}6$$
$$\overline{\log 37245{,}76 = 4{,}5710768.}$$

Die hinausgerückten Ziffern werden nur soweit berücksichtigt, als sie zur Vermehrung der Einheiten in der siebenten Decimalstelle beitragen.

Beispiel 2.

$$\log 0{,}016806\not{3}\not{5}\not{8} = 0{,}2254644 - 2 \quad (\text{Dff } 258)$$
$$3 \,\ldots\ldots\ldots\, 77{,}4$$
$$5 \,\ldots\ldots\ldots\, 129{,}0$$
$$8 \,\ldots\ldots\, 206{,}4$$
$$\overline{\log 0{,}016806358 = 0{,}2254736.}$$

II. **Zu einem nicht in den Tafeln befindlichen Logarithmus den Numerus zu bestimmen.** Die Auflösung ist nach dem Vorhergehenden leicht. Nehmen wir zuerst an, daß die gegebene Charakteristik = 4 sei. Man schlägt die nächst niedere Mantisse auf und findet durch sie die ersten fünf Ziffern des Numerus, d. h. die Ganzen. Der fehlende Bruch-Rest sei a; wie erhalten wir a? Wäre a bekannt, so würden wir aus der aufgeschlagenen Mantisse die gegebene nach Nr. I. wieder finden, wenn wir a mit der Differenz (D) der aufgeschlagenen und der nächst höheren in den Tafeln befindlichen Mantisse multiplicirten. Das Product würde die Differenz (α) der aufgeschlagenen und der gegebenen Mantisse sein. Aus $a \times D = \alpha$ folgt aber (beide Seiten durch D dividirt): $a = \alpha : D$; man findet also a (d. h. die nächsten Ziffern des gesuchten Numerus), wenn man mit D in α dividirt. z. B. Gegeben sei $\log x = 4{,}8422143$. Man findet in den Tafeln $4{,}8422097 = \log 69536$. Zieht man diesen Logarithmus von dem nächst höheren in den Tafeln ab, so entsteht 0,0000063, und zieht man ihn von dem gegebenen ab, so erhält man 0,0000046; folglich ist $x = 69536 + \frac{46}{63} = 69536{,}73$.

$$\begin{array}{l} 6{,}3 \mid 46 \mid 0{,}73\ldots \\ \underline{44{,}1} \\ \quad 1\,9 \\ \quad \underline{1\,8{,}9} \\ \qquad 1 \end{array}$$

Diese Division kann aber mit Hülfe des Differenztäfelchens geschehen, und man erhält so folgende Darstellung:

$$
\begin{array}{rl}
\log x = 4{,}8422143 & \\
8422097 & \text{Num} = 69536 \\
(\text{Dff} = 63) \quad 46 & \\
44{,}1 \ldots\ldots\ldots 7 & \\
19 & \\
18{,}9 \ldots\ldots\ldots 3 & \\
x = 69536{,}73\ldots &
\end{array}
$$

Beispiel 2.

$$
\begin{array}{rl}
\log y = 0{,}4900533 - 1 & \\
4900428 & \text{Num} = 30906 \\
(\text{Dff} = 141) \quad 105 & \\
98{,}7 \ldots\ldots\ldots 7 & \\
63 & \\
56{,}4 \ldots\ldots\ldots 4 & \\
66 & \\
56{,}4 \ldots\ldots\ldots 4 & \\
y = 0{,}30906744. &
\end{array}
$$

Weiter zu interpoliren ist zwecklos, weil schon die achte Ziffer unsicher ist.

Zur Uebung. 1) log 345,2789 = 2,5381700.
2) log 1000,279 = 3,0001212.
3) log 0,00800952 = 0,9036065 — 3.
4) log 2222227 = 6,3467884.
5) log 0,13712884 = 0,1371288 — 1.
6) log 327,4567 = 2,5151539.
7) log 0,6180493 = 0,7910231 — 1.
8) log 1,0030476 = 0,0013215.
9) log 37,49974 = 1,5740283.
10) log 158170390 = 8,1991252.
11) log 0,00076738409 = 0,8850128 — 4.
12) log x = 0,8365003; x = 6,862784.
13) log y = 2,5640346; y = 366,46678.
14) log z = 0,0107049 — 3; z = 0,001024955.
15) log u = 7,8420331; u = 69507730.
16) log v = 0,5420557 — 4; v = 0,000348382.
17) log w = 3,7840424; w = 608,19436.
18) log x = 0,7700036; x = 5,888485.
19) log y = 6,9995030; y = 9988562,8.
20) log z = 0,9000000; z = 7,9432818.
21) log a = 0,0101500 — 2; a = 0,010236464.
22) log b = 0,3333333 — 1; b = 0,21544341.

Anmerkung. Ist ein Logarithmus nicht in der Form gegeben, wie ihn die Tafeln voraussetzen, so muß man ihn auf diese Form bringen; namentlich muß die Mantisse positiv sein. Ist z. B. $\log x = -\frac{3}{4}$ gegeben, so schreibt man $\log x = +\frac{1}{4} - 1$, also $\log x = 0{,}2500000 - 1$; $\log y = -2{,}3170488$ formt man in $\log y = 0{,}6829512 - 3$ um.

§. 128.

Das praktische Rechnen mittelst der Logarithmen.

I. Mit Hülfe der Logarithmen berechnet man Produkte, Quotienten, Potenzen und Wurzeln, aber nicht unmittelbar, sondern mittelbar, indem man die Logarithmen dieser Ausdrücke nach den Gesetzen des §. 66. sucht und dann zu dem gefundenen Logarithmus den Numerus aufschlägt. (Man beachte den Schluß des §. 66.) In den folgenden Beispielen übersehe man die angeführten praktischen Winke nicht, die namentlich in Rücksicht auf die Anmerkung zu §. 127. gegeben sind.

1) $A = 52{,}349 \times 0{,}873199 \times 538{,}99739.$

Addirt man die Logarithmen der drei Factoren, so entsteht:

$$\log A = 4{,}3916083; \text{ folglich } A = 24638{,}159.$$

2) $B = \frac{127{,}365}{98{,}729}$. Zieht man den Logarithmus des Nenners von dem des Zählers ab, so folgt:

$$\log B = 0{,}1106054, \text{ folglich } B = 1{,}2900465.$$

3) $C = \frac{0{,}69829}{6951{,}273}$.

Man verfährt wie in 2). Um eine negative Mantisse zu vermeiden, addirt man zum log des Zählers +3 hinzu, vermehrt aber auch die negative Charakteristik um drei negative Einheiten:

$$\begin{aligned} \log 0{,}69829 &= \overset{+3}{\not 0},8440358 - \overset{-4}{\not 1} \\ \log 6951{,}273 &= 3{,}8420643 \\ \hline \log C &= 0{,}0019715 - 4, \end{aligned}$$

folglich $C = 0{,}000100455.$

4) $D = \frac{0{,}427}{0{,}0034159}$.

Aehnlich verfährt man hier:

$$\begin{aligned} \log 0{,}427 &= \overset{+2}{\not 0},6304279 - \overset{-3}{\not 1} \\ \log 0{,}0034159 &= 0{,}5335051 - 3 \\ \hline \log D &= 2{,}0969228; \end{aligned}$$

folglich $D = 125{,}00368.$

5) $E = 1{,}203^{23}$. Man multiplicirt den log des Dignanden mit dem Exponenten, so entsteht:

$$\log E = 1{,}8461088, \text{ also } E = 70{,}1631.$$

6) $F = 0{,}945^{3{,}4}$. Man vergesse hier nicht, auch die negative Charakteristik zu multipliciren; es entsteht $\log F = 3{,}3164681 - 3{,}4$. Addirt man nun zu Minuend und Subtrahend 0,6 und zieht von beiden noch 3 ab, oder zieht man vom Minuend und Subtrahend 2,4 ab, so folgt $\log F = 0{,}9164681 - 1$; hieraus $F = 0{,}825027$.

7) $G = 2{,}998^{-2{,}5}$; $\log G = 0{,}8079210 - 2$, folglich $G = 0{,}064257088$.

8) $H = 0{,}034999^{-2{,}1}$. Da der Exponent negativ ist und der log des Dignanden auch, so kann man letzteren in eine negative Zahl verwandeln und dann multipliciren; das Product wird positiv.

$$\log 0{,}034999 = 0{,}5440556 - 2$$
$$= -1{,}4559444.$$

Jetzt multiplicirt, so folgt $\log H = 3{,}0574832$; $H = 1141{,}519$.

9) $I = \sqrt[14]{4389{,}9}$. Man dividirt den log des Radicanden durch 14; so entsteht:

$$\log I = 0{,}2601753, \text{ also } I = 1{,}8204355.$$

10) $K = \sqrt[9]{0{,}000489}$. Da 9 in die negative Charakteristik nicht aufgeht, so vermehrt man letztere um so viele negative Einheiten, bis dies der Fall ist. Natürlich muß man vor das Decimalkomma eben so viele positive Einheiten setzen. So entsteht:

$$\log 0{,}000489 = \overset{+5}{\not{0}}{,}6893089 - \overset{-9}{\not{4}}$$
$$9)\overline{\phantom{0{,}6321454 - 1}}$$
$$\log K = 0{,}6321454 - 1,$$

folglich $K = 0{,}428692$.

Zur Uebung. 1) $72434{,}69 \cdot 0{,}00136 \cdot 3{,}1415926 = 309{,}482$.

2) $0{,}8259^{6} = 0{,}3173693$. 3) $\dfrac{0{,}9352996}{9{,}1801} = 0{,}2237505$.

4) $\sqrt[10]{597863{,}9} = 3{,}781466$. 5) $\sqrt[7]{0{,}009837997} = 0{,}5167403$.

II. Bei der Berechnung zusammengesetzterer Ausdrücke unterscheidet man solche, welche eine Addition oder Subtraction enthalten, von denen, in welchen Summen und Differenzen nicht vorkommen. Letztere kann man ohne Unterbrechung mit Logarithmen berechnen (§. 67.), d. h. man kann den Logarithmus jedes Ausdrucks dieser Art mittelst der Logarithmentafeln finden, ohne auch nur einmal einen Numerus aufschlagen zu müssen, so daß ein Numerus über-

haupt nur einmal aufzuschlagen ist, nämlich am Schlusse der Rechnung, wenn man von dem Logarithmus des ganzen Ausdrucks zum Ausdrucke selbst übergeht. Bei den Ausdrücken ersterer Art berechnet man die zu addirenden oder zu subtrahirenden Glieder mit Logarithmen, führt dann die Addition und Subtraction aus und kann nachher, wenn es nöthig oder bequem ist, weiter mit Logarithmen rechnen. Die ersten beiden Beispiele zeigen diese zwei Fälle. Im ersten Beispiele ist A ohne Unterbrechung mit Logarithmen zu berechnen, weil man erst am Schlusse der Rechnung, wenn man von log A zu A übergeht, einen Numerus aufzuschlagen hat. Im zweiten Beispiele hingegen ist B nicht ohne Unterbrechung mit Logarithmen zu berechnen; denn man kann log B nur finden, wenn man vorher den zweiten Summand im Zähler des Radicanden berechnet, also einmal einen Numerus aufgeschlagen hat. Ist dieser Numerus gefunden und die Addition im Zähler ausgeführt, so geschieht die weitere logarithmische Berechnung wieder ohne Unterbrechung; denn erst am Schlusse der Rechnung hat man, um B aus log B zu finden, einen Numerus aufzuschlagen.

1) $A = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot \sqrt{11}}{3 \cdot \sqrt[3]{14}}}$. Man erhält:

$$\log A = \frac{1}{3}[\log 4 + \frac{1}{2}\log 11 - (\log 3 + \frac{1}{3}\log 14)]$$ und würde

praktisch so rechnen:

log 11 = 1,0413927	log 14 = 1,1461280
2) ———	3) ———
0,5206963	0,3820427
log 4 = 0,6020600	log 3 = 0,4771213
log (Zähler) = 1,1227563	log (Nenner) = 0,8591640
log (Nenner) = 0,8591640	
0,2635923	
3) ———	
log A = 0,0878641	
0,0878524 N = 12242	
(Dff = 354) 117	
106,2 3	
10 8	
10 6,2 3	

A = 1,224233.

$$2)\ B = \sqrt[5]{\frac{7{,}284 + 497{,}3 \cdot 4{,}289497^{-2{,}1}}{0{,}0479 \cdot \sqrt[3]{0{,}001593478^2}}}.$$

Setzt man $x = 497{,}3 \cdot 4{,}289497^{-2{,}1}$, so folgt

$$\log x = \log 497{,}3 - 2{,}1 \cdot \log 4{,}289497.$$

log 4,289497 = 0,632396 5 (Dff = 102)
9 . . . . 9 1,8
7 . . . . 7 1,4
0,632406 4
2,1
632406 4
1 2648128
1,3280534 4 } subtrahirt:
log 497,3 = 2,6966185 }
log x = 1,3685650 6
3685472 N = 23364
(Dff = 186) 178,6
167,4 9
11 2
11 1,6 6

x = 23,36496.

Setzt man nun den Werth von x in den gegebenen Ausdruck ein, so erhält man:

$$B = \sqrt[5]{\frac{7{,}284 + 23{,}36496}{0{,}0479 \cdot \sqrt[3]{0{,}001593478^2}}} = \sqrt[5]{\frac{30{,}64896}{0{,}0479 \cdot \sqrt[3]{0{,}001593478^2}}}.$$

Hieraus folgt:

$$\log B = \frac{1}{5}\Big[\log 30{,}64896 - \left(\log 0{,}0479 + \frac{2}{3}\log 0{,}001593478\right)\Big].$$

log 0,001593478 = 0,2023248 — 3 (Dff = 273)
7 191,1
8 . . . . 21 8,4

0,2023461 — 3
2

0,4046922 — 6
3)

0,1348974 — 2
log 0,0479 = 0,6803355 — 2

log (Nenner) = 0,8152329 — 4
log (Zähler) = 5,4864157 — 4 } subtrahirt:

4,6711828
5)

log B = 0,9342365 6
9342358 N = 85948
(Dff = 50) 7,6
5,0 1
2 6
2 5,0 5

B = 8,594815.

log 30,64806 = 1,4864021 (Dff = 142)
9 127,8
6 . . . . . 8 5,2

log (Zähler) = 1,4864157

3) $\sqrt[3]{\frac{0{,}4742759}{4875{,}3}} = 0{,}04599139.$

4) $\frac{3 \cdot 12^{1,2} \cdot \sqrt[3]{0{,}5}}{4{,}02 \cdot 0{,}94^5} = 15{,}9195.$

5) $\sqrt{\frac{1{,}52}{0{,}00734}} = 14{,}390429.$

6) $\frac{4{,}208 \cdot \sqrt[5]{0{,}1}}{97{,}342} = 0{,}027275666.$

7) $\frac{27{,}435 \cdot \sqrt[4]{0{,}01247398}}{0{,}0042} = 2183{,}0163.$

8) $\frac{10{,}079}{0{,}0057 \cdot \sqrt[5]{0{,}03710478}} = 3417{,}091.$

9) $\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2{,}4^{3,1}}{\sqrt{0{,}24}}} = 4{,}520885.$

10) $\frac{0{,}6886795^{3,1}}{\sqrt[5]{83972}} = 0{,}03258565.$

11) $\sqrt[5]{\dfrac{33{,}6 \cdot 0{,}03^3}{9{,}93^6 \cdot \sqrt[4]{0{,}09}}} = 0{,}0176803.$

12) $\sqrt[5]{\dfrac{0{,}47 \cdot \sqrt[3]{3{,}27}}{0{,}001 \cdot 0{,}77^{-1{,}4}}} = 3{,}443025.$

13) $B = \sqrt[10]{2 - \sqrt[10]{3}}$. Hier berechnet man zuerst $\sqrt[10]{3} = 1{,}116123$. Nun subtrahirt man und rechnet dann wieder mit Logarithmen. Man erhält $B = 0{,}9877322$.

14) $\sqrt[3]{10{,}7 + \sqrt[5]{0{,}58212}} = 2{,}263535.$

15) $\dfrac{100}{1{,}22 - \sqrt[5]{0{,}0028777}} = 109{,}9287.$

16) $\sqrt[5]{4{,}69701 - \sqrt[3]{101}} = 0{,}52530554.$

17) $\sqrt[5]{0{,}23^{-0{,}23} - 0{,}23^{0{,}23}} = 0{,}9282046.$

18) Die Ausdrücke $A = \sqrt[5]{\dfrac{0{,}8 \cdot \sqrt{0{,}2}}{0{,}2 + \sqrt{0{,}2}}}$

$$B = \sqrt[9]{\frac{0{,}12 \cdot \sqrt{0{,}4}}{0{,}4 + \sqrt{0{,}4}}}$$

$$C = \sqrt[5]{\sqrt{1 + \sqrt{0{,}2}} - \sqrt{0{,}5 + \sqrt{0{,}2}}}$$

auf die einfachste Form zu bringen und dann mit Logarithmen auszurechnen. Aufl.

$$A = \sqrt[5]{1 - \sqrt{0{,}2}} = 0{,}8882012.$$

$$B = \sqrt[9]{0{,}2 - \sqrt{0{,}016}} = 0{,}7482345.$$

$$C = \sqrt[10]{0{,}5 - \sqrt{0{,}2}} = 0{,}7451646.$$

Der Logarithmus einer negativen Zahl ist nicht reell; soll daher ein negativer Ausdruck mit Logarithmen berechnet werden, so kann sich die Ausrechnung nur auf das absolute Glied desselben erstrecken; das negative Vorzeichen ist nie in die logarithmische Berechnung zu ziehen.

19) $C = \sqrt[5]{-\frac{13}{30}}$. Man setzt $C = -\sqrt[5]{\frac{13}{30}}$, berechnet $\sqrt[5]{\frac{13}{30}}$ mit Logarithmen und erhält $C = -0{,}8459884$.

20) $\sqrt[3]{-\frac{217}{588}} = -0{,}7172889$.

21) $\sqrt[3]{0{,}9 - 0{,}9^{-11{,}2}} = -1{,}3303506$.

22) $\sqrt[5]{3{,}49 + 0{,}24^{1{,}2}} = 1{,}2970085$.

23) $\sqrt{0{,}2 + \sqrt[3]{0{,}00015}} = 0{,}5031231$.

24) $\sqrt[5]{32{,}7^{-2{,}1} - 0{,}97581} = -0{,}9949797$.

25) $\sqrt[3]{\frac{2 + \sqrt{6{,}3}}{2 - \sqrt{6{,}3}}} = -2{,}067952$.

26) $\sqrt[5]{4{,}579709 + \left(\frac{0{,}4 \cdot \sqrt[10]{3}}{0{,}0058617}\right)^{-0{,}2}} = 1{,}379735$.

27) $\sqrt[5]{\frac{0{,}427 - \sqrt[4]{0{,}427}}{27{,}04859^{-2{,}5}}} = -4{,}288844$.

28) $\sqrt{\frac{0{,}8 + \sqrt[4]{0{,}8}}{0{,}2^{8{,}1}}} = 894{,}99056$.

29) $\sqrt[3]{3 - \sqrt{21}} = -1{,}1653457$.

30) $\sqrt[3]{\frac{1}{10{,}7 - 0{,}3^{-5{,}2}}} = -0{,}1249298$.

31) $\left(0{,}3 + \frac{0{,}3785947^3}{9{,}8075}\right)^{2{,}1} = 0{,}08291294$.

32) $\sqrt[3]{99 + 70\sqrt{2}} - \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = 2{,}414213$.

33) $\sqrt[5]{4{,}728 - \sqrt[6]{8739049}} = -1{,}57279$.

34) $\sqrt[3]{2{,}734^{2{,}4} - \frac{2 + 0{,}0001^{-1{,}3}}{5{,}2 + \sqrt[4]{0{,}078^{-1}}}} = -28{,}1623$.

$$35)\ \sqrt[5]{\frac{(-0{,}47)^6 \cdot \sqrt[3]{-3{,}27^4}}{(-0{,}01)^{-5} \cdot (-74{,}39208)^3}} = -0{,}0004176516.$$

Anmerkung. Zur Beantwortung der Frage, wie man sich hilft, wenn die Seite, auf welcher ein gesuchter Logarithmus oder Numerus steht, in den Tafeln fehlt, wird wohl die Bemerkung hinreichen:

$$\log a = \log(na) - \log n, \text{ und } a = \frac{\text{Num}\,[\log a + \log n]'}{n}.$$

§. 129.

Berechnung der Logarithmen eines beliebigen Systems mit Hülfe der Briggs'schen Logarithmen.

Um mittelst der Briggs'schen Logarithmentafeln den Logarithmus einer Zahl für eine andere Basis als 10 zu finden, wendet man das Gesetz §. 66. V. an und setzt $\overset{b}{\log}\, a = \frac{\log a}{\log b}$. z. B.

1) $\overset{27}{\log}\, 4 = 0{,}4206198$. Man dividirt log 4 durch log 27 und kann die Division mit Logarithmen ausführen.

2) $\overset{0,3}{\log}\, 2 = -0{,}5757168 = 0{,}4242832 - 1$.

Aus $\overset{b}{\log}\, a = \frac{1}{\log b} \times \log a$ folgt, daß man alle Logarithmen des Systems zur Basis b erhält, wenn man alle Briggs'schen Logarithmen mit $\frac{1}{\log b}$ multiplicirt. So erhält man z. B. die Logarithmen des Systems zur Basis 2, wenn man die Briggs'schen Logarithmen mit $\frac{1}{\log 2}$ d. h. mit 3,321928 multiplicirt. — Der Multiplicator $\frac{1}{\log b}$, mittelst dessen man die Briggs'schen Logarithmen in Logarithmen des Systems zur Basis b verwandeln kann, wird der Model des Logarithmen-Systems zur Basis b in Bezug auf das Briggs'sche Logarithmen-System genannt.

Zweiter Abschnitt.

Die Algebra.

Einleitung.

§. 130.

Erklärung.

In alle bisher betrachteten Gleichungen konnte man statt der Buchstaben, welche sie enthielten, ganz beliebige Werthe setzen; die Gleichungen mußten immer richtig sein. z. B.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\quad \frac{a}{b} = x + \frac{a-bx}{b},\ \text{u. s. w.}$$

Beide Seiten einer solchen Gleichung stellen immer dieselbe Zahl vor und geben ihren Werth nur in verschiedener Form. Man nennt daher alle diese Gleichungen auch identische Gleichungen (zuweilen auch analytische). — Denken wir uns nun zwei Ausdrücke, welche nicht dieselbe Zahl bezeichnen, von denen aber wenigstens der eine den Buchstaben x enthält, so können wir die Frage stellen, ob nicht diese Ausdrücke wenigstens für einen bestimmten Werth von x, oder auch für mehrere, einander gleich sind, d. h. dieselbe Zahl vorstellen. Nehmen wir z. B. die beiden Ausdrücke $(x+a)^3$ und $x^3 + a^3$. Sie sind an sich nicht gleich; wir können aber fragen: für welche Werthe von x ist $(x+a)^3 = x^3 + a^3$? oder auch: für welche Werthe von x ist $(x+a)^3 = x^3 + a^3$ eine identische Gleichung? In der That giebt es zwei Werthe von x, für welche diese Gleichung richtig wird, nämlich $x = 0$ (es entsteht $a^3 = a^3$) und $x = -a$ (es entsteht $0 = 0$).

Eine solche (nicht identische) Gleichung, welche man zu dem Zwecke bildet, um diejenigen Werthe eines Buchstaben, den sie enthält, zu bestimmen, für welche sie richtig wird, nennt man in Rücksicht

auf diesen Zweck eine Bestimmungs-Gleichung, und der Buchstabe, dessen die Gleichung richtig machenden Werth man sucht, heißt die unbekannte Zahl oder die Unbekannte. Man pflegt die Unbekannte durch die letzten Buchstaben des Alphabets (x, y, z, ...) zu bezeichnen. Daß eine Bestimmungsgleichung mehr als eine Unbekannte haben kann, ist leicht einzusehen.

Beispiele: 1) $2a - x = 2b + x$; richtig für $x = a - b$.
2) $x^2 + 6 = 5x$; richtig für $x = 2$ und auch für $x = 3$.
3) $3 \cdot 2^{x-1} + 4^{x-1} = 1 + 3^x$; richtig für $x = 1$, auch für $x = 2$ und auch für $x = 3$.

Die Algebra lehrt, wie man zu bestimmten Zwecken Bestimmungsgleichungen bilden und dann die Werthe der Unbekannten finden kann, für welche sie zu identischen Gleichungen werden.

§. 131.

Erklärung. Ansatz und Auflösung der Bestimmungs-Gleichungen.

Eine Aufgabe führt zu einer Bestimmungsgleichung, wenn sie den Zusammenhang zwischen bekannten Zahlen und einer unbekannten (auch mehreren) so angiebt, daß man denselben durch eine Gleichung ausdrücken kann, nachdem man die Unbekannte durch einen Buchstaben x bezeichnet hat; nur muß dieser Zusammenhang von der Art sein, daß aus ihm nicht unmittelbar hervorgeht, wie man die bekannten Zahlen allein mit einander zu verbinden hat, um die Unbekannte zu erzeugen; denn in diesem Falle ist die Aufgabe ein einfaches Rechen-Exempel. So z. B. führt folgende Aufgabe zu keiner Bestimmungsgleichung: Die Zahl zu finden, welche um 6 größer ist, als die halbe Summe der Quadrate der Zahlen 5 und 7. Hier hat man unmittelbar:

$$x = \frac{5^2 + 7^2}{2} + 6 = 43.$$

Hingegen führt folgende Aufgabe zu einer Bestimmungsgleichung: Die Zahl zu finden, welche um 7 kleiner ist, als die halbe Summe der Quadrate der zwei Zahlen, von welchen die eine um 1 größer, die andere um 1 kleiner ist, als sie selbst. Man sieht hier wohl, daß die gesuchte Zahl von den gegebenen Zahlen 7, 2 (Exponent und Nenner) und 1 abhängen muß; wie man aber diese Zahlen mit einander zu verbinden hat, um die Unbekannte zu erzeugen, erfährt man nicht. Bezeichnet man aber die Unbekannte durch x, so kann man die Bedingung der Aufgabe durch die Gleichung ausdrücken:

$$x = \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{2} - 7;$$

d. h. der Werth von x, welcher diese Gleichung zu einer identischen macht, ist die Antwort auf die in der Aufgabe liegende Frage. Obige Gleichung wird aber richtig für $x = 3$ und für $x = -2$.

Eine solche Bestimmungsgleichung bilden, heißt den Ansatz machen oder die Gleichung ansetzen; den Werth der Unbekannten ermitteln, für welche die Gleichung richtig wird, heißt die Gleichung auflösen oder die Unbekannte entwickeln.

Ueber das Ansetzen einer Gleichung merke man die allgemeine Regel: Man suche irgend eine in der Aufgabe vorkommende Größe oder Zahl (auch ein Verhältniß) zweimal auszudrücken, entweder beide Mal durch bekannte und unbekannte Zahlen (wobei man die Unbekannten, wie angeführt, bezeichnen muß), oder auch wohl das eine Mal durch bekannte Zahlen allein, und setze beide Ausdrücke einander gleich. z. B. Zwei Arbeiter A und B vollenden eine Arbeit in 20 Tagen; A allein würde hierzu 30 Tage gebraucht haben, wie viel Tage B allein? Nimmt man an, daß B x Tage braucht, um allein die Arbeit auszuführen, so kann man den Theil der Arbeit doppelt ausdrücken, den A und B zusammen in einem Tage vollenden. Zu der ganzen Arbeit brauchen sie 20 Tage, folglich vollenden sie in einem Tage $\frac{1}{20}$ der Arbeit. Dieser zwanzigste Theil der ganzen Arbeit muß aber eben so groß sein, als der Theil, welchen A allein in einem Tage fertigt, addirt zu dem Theile, den B in einem Tage allein vollendet. A macht die ganze Arbeit in 30 Tagen, also in einem Tage $\frac{1}{30}$ der Arbeit; B braucht zu der ganzen Arbeit x Tage, folglich vollendet er in einem Tage $\frac{1}{x}$ der Arbeit; es muß sonach

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{30} + \frac{1}{x}$$

sein. Diese Gleichung ist richtig für $x = 60$, also würde B allein 60 Tage brauchen.

§. 132.

Eintheilung der Gleichungen.

Zum Auflösen der Gleichungen ist das Ordnen derselben erforderlich. Bei einer Gleichung mit einer Unbekannten x versteht man

hierunter die Umformung der Gleichung, bis sie folgende Gestalt erhalten hat:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \ldots + px^2 + qx + r = 0.$$

In dieser Gleichung sind alle Exponenten von x positive ganze Zahlen, n aber ist der höchste Exponent von x; die Coefficienten a, b, c, ... p, q, r stellen beliebige bekannte Zahlen (auch Null) vor. Jede Gleichung, welche sich auf diese Form bringen läßt, heißt eine algebraische Gleichung; jede, welche diese Form nicht annehmen kann, eine transcendente. Ist eine Gleichung nicht geordnet, so kann man darüber, ob sie algebraisch oder transcendent ist, nicht immer sogleich entscheiden; es mag nur vorläufig bemerkt werden, daß eine Gleichung, wenn sie nur die bisher betrachteten arithmetischen Formen: Summen, Differenzen, Producte, Quotienten, Potenzen, Wurzeln und Logarithmen enthält, dann immer algebraisch ist, wenn x in keinem Exponenten und in keinem Logarithmus vorkommt. Ist dies der Fall, so ist die Gleichung in der Regel transcendent. So sind z. B. $3 - x^2 = (1 + x^3)^4$ und $\sqrt{1-x} = 2 + \frac{3+2x}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ algebraische Gleichungen; hingegen sind $2^x + 7 = 3x^2$ und $x + \log x = 6$ transcendente Gleichungen.

Die Gleichung:

$$1 + \log(10^{x-1} + x^2 - 2) = x$$

ist eine algebraische Gleichung, wie aus folgender Umformung hervorgeht: Zieht man von beiden Seiten 1 ab, so folgt:

$$\log(10^{x-1} + x^2 - 2) = x - 1,$$

folglich:

$$10^{x-1} + x^2 - 2 = 10^{x-1}.$$

Zieht man von beiden Seiten 10^{x-1} ab, so bleibt:

$$x^2 - 2 = 0.$$

Die geordnete algebraische Gleichung

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px^2 + qx + r = 0$$

heißt eine einfache oder eine Gleichung vom ersten Grade (auch lineare), wenn n = 1 ist, d. h. wenn sie die Form $x + a = 0$ hat. Sie heißt vom zweiten Grade oder eine quadratische Gleichung, vom dritten Grade (kubische), vom vierten Grade (biquadratische), vom fünften, sechsten u. s. w. Grade, wenn n bezüglich gleich 2, 3, 4, 5, 6, ... ist. Alle diese Gleichungen nennt man auch höhere Gleichungen, im Gegensatz zu den einfachen. Häufig werden aber auch die quadratischen Gleichungen nicht den höheren Gleichungen zugezählt; sie bilden dann eine besondere Klasse. Die Gleichung vom nten Grade heißt eine vollständige,

oder eine unvollständige, je nachdem keiner der Coefficienten a, b, c, ... bis r Null ist, oder solche Coefficienten vorkommen. Endlich heißt sie eine reine Gleichung, wenn außer x^n nur noch ein Glied ohne x vorkommt, sonst eine unreine. z. B.

1) $x^5 - 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$ ist eine vollständige Gleichung vom fünften Grade.

2) $x^4 - \frac{3}{4}x^2 + 3 = 0$ ist eine unvollständige unreine biquadratische Gleichung.

3) $x^3 + 1 = 0$ ist eine reine kubische Gleichung.

Auch die Gleichungen mit zwei Unbekannten ordnet man nach den fallenden Potenzen dieser Unbekannten. So ist

$ax + by + c = 0$ eine geordnete einfache oder lineare Gleichung;

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ eine quadratische;

$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + k = 0$ eine kubische, u. s. w.

Aehnliches gilt von Gleichungen mit noch mehr Unbekannten.

Jeder Werth der Unbekannten, welcher eine Bestimmungsgleichung zu einer richtigen, d. h. identischen Gleichung macht, wird eine Wurzel dieser Gleichung genannt.

Erstes Kapitel.

Die einfachen Gleichungen mit einer und mit mehreren Unbekannten.

§. 133.

Auflösung der einfachsten Gleichungen mit einer Unbekannten.

Die einfachsten algebraischen Gleichungen, welche nur eine Unbekannte x und diese nur einmal enthalten, sind:

1) $x + a = b$; 2) $x - a = b$; 3) $a - x = b$;

4) $a \cdot x = b$; 5) $\frac{x}{a} = b$; 6) $\frac{a}{x} = b$;

7) $x^a = b$; 8) $\sqrt[a]{x} = b$.

Von diesen ist nur die 7te eine höhere, und ihre vollständige Auflösung kann erst später erfolgen; jetzt aber sind wir, wenigstens in dem Falle, daß b eine positive Zahl ist, immer im Stande, eine Wurzel der Gleichung zu finden.

Die Auflösung jeder Gleichung besteht nun darin, daß man sie so weit umformt, bis x auf einer Seite allein, also auf der anderen nur Bekanntes steht. In den vorliegenden Gleichungen haben wir also a von x zu trennen, und dies geschieht immer durch Anwendung der Rechnungsart, welche derjenigen entgegengesetzt ist, durch welche a und x verbunden sind. Man muß also in 1) von beiden Seiten a abziehen, aber in 2) zu beiden Seiten a addiren; in 4) muß man beide Seiten durch a dividiren, in 5) mit a multipliciren; in 7) aus beiden Seiten die ate Wurzel ziehen, in 8) beide Seiten mit a potenziren. Wenn man endlich in 3) zu beiden Seiten x addirt, in 6) beide Seiten mit x multiplicirt, so hat man diese Fälle auf 1) und 4) zurückgeführt. So folgt:

1) $x + a = b$; Auflösung: $x = b - a$;
2) $x - a = b$; " $x = b + a$;
3) $a - x = b$; " $x = a - b$;
4) $ax = b$; " $x = \frac{b}{a}$;
5) $\frac{x}{a} = b$; " $x = ab$;
6) $\frac{a}{x} = b$; " $x = \frac{a}{b}$;
7) $x^a = b$; " $x = \sqrt[a]{b}$;
8) $\sqrt[a]{x} = b$; " $x = b^a$.

Durch diese Auflösungen kommt man aber auf folgende Regeln, welche die Grundlage des gewöhnlichen Operirens bei Gleichungen sind:

I. Ist eine Seite einer Gleichung eine algebraische Summe, so kann man jedes beliebige Glied mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die andere Seite setzen. (Nr. 1. und 2.)

II. Ist eine Seite ein Product oder ein Quotient, so kann man einen Factor als Nenner, den Nenner als Factor auf die andere Seite setzen. (Nr. 4. und 5.)

III. Ist eine Seite eine Potenz oder eine Wurzel, so kann man den Potenzexponent als Wurzelexponent, den Wurzelexponent als Potenzexponent auf die andere Seite setzen. (Nr. 7. und 8.)

IV. Ist eine Seite eine Differenz oder ein Quotient, so kann man den Subtrahend oder den Divisor (Nenner) mit der anderen Seite vertauschen. (Nr. 3. und 6.) Aus $a - x = b$ folgt $a - b = x$, aus $\frac{a}{x} = b$ folgt $\frac{a}{b} = x$.

13*

§. 134.
Auflösung einer algebraischen Gleichung, welche x nur einmal, aber mit beliebig vielen bekannten Zahlen verbunden, enthält.

Man schafft die mit x verbundenen Zahlen nach und nach auf die andere Seite, und zwar in einer Ordnung, welche derjenigen gerade entgegengesetzt ist, in welcher sie mit x verbunden sind. Wenn während der Rechnung aber die Seite, welche x enthält, eine Differenz oder ein Quotient wird und x im Subtrahend oder im Divisor steht, so vertauscht man zunächst den Subtrahend oder den Divisor mit der anderen Seite und setzt dann die Rechnung fort. z. B.

1) $6+\sqrt{\frac{3a+\sqrt{x^3-b}}{a}} = 8.$

Aufl. $\sqrt{\frac{3a+\sqrt{x^3-b}}{a}} = 2$; (§. 133, I.)

$\frac{3a+\sqrt{x^3-b}}{a} = 4$; (§. 133, III.)

$3a+\sqrt{x^3-b} = 4a$; (§. 133, II.)

$\sqrt{x^3-b} = a$; $x^3-b = a^2$;

$x^3 = a^2+b$; $x = \sqrt[3]{a^2+b}.$

2) $d^3 = (2ab)^3-(a^3+b^3-x^3)^3$

Aufl. $(a^3+b^3-x^3)^3 = (2ab)^3-d^3$ (§. 133, IV.)

$a^3+b^3-x^3 = \sqrt[3]{(2ab)^3-d^3}$;

$a^3+b^3-\sqrt[3]{(2ab)^3-d^3} = x^3$;

$x = \sqrt[3]{a^3+b^3-\sqrt[3]{(2ab)^3-d^3}}.$

3) $\sqrt[4]{18-\sqrt[3]{10-\sqrt{\frac{8}{5-\sqrt[4]{3x^3}}}}} = 2.$

Aufl. $18-\sqrt[3]{10-\sqrt{\frac{8}{5-\sqrt[4]{3x^3}}}} = 16$;

$2 = \sqrt[3]{10-\sqrt{\frac{8}{5-\sqrt[4]{3x^3}}}}$;

$$8 = 10 - \sqrt{\frac{8}{5-\sqrt[4]{3x^3}}};\quad \sqrt{\frac{8}{5-\sqrt[4]{3x^3}}} = 2;$$

$$\frac{8}{5-\sqrt[4]{3x^3}} = 4;\quad 2 = 5 - \sqrt[4]{3x^3}\ (\text{§. 133, IV.});$$

$$\sqrt[4]{3x^3} = 3;\quad 3x^3 = 3^4;\quad x^3 = 3^3;\quad x = 3.$$

4) $a = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2-x^2}};\quad x = \frac{a}{r}\sqrt{4r^2 - a^2}.$

5) $b + \frac{a^2-b^2}{2a-x} = a;\quad x = a - b.$

6) $1 + \cfrac{4}{4+\cfrac{3a}{1+\cfrac{a^2-1}{a+\cfrac{1}{x}}}} = \frac{11}{7};\quad x = 1.$

7) $\sqrt[3]{10 - \frac{2a-4b}{x-3c}} = 2;\quad x = a - 2b + 3c.$

8) $3a - \sqrt{\frac{8a^3}{a+x}} = a;\quad x = a.$

9) $\sqrt{3 + \sqrt[4]{\frac{1-a}{x}} + \sqrt{a}} = 2;\quad x = 1 + \sqrt{a};$

10) $2\cdot\sqrt{\frac{3x^2-1}{4}} + \frac{2}{3} = \sqrt{3};\quad x = \frac{2}{3}.$

11) $\frac{a+x}{b} - \frac{b}{a} = 1;\quad x = \frac{b^2+ab-a^2}{a}.$

12) $\sqrt{\frac{ax}{2b}} = \sqrt[3]{\frac{b}{a}};\quad x = \frac{2b}{a}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}.$

13) $\frac{1}{2+x} = \frac{3}{8};\quad x = \frac{2}{3}.$

14) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{5 - \frac{a}{a+x^2}}}} = 2;\quad x = 0.$

15) $\sqrt[3]{7a + \sqrt[3n+2]{a^2x^3}} = 2\sqrt[3]{a};\quad x = a^n.$

16) $a - \sqrt{b^2 + \sqrt{x^2 - 4a^2b^2}} = 0;\quad x = a^2 + b^2.$

17) $2 - \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{10-x^2}}{a}} = \frac{1}{4};\quad x = \sqrt{10 - 9a^2}.$

18) $\sqrt[6]{a+b^2-\sqrt[3]{(x-ab)(a+b)-b^3}}=\sqrt[3]{b}$; $x=a^2+b^2$.

19) $2a-\sqrt{a^2+1+2\left(\frac{a-b}{x}-\sqrt{b}\right)^2}=a-1$; $x=\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

20) $\sqrt[3]{\frac{a^6-b^6}{(a+b)x}+b^3}=a$; $x=a^2-ab+b^2$.

21) $\sqrt[n]{2a^n+a^{n-3}b^3\sqrt[n]{x^3}}=a\sqrt[n]{3}$; $x=\left(\frac{a}{b}\right)^n$.

22) $\sqrt[n+2]{a^{2m}x^m}=a^m$; $x=a^n$.

§. 135.

Das Ordnen einer Gleichung.

1) Man bringe die Nenner aus der Gleichung fort, indem man beide Seiten mit dem Generalnenner multiplicirt. Zuweilen ist es bequem, zuerst nur einige Nenner fortzuschaffen, und dann die andern.

2) Man löse alle Klammern auf, welche x enthalten. (Oft wird auch durch das Auflösen aller Klammern die Gleichung einfacher.) Hierher gehört auch das Fortschaffen der Wurzeln, wenn x unter dem Wurzelzeichen steht. Man formt die Gleichung so um, daß die fortzuschaffende Wurzel auf einer Seite allein steht, und potenzirt dann die Gleichung mit dem Wurzelexponenten. Kommen mehrere Wurzeln vor, so sucht man eine nach der andern fortzubringen. Ausnahmen von dieser Regel kommen vor (wie im Beispiel 3 und 4), auch gelingt dieses Verfahren nicht immer; man kann dann, wie im nächsten §. angegeben, verfahren.

3) Man bringe alle Glieder auf eine Seite, so daß auf der andern 0 steht, und ziehe die Glieder, welche dieselbe Potenz von x enthalten, in ein Glied zusammen: $ax^n \pm bx^n = (a \pm b)x^n$; dann ordene man die Glieder nach den fallenden Potenzen von x.

4) Man dividire die Gleichung, also jedes Glied, durch den Factor des ersten Gliedes, falls derselbe nicht schon +1 ist.

Manchmal ist es bequemer, Nr. 1. nach Nr. 2. auszuführen.

Beispiele. 1) $\frac{3+x}{4-x^2}-\frac{2+x}{2-x}=3+\frac{1+x}{6x+3x^2}$. Multiplicirt man die Gleichung mit dem Generalnenner $3x(4-x^2)$, so folgt:

$$3x(3+x)-3x(2+x)^2=9x(4-x^2)+(1+x)(2-x);$$

löst man alle Klammern auf, und bringt alle Glieder auf eine Seite:

$$6x^3 - 8x^2 - 40x - 2 = 0; \text{ hieraus:}$$

$$x^3 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{1}{3} = 0.$$

2) $\frac{a^2 + bx}{\sqrt{a^2 - bx}} = 2a - x$; bringt man die Wurzel auf die andere Seite und quadrirt, so entsteht:

$$a^4 + 2a^2bx + b^2x^2 = (4a^2 - 4ax + x^2)(a^2 - bx); \text{ hieraus:}$$

$$x^3 - \frac{a^2 + 4ab - b^2}{b}x^2 + \frac{4a^3 + 6a^2b}{b}x - \frac{3a^4}{b} = 0.$$

3) $\sqrt{ax} + \sqrt{\frac{a}{x}} = a + ax$; gleich quadrirt:

$$ax + 2a + \frac{a}{x} = a^2 + 2a^2x + a^2x^2; \text{ hieraus:}$$

$$x^3 + \frac{2a - 1}{a}x^2 + \frac{a - 2}{a}x - \frac{1}{a} = 0.$$

4) $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-5} = 1$; gleich kubirt:

$$x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt[3]{x-5} + 3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{(x-5)^2} - (x-5) = 1.$$

$$6 = 3\sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{x-5} \cdot [\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-5}].$$

Der Ausdruck in der Klammer ist nach der Aufgabe $= 1$, und hebt man noch durch 3, so folgt: $2 = \sqrt[3]{(x+2)(x-5)}$, folglich

$$8 = x^2 - 3x - 10, \text{ oder}$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0.$$

5) $\frac{a - x}{b + x} + \frac{ab + b^2}{2ab + ax} = 1 + \frac{b - x}{a}$; man erhält:

$$x^3 - 2(a - b)x^2 + (a^2 - 4ab)x + 2a^2b - ab^2 - b^3 = 0.$$

6) $\frac{3}{2}\sqrt{1 - x} - 1 = x^3 - \frac{2 + x}{x}$; man erhält:

$$x^8 - 4x^4 + \frac{9}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 4 = 0.$$

§. 136.

Mittelbare Entwickelung einer Unbekannten (x) durch Einführung einer zweiten Unbekannten (y).

Manche Gleichungen lassen sich bequemer dadurch auflösen, daß man, anstatt die Unbekannte x unmittelbar zu entwickeln, einen in der Gleichung vorkommenden Ausdruck, welcher x enthält, als die Unbekannte ansieht, ihn etwa durch y bezeichnet und nun die gegebene Gleichung in eine mit der Unbekannten y verwandelt. Kann

man aus der neuen Gleichung y finden, so giebt die zwischen x und y gewählte Gleichung das Mittel, um x zu bestimmen.

z. B. 1) $b \cdot \sqrt[3]{b + x^7} = b - (a + x^7)\sqrt[3]{b + x^7}$.

Setzt man $\sqrt[3]{b + x^7} = y$, so folgt

$$1)\ x^7 = y^3 - b.$$

Diesen Werth in die gegebene Gleichung gesetzt:

$$b \cdot y = b - (a + y^3 - b) \cdot y; \text{ hieraus:}$$

$$2)\ y^4 + ay - b = 0.$$

Kann man hieraus y finden, so folgt x aus 1).

2) $\sqrt{1 + 16x} + 2\sqrt{14 + 4x} = 11$.

Setzt man $\sqrt{1 + 16x} = y$, so folgt:

$$1)\ x = \frac{y^2 - 1}{16};$$

diesen Werth substituirt, folgt:

$$2)\ y - 3 = 0.$$

Also ist $y = 3$; daher aus 1) $x = \frac{1}{2}$.

3) $\dfrac{b^4}{2a^2 + 2abx^3} - 4ab = 3(a + bx^3)^2 + 4b^2x^3$.

Setzt man $a + bx^3 = y$, so folgt $bx^3 = y - a$, und die gegebene Gleichung wird:

$$y^3 + \frac{4}{3}by^2 - \frac{b^4}{6a} = 0.$$

4) $\sqrt[6]{3 + 4x} + \sqrt[7]{3 + 4x} = 2$.

Setzt man $3 + 4x = y^{42}$, so folgt:

$$y^7 + y^6 - 2 = 0.$$

Man kann sich dieses Verfahrens bedienen, um aus einer Gleichung, welche mehrere verschiedene Wurzeln enthält, diese fortzuschaffen. Setzt man für jede Wurzel einen besonderen Buchstaben (y, z, ...), so hat man unmittelbar so viel neue Gleichungen, als neue Unbekannte eingeführt sind. Diese Gleichungen, in Verbindung mit der gegebenen, führen zur Auflösung. Das Weitere hierüber folgt später, doch mag ein Beispiel durchgeführt werden. Es sei gegeben:

$$\sqrt[6]{1 + x} + \sqrt[5]{1 - x} = 2 + x.$$

Setzt man $\sqrt[6]{1 + x} = y$ und $\sqrt[5]{1 - x} = z$, so hat man:

$$1)\ 1 + x = y^6;$$

2) $1 - x = z^5$;

3) $y + z = 2 + x$.

Addirt man 1) und 2), so folgt:

4) $2 = y^6 + z^5$;

addirt man 1) und 3), so entsteht:

5) $y + z = 1 + y^6$;

hieraus folgt:

$$z = y^6 - y + 1,$$

und setzt man diesen Werth in 4), so folgt:

$$2 = y^6 + (y^6 - y + 1)^5.$$

Man hat jetzt eine Gleichung mit einer Unbekannten, und kann man aus ihr y finden, so folgt x aus 1).

§. 137.

Das Auflösen der Gleichungen durch Zerlegen in Factoren.

1) Zuweilen verläßt man bei dem Auflösen einer Gleichung den Weg des Ordnens, wenn man nämlich hoffen kann, auf folgende Weise zu den Wurzeln zu gelangen. Man sucht, nachdem alle Glieder auf eine Seite gebracht sind, diese Seite in ein Product zu verwandeln. Nun urtheilt man, daß ein Product Null wird, wenn auch nur ein Factor Null ist; folglich macht jeder Werth von x, welcher einen Factor zu Null macht, das ganze Product zu Null, ist also eine Wurzel der Gleichung. Man erkennt hieraus aber auch, woher es kommt, daß eine Gleichung mehr als eine Wurzel haben kann.

Beispiel 1. $\sqrt{(3x - 5)^3} - 2x\sqrt{3x - 5} = \sqrt{12x - 20}$.

Bringt man alle Glieder auf eine Seite und zieht die Wurzeln theilweise aus (§. 122. I.), so folgt:

$$(3x - 5)\sqrt{3x - 5} - 2x\sqrt{3x - 5} - 2\sqrt{3x - 5} = 0.$$

Sondert man $\sqrt{3x - 5}$ ab, so folgt:

$\sqrt{3x - 5} \cdot (3x - 5 - 2x - 2) = 0$ oder $(x - 7) \cdot \sqrt{3x - 5} = 0$.

Nun wird aber die linke Seite Null, wenn entweder

1) $x - 7 = 0$ ist, oder 2) $\sqrt{3x - 5} = 0$;

folglich hat die gegebene Gleichung die beiden Wurzeln:

$$x = 7 \text{ und } x = \frac{5}{3}.$$

Beispiel 2. $\frac{a}{x} - \frac{x}{a} = a - x$; multplicirt man mit ax, so folgt: $a^2 - x^2 = ax(a - x)$; $(a^2 - x^2) - (a - x)ax = 0$ oder $(a - x) \cdot [a + x - ax] = 0$.

Die Wurzeln sind also aus den beiden Gleichungen zu entnehmen:

1) $a - x = 0$ und 2) $a + x - ax = 0$.

Aus 1) folgt $x = a$, und ordnet man 2), so folgt

$$x - \frac{a}{a-1} = 0, \text{ also } x = \frac{a}{a-1}.$$

2) Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man jede Seite durch denselben Ausdruck dividirt. Enthält aber dieser Ausdruck die Unbekannte x, so verliert man durch die Division eine Wurzel der Gleichung; denn hätte man, anstatt zu dividiren, alle Glieder auf eine Seite gebracht, so hätte man diesen Ausdruck absondern können, und nach No. 1 dieses §. ist also der Werth von x eine Wurzel der Gleichung, welcher den Ausdruck, durch den man die Gleichung heben kann, zu Null macht. Will man also alle Wurzeln einer Gleichung ermitteln, so muß man den Ausdruck, durch welchen sich die Gleichung heben läßt, im Falle er x enthält, auch gleich Null setzen und aus der entstandenen Gleichung x entwickeln. Der Werth, welchen man für x erhält, ist dann auch eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

Beispiel 1. $3ax - bx^2 = cx$; man kann durch x heben, wenn man vorher $x = 0$ als eine Wurzel der Gleichung notirt hat; oder man sagt: $3ax - bx^2 - cx = 0$; $x(3a - bx - c) = 0$; hieraus folgt: $x = 0$ und auch $x = \frac{3a - c}{b}$.

Beispiel 2. $x^3 - ax^2 = x^2 - a^2$; sondert man links x^2 ab: $x^2(x - a) = x^2 - a^2$, so kann man durch $x - a$ heben, nur muß man $x = a$ als eine Wurzel der Gleichung angeben; man erhält $x^2 = x + a$ oder $x^2 - x - a = 0$, und aus dieser quadratischen Gleichung sind nun die andern Wurzeln zu finden.

§. 138.

Auflösung der einfachen Gleichung mit einer Unbekannten.

Nachdem die Gleichung geordnet, also auf die Form $x + a = 0$ gebracht ist, hat man unmittelbar $x = -a$. In der Regel bringt man schon beim Ordnen die Glieder, welche x enthalten, auf eine Seite, die anderen auf die andere Seite. z. B.

$$1)\ \frac{a + x}{2a^2 - 2b^2} + \frac{b + x}{3a - 3b} = \frac{2b + x}{a^2 + ab} + \frac{1}{3}.$$

Auflösung. Multiplicirt man die Gleichung mit dem General-Nenner $6a(a + b)(a - b)$, so folgt:

$$3a(a + x) + 2a(a + b)(b + x) = 6(a - b)(2b + x) + 2a(a^2 - b^2).$$

Löst man die Klammern auf, welche x enthalten, so entsteht:

$$3a^2 + 3ax + 2a(a+b)b + 2a(a+b)x$$
$$= 12b(a-b) + 6(a-b)x + 2a(a^2-b^2).$$

Bringt man alle Glieder, welche x enthalten, auf die linke, die anderen auf die rechte Seite, so erhält man:

$$3ax + 2a(a+b)x - 6(a-b)x$$
$$= 12b(a-b) + 2a(a^2-b^2) - 3a^2 - 2ab(a+b).$$

Sondert man jetzt x ab, so folgt:

$$(3a + 2a^2 + 2ab - 6a + 6b)x$$
$$= 12ab - 12b^2 + 2a^3 - 2ab^2 - 3a^2 - 2a^2b - 2ab^2$$

oder, wenn man ordnet:

$$(2a^2 + 2ab - 3a + 6b)x$$
$$= 2a^3 - 2a^2b - 4ab^2 - 3a^2 + 12ab - 12b^2.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$x = \frac{2a^3 - 2a^2b - 4ab^2 - 3a^2 + 12ab - 12b^2}{2a^2 + 2ab - 3a + 6b}.$$

Durch gewöhnliche Division erhält man endlich:

$$x = a - 2b.$$

2) $\frac{x-a}{2a+2b} - \frac{x-b}{4a} = \frac{x-3b}{3a-3b} - \frac{x-2a+3b}{6b}.$

Auflösung. $x = 2a + b.$

In Bezug auf den Ansatz (§. 131.) bei Aufgaben, welche in Worten gegeben sind, und in Bezug auf die Wurzeln der angesetzten Gleichungen möge der Leser noch Folgendes beachten:

Die erste Schwierigkeit des Ansatzes besteht darin, aus der Aufgabe die Zahl oder Größe zu erkennen, welche man doppelt auszudrücken hat, um den Ansatz zu bilden. Die leichteren Aufgaben weisen auf diese Zahl deutlich hin, bei schwereren Aufgaben gehört oft ein durch anhaltendes Ueben geschärftes Urtheil zum Auffinden des Ansatzes; bestimmte Regeln lassen sich hierüber nicht geben. Der Anfänger muß zunächst an recht vielen leichten Aufgaben das Ansetzen der Gleichungen üben und dann allmählich zu schwereren Aufgaben übergehen; alle guten Beispiel-Sammlungen enthalten die algebraischen Aufgaben in dieser Art geordnet, namentlich auch die empfehlenswerthe Sammlung von Meier Hirsch. Eine Hülfe zum Bilden des Ansatzes möchte dem Leser auch die nachfolgende Bemerkung gewähren. Wollte man untersuchen, ob eine bestimmte Zahl, z. B. die Zahl 12, die in einer Aufgabe gesuchte Zahl sei, so würde man diese Zahl 12 mit den bekannten Zahlen so verbinden müssen, wie die Aufgabe es angiebt, und hätte dann zu ermitteln, ob auf diese Weise die Bedingung erfüllt wird, welche die Aufgabe an die Unbekannte stellt, d. h. man

würde mit der Zahl 12 die Probe machen. Findet man die Bedingung der Aufgabe erfüllt, so hätte man die Ueberzeugung gewonnen, daß 12 die gesuchte Zahl ist. Wenn man nun aber die Unbekannte x nennt und mit x genau so verfährt, wie vorher mit der Zahl 12, wenn man also gleichsam mit x die Probe macht, so wird man auf diese Weise zu der Bedingung gelangen, die erfüllt sein muß, wenn x die gesuchte Zahl sein soll. Diese Bedingung wird sich in Form einer Gleichung ergeben, und diese Gleichung ist der Ansatz.

Nachstehend folgen einige Beispiele über den Ansatz; das Beispiel 1. erläutert das zuletzt Gesagte.

Beispiel 1. Welche Zahl giebt, um 24 vermehrt, viermal so viel, als um 3 vermindert?

Auflösung. Wollte man, mit Rücksicht auf das oben Gesagte, probiren, ob wohl 12 diese Zahl ist, so würde man 12 um 24 vermehren und um 3 vermindern müssen; man würde 36 und 9 erhalten. Die Aufgabe verlangt nun, daß erstere Zahl das Vierfache der letzteren sein soll, und da diese Bedingung, $36 = 4 \cdot 9$, wirklich erfüllt wird, so ist 12 die gesuchte Zahl.

Hieraus ergiebt sich nun, wie man verfährt, wenn die gesuchte Zahl x genannt wird. Vermehrt man x um 24, und vermindert man x um 3, so erhält man resp. $x + 24$ und $x - 3$; daher verlangt die Aufgabe, es soll

$$x + 24 = 4 \cdot (x - 3)$$

sein, und diese Gleichung ist der Ansatz. Löst man die Klammern auf, so folgt

$$x + 24 = 4x - 12, \text{ also}$$
$$12 + 24 = 4x - x,$$
$$36 = 3x, \text{ daher}$$
$$x = 12.$$

Beispiel 2. Eine Anzahl Personen wollen bei gleichen Beiträgen ein Lotterie-Loos kaufen. Nun findet es sich, daß, wenn jede Person 3 Thlr. 20 Sgr. giebt, 5 Thlr. weniger zusammenkommen, als das Loos kostet; giebt aber jede Person 4 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf., so kommen 2 Thlr. mehr zusammen; wie viel Personen sind es?

Auflösung. Bezeichnet x die Anzahl der Personen, so läßt sich der Preis des Looses doppelt ausdrücken. Giebt nämlich jede Person $3\frac{2}{3}$ Thlr., so kommen $x \cdot \frac{11}{3}$ Thlr. zusammen, und weil diese Summe um 5 Thlr. kleiner sein soll, als der Preis des Looses, so kostet das Loos $(\frac{11}{3}x + 5)$ Thlr. Giebt aber jede Person $4\frac{1}{4}$ Thlr., so kommen $x \cdot \frac{17}{4}$ Thlr. zusammen, und weil diese Summe den Preis des Looses um 2 Thlr. übersteigen soll, so ist dieser Preis auch gleich $(\frac{17}{4}x - 2)$ Thlr. Hieraus ergiebt sich nun der Ansatz: $\frac{11}{3}x + 5 = \frac{17}{4}x - 2$; folglich:

$$2 + 5 = \frac{17}{4}x - \frac{11}{3}x \text{ oder}$$
$$7 = \frac{7}{12}x; \text{ daher}$$
$$x = 12.$$

Es waren sonach 12 Personen.

Beispiel 3. Dieselbe Aufgabe, es wird aber nicht nach der Anzahl der Personen, sondern nach dem Preise des Looses gefragt.

Auflösung. Angenommen, das Loos koste y Thlr., so läßt sich diesmal die Anzahl der Personen doppelt ausdrücken. Giebt nämlich jede Person $3\frac{2}{3}$ Thlr., so kommen nach der Aufgabe $(y - 5)$ Thlr. zusammen; daher ist die Anzahl der Personen der Zahl gleich, welche angiebt, wie oft sich $3\frac{2}{3}$ Thlr. von $(y - 5)$ Thlr. abziehen lassen, oder wie oft $3\frac{2}{3}$ Thlr. in $(y - 5)$ Thlr. enthalten sind, d. h. die Anzahl der Personen ist gleich $(y - 5) : \frac{11}{3}$. Giebt aber jede Person $4\frac{1}{4}$ Thlr., so kommen $(y + 2)$ Thlr. zusammen, und hieraus erhält man wie oben die Anzahl der Personen gleich $(y + 2) : \frac{17}{4}$. Der Ansatz heißt also:

$$\frac{y - 5}{\frac{11}{3}} = \frac{y + 2}{\frac{17}{4}} \text{ oder}$$

$$\frac{17}{4} \cdot (y - 5) = \frac{11}{3} \cdot (y + 2).$$

Multiplicirt man mit 12, so entsteht:

$$51y - 255 = 44y + 88; \text{ hieraus:}$$

$$7y = 343, \text{ folglich } y = 49.$$

Das Loos kostet also 49 Thlr.

Zusatz zu den Beispielen 2 und 3. Man kann die vorliegende Aufgabe auch dadurch auflösen, daß man zwei Unbekannte einführt, nur muß man dann auch zwei Gleichungen bilden, worüber später das Nähere folgt. Angenommen, es wären x Personen und das Loos koste y Thlr., so kann man jede der beiden Summen doppelt ausdrücken, welche zusammen kommen, wenn das eine Mal jede Person $3\frac{2}{3}$ Thlr., das andere Mal $4\frac{1}{4}$ Thlr. giebt. Man erhält dann:

$$1)\ \frac{11}{3}x = y - 5,$$

$$2)\ \frac{17}{4}x = y + 2.$$

Zieht man 1) von 2) ab, so folgt:

$$\frac{7}{12}x = 7, \text{ daher I. } x = 12.$$

Diesen Werth in 1) oder 2) gesetzt, giebt II. $y = 49$.

Auch darauf sei der Leser noch aufmerksam gemacht, daß man die vorliegende Aufgabe leicht im Kopfe lösen kann, d. h. man kann den Zusammenhang zwischen den gegebenen Zahlen und den gesuchten so vereinfachen, daß man ähnliche Operationen, wie die, welche im Ansatz und in der Auflösung ihren schriftlichen Ausdruck gefunden haben, im Kopfe ausführen kann. Das erste Mal giebt jede Person 3 Thlr. 20 Sgr., nachher 4 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf.; der Unterschied beträgt 17 Sgr. 6 Pf. oder $\frac{7}{12}$ Thlr.; so viel giebt also jede Person das zweite Mal mehr, als vorher. Weil aber das erste Mal 5 Thlr. zu wenig, nachher 2 Thlr. zu viel gesammelt wurden, der Unterschied aber 7 Thlr. beträgt, so hat man den Schluß, daß, wenn jede Person $\frac{7}{12}$ Thlr. giebt, dann 7 Thlr. zusammen kommen. Hieraus findet man die Anzahl der Personen gleich $7 : \frac{7}{12} = 12$. Aus der Anzahl der Personen ist leicht der Preis des Looses zu finden.

Vergleicht man aber diese Auflösung mit der im Beispiel 2., so findet man, daß jetzt doch nur dasselbe, wie dort, ausgeführt worden ist, aber in einfacherer Form. Man hat namentlich die zweite Gleichung dort

$$2 + 5 = \frac{17}{4}x - \frac{11}{3}x$$

hier in der Form $2 + 5 = (\frac{17}{4} - \frac{11}{3})x$ erhalten.

Um mit einer Gleichung ungehindert operiren zu können, muß sie eine Gleichung zwischen unbenannten Zahlen sein. Entsteht also diese Gleichung dadurch, daß man eine Größe doppelt ausdrückt, so muß man beide Seiten derselben, also auch alle Glieder jeder Seite, auf dieselbe Benennung bringen und diese dann fortlassen.

Beispiel 4. Jemand besitzt 10 Thlr. in zwei Geldsorten, in Preußischen Thalern und Oesterreichischen Gulden ($\frac{2}{3}$ Thlr.), und zwar von jeder Sorte gleichviel Stücke; wie viel Stücke jeder Art waren es?

Auflösung. Angenommen: x Thlr., also auch x Guld., so hat man den Ansatz:

$$x \text{ Thlr.} + x \text{ Guld.} = 10 \text{ Thlr.}$$

Eine Entwickelung ist nur möglich, wenn man entweder die Gulden zu Thalern, oder die Thaler zu Gulden macht; dann kann man auf beiden Seiten die Benennung fortlassen. Je nachdem man das Eine, oder das Andere thut, entsteht: $x + \frac{2}{3}x = 10$, oder $\frac{3}{2}x + x = 15$.
Aus jeder dieser Gleichungen folgt $x = 6$.

Führt eine Aufgabe zu einer einfachen Gleichung und sind die in der Aufgabe vorkommenden bekannten Zahlen rational, so muß der Werth der Unbekannten, d. h. die Wurzel der Gleichung, auch rational sein, weil die Rechnungsart, durch welche eine irrationale Zahl erzeugt werden könnte, nämlich die Wurzelausziehung, bei der Auflösung überhaupt nicht vorkommt. Die Wurzel kann aber ganz oder gebrochen, positiv oder negativ, oder Null sein. Sind aber die bekannten Zahlen irrational oder imaginär (§. 54.), so kann auch die Wurzel eine solche Zahl sein. Bei höheren Gleichungen können, wie später gelehrt werden wird, die Wurzeln, bei ganz beliebigen bekannten Zahlen, sowohl rational, als auch irrational oder imaginär sein.

Wenn nun die Aufgabe, welche zu einer Bestimmungsgleichung führt, sich nur auf unbenannte Zahlen bezog, also nicht auf Größen, so ist jeder Zahlenwerth für die Unbekannte zuläßig, der den Ansatz zu einer identischen Gleichung macht; denn ein jeder solcher Werth löst die Aufgabe. Allerdings ist es möglich, daß eine solche Aufgabe in der Erwartung gestellt wurde, es werde die gesuchte Zahl von einer bestimmten Art sein, z. B. positiv oder ganz; und eben so möglich ist es, daß man in manchen Fällen von der Auflösung nur Gebrauch machen kann, wenn eine solche Erwartung sich bestätigt: aber immer

liegt dann eine solche Erwartung, auch wenn sie als Bedingung ausgesprochen wird, nicht in der Natur der Aufgabe, sondern erscheint neben der Bedingung der Aufgabe als eine zweite Bedingung, deren Erfüllung vielleicht die Auflösung zu einem gewissen Zwecke erst verwendbar macht, aber nicht gefordert werden darf, weil eine Unbekannte nur eine Bedingung erfüllen kann, und nicht beliebige zwei. Die Auflösung zeigt dann, ob man überhaupt das Recht hatte, eine solche Erwartung zu hegen, oder eine solche Bedingung auszusprechen.

Beispiel 5. Eine Zahl zu bestimmen, welche, um 30 vermehrt, zu ihrem Fünffachen anwächst.

Auflösung. Hätte man diese Aufgabe in der Erwartung gestellt, daß eine ganze Zahl dieser Art existirt, oder hätte man diese Erwartung gar als Bedingung der Aufgabe einverleibt, etwa in der Form: „Eine ganze Zahl zu bestimmen, welche u. s. w.“, so würde die Auflösung zeigen, daß man hierzu gar nicht berechtigt ist; denn aus dem Ansatze

$$x + 30 = 5x \quad \text{folgt} \quad x = 7\tfrac{1}{2},$$

und diese Auflösung schließt jede andere aus; jedenfalls liegt in der Natur dieser Aufgabe nicht, daß die Unbekannte eine ganze Zahl sein muß.

Anders ist es, wenn die Aufgabe sich auf Größen bezieht, wenn namentlich die Unbekannte eine Größe ist. Hier kann die Aufgabe es mit sich bringen, daß die Unbekannte eine Zahl bestimmter Art sein muß, z. B. positiv oder ganz, so daß eine Wurzel des Ansatzes ohne diese Eigenschaft, obwohl sie den Ansatz zu einer identischen Gleichung macht, doch die Aufgabe nicht löst, weil sie für diese keinen Sinn giebt. Findet man in einem solchen Falle keine Wurzel mit der erforderlichen Eigenschaft, so muß man schließen, daß die Aufgabe eine Forderung stellt, die einen inneren Widerspruch enthält, also auch nicht zu erfüllen ist.

Dieser Fall tritt zunächst immer ein, wenn die Unbekannte sich imaginär ergiebt, und zwar sowohl, wenn sie eine Größe, als auch, wenn sie das Verhältniß zweier Größen zu einander bedeutet.

Dann aber kann dieser Fall auch eintreten, wenn die Wurzel reell ist, wenn z. B. aus der Aufgabe hervorgeht, daß die Unbekannte x positiv und ganz sein muß, aus der Auflösung aber x sich negativ oder gebrochen ergiebt. Es soll also hiermit auf den Fall hingewiesen werden, in welchem ein positiver ganzer Werth für die Unbekannte x nicht etwa blos wünschenswerth oder zu einem gewissen Nebenzwecke erforderlich ist, sondern so in der Natur der Aufgabe begründet liegt, daß jeder andere Werth von x für diese Aufgabe absolut keinen Sinn giebt.

Beispiel 6. Ein Vater vertheilte an seine Kinder 29 Sgr., indem er dem jüngsten Kinde gerade so viel Silbergroschen gab, als Kinder waren, jedem älteren aber $2\frac{1}{2}$ Sgr. mehr, als dem jüngsten; wie viel Kinder waren es?

Auflösung. Wird die Anzahl der Kinder x genannt, so kann x hier nur eine positive ganze Zahl sein. Nun erhielt das jüngste Kind x Sgr., jedes ältere $(x + \frac{5}{2})$ Sgr., und weil $x - 1$ ältere Kinder sind, so wurden an diese zusammen $(x - 1) \cdot (x + \frac{5}{2})$ Sgr. vertheilt. Sonach muß

$$x + (x - 1) \cdot (x + \tfrac{5}{2}) = 29$$

sein. Ordnet man, so entsteht:

$$x + x^2 + \tfrac{5}{2}x - x - \tfrac{5}{2} = 29 \text{ oder}$$
$$x^2 + \tfrac{5}{2}x - \tfrac{63}{2} = 0.$$

Diese Gleichung ist eine quadratische, deren allgemeine Auflösung erst später folgt. Im vorliegenden Falle kann aber die Auflösung nach §. 137. No. 1. erfolgen, wenn man die linke Seite der Gleichung nach §. 89. V. in ein Product verwandelt. Es kommt also darauf an, zwei Zahlen zu finden, deren Product gleich $-\frac{63}{2}$ und deren Summe gleich $\frac{5}{2}$ ist, und diese Zahlen erkennt man leicht, nämlich $+7$ und $-\frac{9}{2}$. Man kann daher die vorstehende Gleichung so schreiben:

$$(x + 7) \cdot (x - \tfrac{9}{2}) = 0,$$

und ihre Wurzeln sind sonach $x = -7$ und $x = +\frac{9}{2}$.

Beide Wurzeln machen nun allerdings den Ansatz zu einer identischen Gleichung, sie lösen aber die Aufgabe nicht, weil die eine Wurzel zwar ganz, aber negativ, die andere zwar positiv, aber gebrochen ist; sie weisen vielmehr darauf hin, daß sich in die Aufgabe ein Irrthum eingeschlichen haben muß, sei es, daß die 29 Sgr. anders vertheilt wurden, als die Aufgabe sagt, oder daß die vertheilte Summe eine andere war (z. B. $23\frac{1}{2}$ Sgr., in welchem Falle sich die Anzahl der Kinder gleich 4 ergiebt).

Andererseits ist es möglich, daß die Unbekannte x zwar mit einer Benennung auftritt, welche an sich für x eine ganze Zahl voraussetzt, daß aber die unbekannte Größe mit andern Größen durch die Aufgabe in eine Verbindung getreten ist, welche auch für einen gebrochenen Werth von x eine Deutung zuläßt. Ergiebt sich dann x gebrochen, so enthält dieser gebrochene Werth auch den Hinweis darauf, in welchem Sinne die Aufgabe eine Auflösung hat.

Beispiel 7. Eine Arbeit, die in 16 Tagen von 8 Arbeitern ausgeführt werden kann, soll in 11 Tagen beendet werden; wie viel Arbeiter müssen zu den 8 Arbeitern noch hinzugenommen werden? Vorausgesetzt wird, daß alle einzelnen Arbeiter gleich viel leisten.

Auflösung. Angenommen: x Arbeiter, so heißt die Bedingung der Aufgabe: $8 + x$ Arbeiter sollen in 11 Tagen dasselbe leisten, wie 8 Arbeiter in 16 Tagen. Drückt man die Zeit doppelt aus, in welcher ein Arbeiter allein die Arbeit ausführt, so kann man schließen: wenn 8 Arbeiter 16 Tage brauchen, so braucht ein Arbeiter $8 \cdot 16$ Tage, und wenn $8 + x$ Arbeiter 11 Tage brauchen, so braucht ein Arbeiter $(8 + x) \cdot 11$ Tage; daher muß

$$(8+x)\cdot 11 = 8\cdot 16$$

sein, oder $11x = 8(16-11)$; folglich

$$x = \tfrac{40}{11} = 3\tfrac{7}{11}.$$

Das Resultat, $3\frac{7}{11}$ Arbeiter, erhält durch die Erwägung einen Sinn, daß es sich bei dem Ansatze nicht um die Arbeiter selbst, sondern um ihre Arbeitskraft gehandelt hat. Daher sagt die Auflösung, man muß 3 Arbeiter annehmen, von denen jeder eben so viel leistet, wie jeder der 8 Arbeiter, dann aber noch einen vierten Arbeiter mit $\frac{7}{11}$ Arbeitskraft, oder auch einen vierten Arbeiter mit voller Arbeitskraft, der aber, statt 11 Tage, nur 7 Tage arbeitet. — Unter gewissen Umständen ist es möglich, daß diese Auflösung nicht ausführbar ist, z. B. wenn die Arbeit erfordert, daß die Arbeiter immer paarweise arbeiten. Aber auch in diesem Falle zeigt das Resultat, $x = 3\frac{7}{11}$, eine passende Auflösung, wenn man $3\frac{7}{11}$ in $2+1\frac{7}{11} = 2+\frac{18}{11} = 2+2\cdot\frac{9}{11}$ zerlegt. Man nimmt 4 Arbeiter mit voller Arbeitskraft, läßt zwei derselben 11 Tage lang und die beiden andern 9 Tage lang arbeiten.

Was die negativen Wurzeln betrifft, wenn sie der Aufgabe gemäß Größen bedeuten, so können sie zunächst anzeigen, daß die Aufgabe keine Auflösung hat, wie oben das Beispiel 6. lehrt; sie können aber auch darauf hinweisen, daß die Aufgabe zwar in dem Sinne, in welchem sie sich ausspricht, in welchem namentlich nach der Unbekannten gefragt wird, keine Auflösung hat, wohl aber in einem anderen, diesem entgegengesetzten Sinne.

Dieser Fall kann zunächst Statt finden, wenn in der Aufgabe die Unbekannte additiv oder subtractiv auftritt, wo dann die negative Wurzel darauf hinweist, daß sie umgekehrt subtractiv oder additiv sein muß, wobei es sich dann nur fragt, ob die Aufgabe diese Aenderung zuläßt. Der Leser möge zur Erläuterung dieses Falles auf das Beispiel 7. zurückgehen. Man kann sich eine ähnliche Aufgabe denken, wenn nämlich eine gewisse Arbeit unter gegebenen Umständen und in gegebener Zeit von 8 Arbeitern ausgeführt werden kann, und nun gefragt wird, wie viel Arbeiter noch hinzugenommen werden müssen, wenn diese Arbeit unter andern Umständen und in anderer Zeit ausgeführt werden soll. Ergiebt sich die Anzahl (x) der Arbeiter negativ, etwa $x = -3$, so würde dieses Resultat sagen, daß man nicht 3 Arbeiter hinzunehmen, sondern von den 8 Arbeitern noch 3 entlassen müsse $[8+(-3) = 8-3]$. Es tritt also hier die negative Wurzel in dem Sinne auf, daß sie eine irrthümliche Annahme, welche in der Aufgabe und im Ansatze sich geltend gemacht hat, berichtigt. Man hätte also die Frage so stellen sollen: „Wie viel Arbeiter sind zu entlassen?“ und würde dann x positiv, gleich $+3$, erhalten haben. Da es bei dieser und bei ähnlichen Aufgaben offenbar von den gegebenen Zahlen abhängt, ob x positiv oder negativ sich ergiebt, so

möge der Leser auf den Vortheil aufmerksam gemacht werden, den die Lösung solcher Aufgaben in Buchstaben gewährt. Aus dem Resultat läßt sich dann beurtheilen, bei welchen gegebenen Zahlen x positiv wird, bei welchen negativ. Nehmen wir an, a Arbeiter vollenden eine Arbeit in b Tagen, und fragen wir nun, wie viel (x) Arbeiter hinzu genommen werden müssen, wenn dieselbe Arbeit in c Tagen fertig werden soll, so folgt aus $ab = (a + x)c$, daß

$$x = \frac{a}{c}(b - c)$$

ist. Ist also $c < b$, so wird x positiv, d. h. die Zahl der Arbeiter muß vermehrt werden; ist $c > b$, so wird x negativ, d. h. die Zahl der Arbeiter muß vermindert werden.

Ferner kann eine negative Wurzel eine dem Sinne der Aufgabe entgegengesetzte Auflösung geben, wenn die unbekannte Größe die Eigenschaft hat, welche den Gegensatz gestattet, der zu den entgegengesetzten Größen führte (§. 23.). Bezeichnet also x Thlr. das Vermögen einer Person und ergiebt sich x negativ, z. B. $x = -300$, so müssen wir schließen, daß die Person nicht ein Vermögen, sondern 300 Thlr. Schulden hat; setzt man den Verlust eines Kaufmannes bei einem Geschäft gleich x Thlr. und ergiebt sich $x = -100$, so hat der Kaufmann keinen Verlust, sondern einen Gewinn von 100 Thlrn. gehabt; nehmen wir an, daß ein Reisender sich von einem Orte A aus um x Meilen dem Orte B genähert hat, und ergiebt sich $x = -10$, so schließen wir wieder, daß der Reisende sich von A aus noch um 10 Meilen weiter von B entfernt hat. Auch hier hat also die negative Wurzel den Sinn, daß sie eine in der Aufgabe liegende falsche Annahme berichtigt. Um aber in allen solchen Fällen zu prüfen, ob durch die negative Wurzel die Aufgabe in dem angegebenen Sinne ihre Auflösung gefunden hat, braucht man nur in den Ansatz überall $-x$ statt x zu setzen, die Aufgabe selbst aber so abzuändern, daß die Unbekannte im entgegengesetzten Sinne verstanden wird; stimmt jetzt der Ansatz mit der Aufgabe überein, so hat man eine richtige Auflösung gefunden, denn jetzt ergiebt sich x positiv. — Nachstehend folgt über diesen Fall noch ein Beispiel; andere Beispiele findet man in §. 184. und in der Geometrie §. 183.

Beispiel 8. Zwei Brüder A und B begründen gemeinsam ein kaufmännisches Geschäft, zu welchem jeder sein ganzes Vermögen hergiebt, und zwar B 800 Thlr. mehr, als A. Nach einigen Jahren ist ihr gemeinschaftliches Vermögen zu 9000 Thlrn. angewachsen; die Brüder beschließen jetzt, sich zu trennen, und einigen sich dahin, daß B zunächst sein in das Geschäft eingelegtes Vermögen wieder zurück nehmen, der Rest ihres gemeinschaftlichen

Vermögens aber dann unter beide Brüder gleich vertheilt werden soll. Nach der Theilung findet A, daß sein Vermögen um 4550 Thlr. gewachsen ist; wie groß war es anfänglich?

Auflösung. Angenommen: x Thlr., so hat B eine Summe von $(x + 800)$ Thlrn. in das Geschäft eingelegt und vor der Theilung auch zurückgenommen. Der Rest $[9000 - (x + 800)]$ Thlr. wurde in zwei gleiche Theile getheilt; daher erhielt A $\frac{9000 - (x + 800)}{2}$ Thlr., und weil diese Summe sein anfängliches Vermögen um 4550 Thlr. übersteigen soll, so muß

$$\frac{9000 - (x + 800)}{2} = x + 4550$$

sein. Hieraus folgt aber

$$8200 - x = 2x + 9100 \text{ oder } -3x = 900, \text{ folglich}$$

$$x = -300.$$

Aus diesem Resultat folgt, daß A das Geschäft mit 300 Thlr. Schulden anfing und sein Bruder $(-300 + 800)$ Thlr., also 500 Thlr. in das Geschäft einlegte. Diese 500 Thlr. nahm B bei der Trennung der Brüder zurück, und von dem Reste $(9000 - 500)$ Thlr. $= 8500$ Thlr. erhielt A die Hälfte, also 4250 Thlr.; dieses Vermögen ist aber wirklich um 4550 Thlr. größer, als 300 Thlr. Schulden.

Wenn es schon bei allen Rechnungen der Controle wegen rathsam ist, am Schluß eine Probe der Rechnung zu machen, so tritt bei Bestimmungsgleichungen ein Grund hinzu, der in einzelnen Fällen eine Probe nothwendig macht. Es kommt nämlich vor, daß eine Gleichung mit der Unbekannten x eine Auflösung nur dann hat, wenn nicht x selbst, sondern ein Ausdruck, der x enthält, ein bestimmtes der beiden Vorzeichen + und — hat, so daß die Aufgabe, wenn sie das andere Vorzeichen verlangt, gar keine Auflösung gestattet, daß man aber durch die Entwickelung von x dies nicht erfährt, weil diese auf keinen Widerspruch führt, sondern eine scheinbar ganz passende Wurzel liefert. Erst die Probe deckt dann einen Widerspruch auf und weist nach, daß man eine richtige Auflösung gefunden hat, wenn man jenen Ausdruck mit dem entgegensetzten Vorzeichen versieht. Dieser Fall kann Statt finden, wenn der Ausdruck, welcher x enthält, eine Wurzel mit geradem Wurzelexponenten ist, und der Grund dieser, dem Anfänger auffallenden Erscheinung liegt darin, daß eine solche Wurzel zwei Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen und gleichen Gliedern repräsentirt, daß man aber bei der Entwickelung zu derselben geordneten Gleichung gelangt, welches Vorzeichen man auch der Wurzel gegeben haben mag. Zur weiteren Erläuterung dient das nachfolgende Beispiel.

Beispiel 9. Eine Zahl zu finden, welche um $\frac{2}{3}$ größer ist, als die Quadratwurzel aus ihrem um $\frac{2}{9}$ verminderten Quadrat.

Auflösung. Bezeichnet x die gesuchte Zahl, so hat man:

(1) $x = \frac{2}{3} + \sqrt{x^2 - \frac{2}{9}}$; hieraus folgt

$x - \frac{2}{3} = \sqrt{x^2 - \frac{2}{9}}$; folglich, wenn man quadrirt:

$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = x^2 - \frac{2}{9}$ oder

$\frac{4}{3}x = \frac{2}{3}$, also $x = \frac{1}{2}$.

Macht man nun aber die Probe, setzt also $\frac{1}{2}$ statt x in (1) ein, so erhält man den Widerspruch:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{9}} \text{ oder } \frac{1}{2} = \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{1}{36}} \text{ oder } \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Erwägt man aber, daß $\sqrt{\frac{1}{36}}$ sowohl gleich $+\frac{1}{6}$, als auch gleich $-\frac{1}{6}$ ist, und daß die Gleichung $\frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ eine identische ist, so erkennt man, daß $x = \frac{1}{2}$ eine Wurzel der Gleichung

(2) $x = \frac{2}{3} - \sqrt{x^2 - \frac{2}{9}}$

ist, oder auch eine Wurzel der Gleichung (1) unter der Bedingung, daß man unter $\sqrt{x^2 - \frac{2}{9}}$ ihren negativen Werth versteht, während diese Gleichung gar keine Auflösung gestattet, wenn diese Wurzel positiv oder absolut verstanden werden soll. Daß ferner die beiden Gleichungen (2) und (1) zu derselben geordneten Gleichung führen, ergiebt sich aus folgender Entwickelung derselben:

$x = \frac{2}{3} - \sqrt{x^2 - \frac{2}{9}}$ und $x = \frac{2}{3} + \sqrt{x^2 - \frac{2}{9}}$

$\sqrt{x^2 - \frac{2}{9}} = \frac{2}{3} - x$ $\sqrt{x^2 - \frac{2}{9}} = x - \frac{2}{3}$

$x^2 - \frac{2}{9} = (\frac{2}{3} - x)^2$ $x^2 - \frac{2}{9} = (x - \frac{2}{3})^2$.

Diese beiden Gleichungen sind aber nicht von einander verschieden, weil $(\frac{2}{3} - x)^2 = (x - \frac{2}{3})^2$ ist; daher führen auch beide Gleichungen zu derselben Wurzel ($\frac{1}{2}$), während nur die Gleichung (2) für diese Wurzel in eine identische Gleichung übergeht. Daß dies mit der Gleichung (1) nicht der Fall ist, erfährt man also erst durch die Probe; denn die besondere Bedingung, $\sqrt{x^2 - \frac{2}{9}}$ soll positiv sein (oder auch soll negativ sein) ging bei der Entwickelung durch das Quadriren verloren, ist also in der geordneten Gleichung nicht mehr enthalten.

Behandelt man die Gleichung $x = \frac{2}{3} + \sqrt{x^2 - \frac{2}{9}}$ nach §. 136., indem man

$$\sqrt{x^2 - \frac{2}{9}} = y$$

setzt, so wird man durch die Entwickelung unmittelbar darauf geführt, daß $\sqrt{x^2 - \frac{2}{9}}$ negativ sein muß. Man hat dann zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

1) $x^2 - \frac{2}{9} = y^2$

2) $x = \frac{2}{3} + y$.

Setzt man den Werth von x aus 2) in 1) ein, so folgt:

$(\frac{2}{3} + y)^2 - \frac{2}{9} = y^2$

$\frac{4}{9} + \frac{4}{3}y + y^2 - \frac{2}{9} = y^2$

$\frac{4}{3}y + \frac{2}{9} = 0$; folglich:

I. $y = -\frac{1}{6}$, d. h. $\sqrt{x^2 - \frac{2}{9}}$ **ist negativ.**

Aus 2) folgt nun:

$$\text{II. } x = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

Beispiel 10. Für welche Werthe von a und b gestattet die Gleichung

$$x = a + \sqrt{x^2 - b}$$

eine Auflösung, wenn man unter $\sqrt{x^2 - b}$ ihren positiven Werth versteht, und für welche Werthe von a und b, wenn man diese Wurzel negativ nimmt?

Auflösung. Aus der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe geht hervor, daß es zur Beantwortung der gestellten Fragen am bequemsten ist,

$$\sqrt{x^2 - b} = y$$

zu setzen. Man hat dann zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$1)\quad x^2 - b = y^2$$

$$2)\quad x = a + y$$

und erhält aus ihnen auf dieselbe Weise, wie dort:

$$y = \sqrt{x^2 - b} = \frac{b - a^2}{2a} \text{ und } x = \frac{b + a^2}{2a}.$$

Aus dem erhaltenen Werthe von y ergiebt sich nun:

1) Sind a und b positiv, so muß $\sqrt{x^2 - b}$ positiv sein, wenn $b > a^2$ ist, aber negativ, wenn $b < a^2$ ist.
2) Sind a und b negativ, so kann $\sqrt{x^2 - b}$ nur positiv sein.
3) Ist a positiv und b negativ, so kann $\sqrt{x^2 - b}$ nur negativ sein.
4) Ist a negativ und b positiv, so ist $\sqrt{x^2 - b}$ positiv, wenn $b < a^2$, aber negativ, wenn $b > a^2$ ist.

Anmerkung. Aus dieser Auflösung folgt noch, daß $\sqrt{x^2 - b}$ immer eine rationale Zahl ist, wenn man $x = \dfrac{b + a^2}{2a}$ setzt, welche rationale Zahlen man auch für a und b wählen mag.

Uebungs-Aufgaben über einfache Gleichungen mit einer Unbekannten.

1) $\dfrac{x - a}{b} + \dfrac{x - b}{a} = 0;\ x = \dfrac{a^2 + b^2}{a + b}.$

2) $\dfrac{x - 1}{1} + \dfrac{x - 2}{2} + \dfrac{x + 3}{3} + \dfrac{x - 6}{6} = 0;\ x = 2.$

3) $\dfrac{x - 1}{1} - \dfrac{x - 2}{2} - \dfrac{x - 3}{3} - \dfrac{x - 4}{4} = 0;\ x = 24.$

4) $\dfrac{x + a}{b} = \dfrac{x + b}{a};\ x = -(a + b).$

5) $\dfrac{x + ab}{c} + \dfrac{x + ac}{b} + \dfrac{x + bc}{a} = 0;\ x = -\dfrac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{ab + ac + bc}.$

6) $\dfrac{x - a}{bc} + \dfrac{x - b}{ac} + \dfrac{x - c}{ab} = 0;\ x = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}.$

7) $\dfrac{x - b}{a - b} + \dfrac{x + b}{a + b} + \dfrac{ax - b^2}{a^2 - b^2} = 0;\ x = \dfrac{b^2}{a}.$

8) $\frac{x+a}{b}-\frac{x-b}{a}=2$; $x=b-a$.

9) $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}=\frac{5}{6}$; $x=-1$.

10) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+3}=\frac{10}{x^2+5x+6}$; $x=1$. (§. 89. V.)

11) $\frac{2}{3x+6}-\frac{5}{4x-8}=\frac{5}{4-x^2}$; $x=2$. (Wie stimmt hier die Probe?)

12) $\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+2}=0$; $x=-2{,}8$.

13) $\frac{x+b-a}{a-b}-\frac{x-a}{b}=1$; $x=a-b$.

14) $\frac{a+b}{x+b}+\frac{a-b}{x-b}+\frac{2ab}{b^2-x^2}=0$; $x=\frac{a+b}{a}\cdot b$.

15) $\frac{x-2a}{a+b}-\frac{x+2b}{2a+2b}=\frac{3x-3a}{2b}$; $x=a-b$.

16) $x=b-\sqrt{b^2-(a^2-x^2)}$; $x=\frac{a^2}{2b}$.

Wäre $x=b+\sqrt{b^2-(a^2-x^2)}$, so entsteht ebenfalls $x=\frac{a^2}{2b}$; man mache mit beiden Gleichungen die Probe, so wird man die Bedingung erkennen, unter welcher die Auflösung jeder Gleichung richtig ist.

17) $\sqrt{x+\sqrt{5}}+\sqrt{x-\sqrt{5}}=\sqrt{x+1+\sqrt{15}}+\sqrt{x+1-\sqrt{15}}$; beide Seiten quadrirt, so folgt:

$$-1+\sqrt{x^2-5}=\sqrt{x^2+2x-14};$$

wieder quadrirt, folgt $5-\sqrt{x^2-5}=x$, und hieraus $x=3$.

18) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1+x}=\sqrt[3]{3-x}$; $x=\frac{8}{117}$. (Vergl. §. 135. Beispiel 4.)

19) $\frac{cx}{a}-b=\frac{x}{abc}-\frac{1}{c^2}$; $x=\frac{ab}{c}$.

20) $\frac{x-b^2}{(a+b)^2}+\frac{x-a^2}{(a+b)^2}=\frac{x-ab}{a^2+b^2}$; $x=a^2+ab+b^2$.

21) $\frac{a+x}{2a^2-2b^2}+\frac{b+x}{3a-3b}=\frac{2b+x}{a^2+ab}+\frac{1}{3}$; $x=a-2b$.

22) $b-(c-x)\sqrt{c-x}=a$; man bringe $c-x$ unter die Wurzel und verfahre nach §. 134.; man erhält $x=c-\sqrt[3]{(b-a)^2}$.

23) $\sqrt{4\sqrt[3]{x}+\frac{9}{2}\sqrt[6]{x}-1}=2\sqrt[6]{x}$; man setze $\sqrt[6]{x}=y$, so folgt $y=2$, folglich $x=64$.

24) $a\sqrt{a+x^5} = b - x^5\sqrt{a+x^5}$; bringt man das negative Glied auf die linke Seite und sondert $\sqrt{a+x^5}$ ab, so folgt $(a+x^5)\sqrt{a+x^5} = b$; nun verfahre man, wie in No. 22. Es entsteht $x = \sqrt[5]{-a+\sqrt[3]{b^2}}$.

25) $\frac{3a+3}{x-1} - 2 = \frac{5a+5}{2x-2} - \frac{3}{2}$; $x = a+2$.

26) $\frac{2a-x}{a-5} - \frac{5+x}{3} = \frac{5a+x}{a+2} - \frac{x+6}{2}$; $x = 10$.

27) $\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{4x^3-4x^2} = \sqrt{25x-25}$; bringt man alle Glieder auf eine Seite und sondert $\sqrt{x-1}$ ab, so entsteht $(3x-6)\sqrt{x-1} = 0$; folglich sind (§. 137.) $x = 2$ und $x = 1$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

28) $\frac{x-a}{2a+2b} + \frac{x-2a+3b}{6b} = \frac{x-3b}{3a-3b} + \frac{x-b}{4a}$; $x = 2a+b$.

29) $\frac{8}{5x+5} - \frac{3}{5x+10} - \frac{4}{2x+1} + \frac{5}{5x+3} = 0$; $x = -\frac{31}{47}$.

30) Welche Zahl (x) muß man zum Nenner des Bruches $\frac{3}{8}$ addiren, wenn man dadurch das Quadrat dieses Bruches erzeugen will? Antw. $\frac{40}{3}$.

31) Welche Zahl (x) muß man sowohl vom Zähler, als auch vom Nenner des Bruches $\frac{3}{8}$ abziehen, wenn so das Quadrat des Bruches entstehen soll? Antw. $\frac{24}{11}$.

32) Gegeben die Zahlen 7, 9, 13, 18. Welche Zahl (x) muß man von jeder dieser Zahlen abziehen, wenn die so entstandenen vier neuen Zahlen in derselben Ordnung Glieder einer geometrischen Proportion sein sollen? Antw. 3.

33) A vollendet eine Arbeit in 8 Tagen, B dieselbe in 9 Tagen und C in 12 Tagen. In welcher Zeit ist die Ausführung der Arbeit zu erwarten, wenn alle drei Arbeiter zugleich arbeiten? Antw. In $3\frac{3}{23}$ Tagen (Seite 192).

34) Jemand braucht 11löthiges Silber. Er hat 4 Loth 14löthiges und 3 Loth 10löthiges Silber; mit wie viel Loth 8löthigem Silber muß er die Mischung beider Stücke noch verbinden, um 11löthiges Silber zu erhalten? Auflös. Angenommen: mit x Loth, so erhält er $(4+3+x)$ Loth 11löthiges Silber. Setzt man nun den reinen Silbergehalt des Ganzen gleich dem der Theile, so ist

$$(7+x)\cdot\frac{11}{16} = 4\cdot\frac{14}{16} + 3\cdot\frac{10}{16} + x\cdot\frac{8}{16},$$

hieraus folgt $x = 3$ (Loth).

35) Zwei Brüder besaßen zusammen 6000 Thlr., aber zu ungleichen Theilen. Der eine A hat nach einem Jahre den vierten Theil seines Vermögens verloren, der andere B sein Vermögen verdoppelt. Dies veranlaßt den B, seinem Bruder 500 Thlr. zu schenken. Wenn jetzt die Brüder gleich viel besitzen, wie viel hatte jeder Anfangs?

Auflös. Hatte A x Thlr., also B (6000 — x) Thlr., so ist:

$$x - \frac{x}{4} + 500 = 2(6000 - x) - 500.$$

Hieraus folgt, daß A Anfangs 4000 Thlr. besaß, und B 2000 Thlr.

36) $\sqrt{x - 0{,}24} - \sqrt{x - 1{,}11} = \sqrt{x + 1{,}2} - \sqrt{x + 0{,}09}$.

Auflös. $x = 2{,}8$.

§. 139.

Die einfachen Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Eine Gleichung mit mehreren Unbekannten x, y, z, ... heißt eine einfache Gleichung oder vom ersten Grade, wenn sie sich auf die Form:

$$(1.)\quad ax + by + cz + \ldots + p = 0$$

bringen läßt, so daß in jedem Gliede nur eine Unbekannte, und in der ersten Potenz, vorkommt. Aus dieser Gleichung kann man eine Unbekannte, z. B. x, entwickeln:

$$x = -\frac{by + cz + \ldots + p}{a},$$

und erhält so x durch die übrigen Unbekannten ausgedrückt. Setzt man für letztere nun beliebige Zahlen und rechnet x aus, so würden die gewählten Werthe von y, z, ... und der ausgerechnete von x die gegebene Gleichung (1.) immer zu einer identischen machen. Man erkennt hieraus, daß eine Gleichung mit mehr als einer Unbekannten immer unendlich viele Auflösungen gestattet, und nennt solche Gleichung eine unbestimmte oder diophantische Gleichung (nach Diophantus von Alexandrien; lebte um das Jahr 300 nach Chr.).

Ist noch eine zweite Gleichung zwischen denselben Unbekannten gegeben:

$$(2.)\quad a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + p_1 = 0,$$

so kann man den aus (1.) entwickelten Werth von x in (2.) substituiren und erhält so eine neue Gleichung, welche dieselben Unbekannten y, z, ... enthält, nur x nicht. Sie ist sonach wieder eine diophantische.

Sind aber außer der Gleichung (1.), welche n Unbekannte enthalten mag, noch n — 1 Gleichungen zwischen diesen Unbekannten gegeben, so kann man den aus (1.) entwickelten Werth von x in alle übrigen Gleichungen substituiren und erhält dann n — 1 Gleichungen zwischen n — 1 Unbekannten y, z, ..., weil x in diesen Gleichungen nicht mehr vorkommt oder, wie man gewöhnlich sagt, weil x eliminirt ist.

Behandelt man diese Gleichungen auf dieselbe Weise, d. h. entwickelt man aus einer dieser Gleichungen etwa y und setzt den für y gefundenen Ausdruck in die übrigen $n - 2$ Gleichungen ein, so entstehen $n - 2$ Gleichungen zwischen $n - 2$ Unbekannten; denn jetzt sind x und y eliminirt. Fährt man so fort, so muß man zuletzt auf eine Gleichung mit einer Unbekannten kommen und kann deren Werth bestimmen. Da aber jede Unbekannte diese letzte sein kann, so ist sonach auch jede zu bestimmen.

Damit aber dies angegebene Verfahren ausführbar sei, müssen die gegebenen Gleichungen noch zwei Bedingungen erfüllen:

I. sie müssen von einander unabhängig sein, und

II. keine darf mit den übrigen im Widerspruch stehen.

Zur Erläuterung dieser Bedingungen mögen 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten gegeben sein:

$$1)\quad 3x - 4y + 2z = 5,$$

$$2)\quad 2x - 5y + 3z = 3.$$

(Zu I.) Aus diesen Gleichungen kann man unendlich viele andere bilden. Addirt man beide, so folgt:

$$3)\quad 5x - 9y + 5z = 8;$$

subtrahirt man sie:

$$4)\quad x + y - z = 2;$$

multiplicirt man die zweite mit 2 und zieht dann die erste ab:

$$5)\quad x - 6y + 4z = 1; \text{ u. s. w.}$$

Alle diese neuen Gleichungen 3), 4), 5) sind aber von 1) und 2) abhängig, d. h. sie werden für alle Werthe von x, y, z richtig, für welche 1) und 2) richtig sind; sie enthalten also keine neuen Bedingungen. Nun führen aber die Gleichungen 1) und 2) zu einer Gleichung mit zwei Unbekannten [wenn man z. B. x aus 1) entwickelt und in 2) substituirt], also zu einer diophantischen Gleichung, folglich sind 1) und 2) für unendlich viele Werthe von x, y, z identische Gleichungen, und für alle diese Werthe müssen auch die neuen Gleichungen identische werden. Nimmt man also zu den Gleichungen 1) und 2) eine der anderen, etwa 4), hinzu, so bestimmen diese drei Gleichungen x, y und z nicht, d. h. sie geben nicht für jede Unbekannte nur einen Werth. Führen wir dieses Beispiel durch. Wir haben:

$$1)\quad 3x - 4y + 2z = 5,$$

$$2)\quad 2x - 5y + 3z = 3,$$

$$4)\quad x + y - z = 2.$$

Aus 1) folgt $x = \frac{4y - 2z + 5}{3}$; diesen Werth in 2) gesetzt, folgt $-7y + 5z = -1$; folglich ist $y = \frac{5z + 1}{7}$, daher $x = \frac{6z + 39}{21}$. Wir haben also jetzt x und y durch z ausgedrückt und können beide Werthe in 4) substituiren. Man mache sich nun klar, was für eine Gleichung dann entstehen muß. Da 1) und 2) drei Unbekannte enthalten, so kann man für eine Unbekannte, z. B. z, jeden beliebigen Werth setzen, wenn man nur x und y diesem Werthe gemäß bestimmt. Setzt man also für z eine ganz beliebige Zahl, für x aber $\frac{6z + 39}{21}$ und für y den Werth $\frac{5z + 1}{7}$, so werden die Gleichungen 1) und 2) identische; folglich muß auch 4) eine identische werden. Setzt man also $x = \frac{6z + 39}{21}$ und $y = \frac{5z + 1}{7}$ in 4) ein, so entsteht eine für jeden Werth von z richtige Gleichung, d. h. z muß aus der Gleichung herausfallen, diese sich aber auf die Form $0 = 0$ bringen lassen. Man erhält:

$$\frac{5z + 1}{7} + \frac{6z + 39}{21} - z = 2; \text{ mit 21 multiplicirt:}$$

$$15z + 3 + 6z + 39 - 21z = 42, \text{ d. h.}$$

$$0 = 0.$$

So ist also erklärt, warum die gegebenen Gleichungen von einander unabhängig sein müssen, und die Bedeutung der Unabhängigkeit ist: keine Gleichung darf aus den übrigen durch arithmetische Umformung sich erzeugen lassen.

(Zu II.) Ferner darf keine Gleichung mit den übrigen im Widerspruch stehen.

Die gegebenen Gleichungen waren:

$$1)\quad 3x - 4y + 2z = 5,$$

$$2)\quad 2x - 5y + 3z = 3.$$

Wäre nun als dritte Gleichung gegeben:

$$3x - 4y + 2z = 9,$$

so sieht man den Widerspruch mit 1) unmittelbar, und die Entwickelung müßte diesen Widerspruch nochmals in anderer Form, z. B. $5 = 9$ oder $0 = 4$ u. s. w. zeigen. Der Widerspruch braucht aber nicht so offen da zu liegen. Gesetzt es wäre als dritte Gleichung gegeben:

$$x - 6y + 4z = 2,$$

so wird man einen Widerspruch mit 1) und 2) vielleicht nicht so-

gleich erkennen. Entwickelt man aber aus 1) und 2) (wie oben) x und y und setzt die Werthe $x = \frac{6z + 39}{21}$, $y = \frac{5z + 1}{7}$ in die dritte Gleichung ein, so folgt:

$$\frac{6z + 39}{21} - 6 \cdot \frac{5z + 1}{7} + 4z = 2;$$

multiplicirt man mit 21, so folgt:

$$6z + 39 - 90z - 18 + 84z = 42; \text{ oder}$$
$$21 = 42.$$

Der Grund des Widerspruches liegt aber darin, daß aus den Gleichungen 1) und 2) oben die Gleichung 5) $x - 6y + 4z = 1$ erzeugt werden konnte, und mit dieser steht $x - 6y + 4z = 2$ im klaren Widerspruch.

Wir haben also das Gesetz gefunden: *Wenn eine Aufgabe n Unbekannte enthält, aber auch n von einander unabhängige und einander nicht widersprechende einfache Gleichungen zwischen diesen Unbekannten liefert, so ist sie eine bestimmte, d. h. jede Unbekannte hat dann immer nur einen bestimmten und auch zu ermittelnden Werth.* Giebt die Aufgabe weniger Gleichungen, als sie Unbekannte hat, so führt sie zu *einer* Gleichung mit mehr als einer Unbekannten und ist eine diophantische Aufgabe; giebt sie aber bei n Unbekannten mehr als n Gleichungen, so ist sie überbestimmt; denn n von diesen Gleichungen sind zur Entwicklung der Unbekannten hinreichend, und wenn die anderen Gleichungen auch für dieselben Werthe der Unbekannten richtig werden, so sind sie doch überflüssig, werden sie aber nicht richtig, so ist die Aufgabe noch widersprechend bestimmt, also unauflösbar.

Wir können zu dem, was in I. und II. gesagt ist, noch auf einem andern Wege gelangen. Es sei gegeben:

$$1) \quad ax + by = c$$
$$2) \quad a_1x + b_1y = c_1.$$

Wir wollen nun untersuchen, welche Bedingungen a, b, c, a_1, b_1, c_1 erfüllen müssen, wenn die Aufgabe eine bestimmte sein soll. Aus 1) folgt:

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Setzt man diesen Werth in 2), so folgt:

$$a_1\frac{c - by}{a} + b_1y = c_1, \text{ oder}$$
$$a_1c - a_1by + ab_1y = ac_1, \text{ folglich}$$
$$3) \quad y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

Setzt man diesen Werth in 1) ein, so kann man x finden, und erhält:

$$4)\quad x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b}.$$

I. Nimmt nun y die Form $\frac{0}{0}$ an, so ist y unbestimmt, und dies findet Statt, wenn

$$5)\quad \begin{cases} ab_1 = a_1b \text{ und} \\ ac_1 = a_1c \text{ ist.} \end{cases}$$

Hieraus folgt $\frac{b_1}{c_1} = \frac{b}{c}$ oder $b_1c = bc_1$; daher nimmt in diesem Falle auch x die Form $\frac{0}{0}$ an, ist also auch unbestimmt.

Aus 5) folgt aber $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c_1}$, und hieraus ergiebt sich unmittelbar, daß in diesem Falle die Gleichungen 1) und 2) von einander abhängig sind. Denn multiplicirt man das erste Glied der linken Seite der Gleichung 1) $\qquad ax + by = c$

mit $\frac{a_1}{a}$, das zweite mit $\frac{b_1}{b}$, die rechte Seite aber mit $\frac{c_1}{c}$, so entsteht, weil beide Seiten mit gleichen Zahlen multiplicirt sind:

$$\frac{a_1}{a}\cdot ax + \frac{b_1}{b}\cdot by = \frac{c_1}{c}\cdot c \quad \text{oder} \quad a_1x + b_1y = c_1.$$

II. Wird aber in 3) und 4) der Nenner 0, ohne daß der Zähler 0 ist, so zeigt dies an, daß es für x und y keine bestimmten Werthe giebt, welche die Gleichungen 1) und 2) zu identischen machen (§. 31. 3). In diesem Falle stehen die Gleichungen 1) und 2) mit einander im Widerspruch. Denn soll der Nenner in 3) und 4) Null sein, also $ab_1 = a_1b$ oder $\frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1}$, und dividirt man 1) durch a, so folgt:

$$x + \frac{b}{a}y = \frac{c}{a}.$$

Setzt man jetzt $\frac{b_1}{a_1}$ statt $\frac{b}{a}$, so folgt $x + \frac{b_1}{a_1}y = \frac{c}{a}$ oder, wenn man noch beide Seiten mit a_1 multiplicirt:

$$a_1x + b_1y = \frac{a_1}{a}\cdot c.$$

Diese Gleichung steht mit 2) nur dann nicht im Widerspruch, wenn $\frac{a_1}{a}\cdot c = c_1$ oder $a_1\cdot c = a\cdot c_1$ ist, woraus noch $b_1\cdot c = b\cdot c_1$ folgt; aber gerade diese Gleichungen finden nicht Statt, wenn die Zähler von y und x nicht gleich Null sein sollen.

In allen andern Fällen ist die Aufgabe, deren Bedingungen die Gleichungen 1) und 2) angeben, eine bestimmte.

Auf ähnliche Weise kann man bei 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten verfahren u. s. w.

§. 140.

Methoden zur Entwicklung der n Unbekannten aus n einfachen Gleichungen.

I. Die Substitutions-Methode. Sie ist im vorigen §. enthalten. Man entwickelt eine Unbekannte aus einer Gleichung und setzt ihren Werth in alle übrigen Gleichungen ein. So entstehen

$n - 1$ Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten.

Aus einer dieser Gleichungen entwickelt man wieder eine Unbekannte und setzt ihren Werth in alle übrigen ein. Man erhält jetzt

$n - 2$ Gleichungen mit $n - 2$ Unbekannten.

So fährt man fort, bis zu einer Gleichung mit einer Unbekannten.

Da nicht immer alle Unbekannten in allen Gleichungen vorkommen, so eliminirt man am bequemsten die Unbekannte zuerst, welche am wenigsten oft vorkommt. Kommen mehrere oder alle gleich oft vor, so eliminirt man diejenige zuerst, welche die bequemsten Coefficienten hat. Man beachte dies auch bei den anderen Methoden.

Beispiel 1.

$$\begin{aligned} 1)\quad 3x + 2y - 6z &= 3 + 3v \\ 2)\quad 4(x + z) &= 3 - y \\ 3)\quad y - 2x &= 12z + 4v - 1 \\ 4)\quad 2x + 10z + 2v &= 8 + 3y. \end{aligned}$$

Auflösung.

Aus 4) folgt: $v = \frac{8 + 3y - 2x - 10z}{2}$.

Subst. in 1) $3x + 2y - 6z = 3 + \frac{24 + 9y - 6x - 30z}{2}$,

hieraus: 5) $12x - 5y + 18z = 30$.

Subst. in 3) $y - 2x = 12z + 16 + 6y - 4x - 20z - 1$,

hieraus: 6) $2x - 5y + 8z = 15$.

Nimmt man zu 5) und 6) die Gleichung 2) als 7te hinzu, so erhält man:

$$\begin{aligned} 5)\quad 12x - 5y + 18z &= 30 \\ 6)\quad 2x - 5y + 8z &= 15 \\ 7)\quad 4x + y + 4z &= 3. \end{aligned}$$

Aus 6) folgt: $2x = 5y - 8z + 15$.

Subst. in 5) $30y - 48z + 90 - 5y + 18z = 30$;

hieraus: 8) $25y - 30z = -60$.

Subst. in 7) $10y - 16z + 30 + y + 4z = 3$;

hieraus: 9) $11y - 12z = -27$.

Man kann 8) durch 5 heben, und erhält:

8) $5y - 6z = -12$

9) $11y - 12z = -27$.

Aus 8) folgt: $6z = 12 + 5y$.

Subst. in 9) $11y - 24 - 10y = -27$.

10) $y = -3$.

Man erhält nun z aus 8), x aus 6) und v aus 4); daher die Auflösung:

$$y = -3, \quad z = -\tfrac{1}{2}, \quad x = 2, \quad v = 0.$$

Beispiel 2. 1) $x + 2y + v = 2$.

2) $7x - 3y = 2 + 4z$.

3) $8z + 10y = 3v - 3x$.

4) $4v - 5z = 3x + y$.

Auflös. $x = 1;\ y = -1;\ z = 2;\ v = 3$.

Beispiel 3. 1) $x + y + z = 4a$.

2) $x - y + 2z = 4a - 2b$.

3) $2x - z = y - a - 3b$.

Auflös. $x = a - b;\ y = a + b;\ z = 2a$.

Beispiel 4. 1) $2x - 3z + v = 3$.

2) $5x + 5y = 18 + v$.

3) $x + y + z = 5 + v$.

4) $9v - 3x - z = 0$.

Auflös. $x = 5;\ y = -1;\ z = 3;\ v = 2$.

II. **Die Combinations-Methode.** Man entwickelt eine Unbekannte aus allen Gleichungen, in welchen sie vorkommt, und setzt die erhaltenen Ausdrücke einander gleich. Dadurch erhält man auch $n - 1$ Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten und kann bis zu einer Gleichung mit einer Unbekannten fortfahren. Kommt z. B. x in vier Gleichungen vor, so erhält man vier Ausdrücke für x; wir wollen sie A, B, C, D nennen. Man hat dann nur drei neue Gleichungen: $A = B$, $A = C$, $A = D$, weil die übrigen, welche sich noch bilden lassen ($B = C$, $B = D$, $C = D$), von ersteren abhängig, also nicht Bestimmungsgleichungen sind. Man kann übrigens von den sechs Gleichungen drei beliebige wählen, nur müssen sie von einander unabhängig sein.

Beispiel 1. 1) $3x + y + 3v = 4z$

2) $4x + 2v = 4 + 3y + 6z$

3) $x - 2y + 2z = 4 + v$

4) $2x + 8z - 3v = 3 - 3y$.

Auflösung.

Aus 1) $y = 4z - 3x - 3v$.

Aus 2) $y = \frac{4x + 2v - 6z - 4}{3}$.

Aus 3) $y = \frac{x + 2z - v - 4}{2}$.

Aus 4) $y = \frac{3 - 2x - 8z + 3v}{3}$.

Aus 1) und 3) folgt:

$4z - 3x - 3v = \frac{x + 2z - v - 4}{2}$, folglich

5) $7x - 6z + 5v = 4$.

Aus 1) und 2) folgt:

$4z - 3x - 3v = \frac{4x + 2v - 6z - 4}{3}$, folglich

6) $13x - 18z + 11v = 4$.

Aus 2) und 4) folgt:

$4x + 2v - 6z - 4 = 3 - 2x - 8z + 3v$, folglich

7) $6x + 2z - v = 7$.

Man hat jetzt drei Gleichungen mit drei Unbekannten:

5) $7x - 6z + 5v = 4$

6) $13x - 18z + 11v = 4$

7) $6x + 2z - v = 7$

Aus 5) $2z = \frac{7x + 5v - 4}{3}$.

Aus 6) $2z = \frac{13x + 11v - 4}{9}$.

Aus 7) $2z = 7 + v - 6x$.

Aus 5) und 6) folgt:

$\frac{7x + 5v - 4}{3} = \frac{13x + 11v - 4}{9}$, folglich

8) $8x + 4v = 8$.

Aus 5) und 7) folgt:

$\frac{7x + 5v - 4}{3} = 7 + v - 6x$, folglich

9) $25x + 2v = 25$.

Hebt man 8) durch 4, so hat man:

8) $2x + v = 2$

9) $25x + 2v = 25$.

Aus 8) $v = 2 - 2x$

Aus 9) $v = \frac{25 - 25x}{2}$.

Aus 8) und 9) folgt:

$$2 - 2x = \frac{25 - 25x}{2}, \text{ folglich}$$

$$10)\ 21x = 21.$$

Die Auflösung ist also: $x = 1,\ v = 0,\ z = \frac{1}{2},\ y = -1.$

Beispiel 2.
1) $2x - y + 3z - 4v = 3b.$
2) $3x + y - 4z + 4b = 5a.$
3) $3x - 2y + 2z + 4v = 2b - a.$
4) $x - 3a + y + z = b.$

Auflös. $x = a,\ y = 2a,\ z = b,\ v = 0.$

Beispiel 3.
1) $x + y + z + v + w = 0.$
2) $x - y - z + 2v = 4.$
3) $y - z - v = 4.$
4) $3x + 2y - 4v - 3w = 6.$
5) $2z + 3v - 6w = 3.$

Auflös. $x = 1,\ y = 2,\ z = -3,\ v = 1,\ w = -1.$

Beispiel 4.
1) $2x - 3y + 4z = \frac{13}{2}.$
2) $3x - y + 8z = 14.$
3) $8x - 3y - 7z = \frac{7}{4}.$

Auflös. $x = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2},\ z = \frac{5}{4}.$

III. Die englische Methode (Additions- und Subtractions-Methode). Nach dieser Methode eliminirt man eine Unbekannte dadurch aus zwei Gleichungen, daß man beide von einander abzieht, oder addirt, nachdem man vorher jede Gleichung mit einer solchen Zahl multiplicirt (auch wohl dividirt) hat, daß die Coefficienten dieser Unbekannten gleich, oder gerade entgegengesetzt geworden sind. Hat man nun n Gleichungen mit n Unbekannten, so kann man auf diese Weise ein und dieselbe Unbekannte so oft aus immer zwei Gleichungen eliminiren, bis man n — 1 Gleichungen mit n — 1 Unbekannten hat. Dasselbe Verfahren kann man bis zu einer Gleichung mit einer Unbekannten fortsetzen. Auch bei dieser Methode hat man darauf zu achten, daß Gleichungen entstehen, welche von einander unabhängig sind; namentlich vergesse man nicht, daß bei dem Eliminiren einer Unbekannten auch jede Gleichung, in welcher sie vorkommt, benutzt worden sein muß; ist dies auch nur mit einer nicht der Fall, so sind die neuen Gleichungen nicht von einander unabhängig.

Beispiel 1.
1) $2x - 3y + 2v = z + 1$
2) $3x + 5z = 3v + 4$
3) $x + 3z + v = 4 - 2y$
4) $4y - 3x - v = 2z + 1.$

Auflösung.

Aus 1) $4x - 6y - 2z + 4v = 2$
Aus 3) $3x + 6y + 9z + 3v = 12$, addirt:
5) $7x + 7z + 7v = 14.$
Aus 3) $2x + 4y + 6z + 2v = 8$
Aus 4) $-3x + 4y - 2z - v = 1$, subtrahirt:
6) $5x + 8z + 3v = 7.$

Nimmt man zu 5) und 6) die Gleichung 2) als 7te hinzu, so hat man:

5) $x + z + v = 2$
6) $5x + 8z + 3v = 7$
7) $3x + 5z - 3v = 4.$

Aus 6) und 7) folgt unmittelbar durch Addition:

8) $8x + 13z = 11.$ Ferner:
aus 5) $3x + 3z + 3v = 6$
aus 6) $5x + 8z + 3v = 7$, subtrahirt:
9) $2x + 5z = 1.$

Man hat jetzt zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

8) $8x + 13z = 11$
9) $2x + 5z = 1$

Aus 8) $8x + 13z = 11$
Aus 9) $8x + 20z = 4$; subtrahirt:
10) $7z = -7$;

daher die Auflösung: $z = -1$; $x = 3$; $v = 0$; $y = 2$.

Beispiel 2. Aus der Summe s und der Differenz d zweier Zahlen (x, y) diese zu bestimmen.

Auflös. 1) $x + y = s$; 2) $x - y = d$. Hieraus folgt:

$$x = \frac{s + d}{2},\ y = \frac{s - d}{2}.$$

Beispiel 3. 1) $x + y + z + v = 4$
2) $2x - y - 2z = 0$
3) $3x + 4y + 3v = 1$
4) $4v - 5x + 3z + y = 1$

Auflös. $x = 2$, $y = -2$, $z = 3$, $v = 1$.

Beispiel 4. 1) $2x - y + z = 5$
2) $3x + 4y - 2z = 1$
3) $3z - 3y - 4x = 5$

Auflös. $x = 1$, $y = 2$, $z = 5$.

Beispiel 5.
$$\begin{aligned} &1)\ 4x - y + z - 3v = 4a + 2b \\ &2)\ x + 2y + v = 2a \\ &3)\ 3x - 4z - v = a + 3b \\ &4)\ 2x + y + z = 3a \end{aligned}$$

Auflös. $x = a,\ y = \frac{a+b}{2},\ z = \frac{a-b}{2},\ v = -b.$

Man kann eine Unbekannte auch dadurch eliminiren, daß man mehr als zwei Gleichungen durch Addition oder Subtraction mit einander verbindet; dies Verfahren ist dann besonders bequem, wenn es zum Zwecke führt, ohne daß man nöthig hat, eine oder mehrere dieser Gleichungen vorher mit einer Zahl zu multipliciren. z. B.

Beispiel 6.
$$\begin{aligned} &1)\ 3x + 6y + 2z + v = 2 \\ &2)\ x - y - 3z - 4v = 3 \\ &3)\ x + 2y - 2z - 2v = 0 \\ &4)\ 2x + y - z - 3v = 5 \end{aligned}$$

Auflösung.

Subtrahirt man 3) von 2), so entsteht die Gleichung 5); addirt man 2) und 3) und zieht die neue Gleichung von 4) ab, so entsteht 6); addirt man 3) und 4) und zieht die neue Gleichung von 1) ab, so entsteht 7).

$$\begin{aligned} &5)\ -3y - z - 2v = 3 \\ &6)\ 4z + 3v = 2 \\ &7)\ 3y + 5z + 6v = -3 \end{aligned}$$

Addirt man 5) und 7), so entsteht:

8) $4z + 4v = 0$; hierzu Gleichung 6):

9) $4z + 3v = 2$, und nun subtrahirt:

10) $v = -2$;

daher die Auflösung: $v = -2,\ z = +2,\ y = -\frac{1}{3},\ x = +\frac{2}{3}$.

Anmerkung 1. Am häufigsten kommen in den Anwendungen zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten vor; für diesen Fall empfiehlt sich das folgende abgekürzte Verfahren. — Es mögen folgende zwei Gleichungen gegeben sein:

$$\begin{aligned} &1)\ 7x + 6y = 44 \\ &2)\ 5x - 8y = 13 \end{aligned}$$

Um y zu eliminiren, muß man die erste Gleichung mit 4, die zweite mit 3 multipliciren, und diese Factoren setze man rechts neben die Gleichungen hin.

$$\begin{aligned} &1)\ 7x + 6y = 44 \;|\; 4 \\ &2)\ 5x - 8y = 13 \;|\; 3. \end{aligned}$$

Wenn man nun multiplicirt hat und dann beide Gleichungen addirt, so entsteht:

(3) $28x + 15x = 176 + 39$; daher

(4) $$x = \frac{176 + 39}{28 + 15} = \frac{215}{43} = 5.$$

Eine weitere Abkürzung besteht darin, daß man die Gleichung (3) gar nicht erst hinschreibt, sondern unmittelbar die Gleichung (4). Es wird dies auch

dem Anfänger nicht schwer werden; denn y hat man nicht zu beachten, weil y fortfällt, und in den Zähler des Quotienten für x kommen die Producte, welche durch Multiplication der Zahlen auf der rechten Seite beider Gleichungen entstehen, in den Nenner aber die Producte, welche durch Multiplication aus den Factoren von x entspringen.

Um ferner x zu eliminiren, kann man die erste Gleichung mit 5, die zweite mit 7 multipliciren und dann die Gleichungen von einander abziehen. Der Gleichförmigkeit wegen ist es aber vorzuziehen, die Multiplicatoren so zu wählen, daß beide Gleichungen immer addirt werden; also — 5 und + 7, oder + 5 und — 7. Letzteres ist hier vorzuziehen, weil in der zweiten Gleichung der Factor von y negativ ist (— 8). Man erhält so die Darstellung:

$$\begin{array}{rl|r} 1) & 7x + 6y = 44 & 5 \\ 2) & 5x - 8y = 13 & -7 \\ \hline \end{array}$$

und die Addition beider Gleichungen giebt:

$$(5) \qquad 30y + 56y = 220 - 91; \text{ daher}$$

$$(6) \qquad y = \frac{220 - 91}{30 + 56} = \frac{139}{86} = \frac{3}{2}.$$

Wenn man die Gleichung (5) wieder fortläßt, so erhält man für die Entwickelung beider Unbekannten folgende Darstellung, die der Deutlichkeit wegen in voller Ausführlichkeit hier folgt.

Multiplicatoren zu Elimination von:

$$\begin{array}{rl|c|c} & & y & x \\ \hline 1) & 7x + 6y = 44 & 4 & 5 \\ 2) & 5x - 8y = 13 & 3 & -7 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{I.} \quad x = \frac{4 \cdot 44 + 3 \cdot 13}{4 \cdot 7 + 3 \cdot 5} = \frac{176 + 39}{28 + 15} = \frac{215}{43} = 5.$$

$$\text{II.} \quad y = \frac{5 \cdot 44 - 7 \cdot 13}{5 \cdot 6 + 7 \cdot 8} = \frac{220 - 91}{30 + 56} = \frac{139}{86} = \frac{3}{2}.$$

Elimination von:

Beispiel 2.

$$\begin{array}{rl|c|c} & & y & x \\ \hline 1) & ax + by = c & a & b \\ 2) & bx - ay = c & b & -a \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{ac + bc}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{bc - ac}{b^2 + a^2}.$$

Beispiel 3.

$$\begin{array}{rl|c|c} & & y & x \\ \hline 1) & a_1x + b_1y = c_1 & b_2 & a_2 \\ 2) & a_2x + b_2y = c_2 & -b_1 & -a_1 \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_2a_1 - b_1a_2}, \quad y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}.$$

Beispiel 4.		y	x
	1) $2x - 3y = 18$	4	1
	2) $x - 4y = 19$	-3	-2

$$x = \frac{72 - 57}{8 - 3} = \frac{15}{5} = 3.$$

$$y = \frac{18 - 38}{-3 + 8} = \frac{-20}{5} = -4.$$

Beisp. 5. 1) $3x - 4y = 5$
2) $4x + 3y = 10$

Aufl. $x = 2{,}2$; $y = 0{,}4$.

Beisp. 6. 1) $3x + 5y = -13$
2) $4x - 3y = +31$

Aufl. $x = 4$; $y = -5$.

Beisp. 7. 1) $2x - 3y = 9$
2) $5x - 4y = 5$

Aufl. $x = -3$; $y = -5$.

Beisp. 8. 1) $-3x + 2y = 2$
2) $5x - y = 6$

Aufl. $x = 2$; $y = 4$.

Beisp. 9. 1) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 1$
2) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 4$

Aufl. $x = 3{,}84$; $y = 3{,}12$.

Beisp. 10. 1) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{1}{4}$
2) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = \frac{1}{2}$

Aufl. $x = \frac{33}{34}$; $y = \frac{12}{17}$.

Beisp. 11. 1) $3{,}4x + 2{,}2y = 26$
2) $2{,}6x - 0{,}2y = 2$

Aufl. $x = 1{,}5$; $y = 9{,}5$.

Beisp. 12. 1) $9x - 8y = 21$
2) $21x - 20y = 45$

Aufl. $x = 5$; $y = 3$.

Wie man das angegebene abgekürzte Verfahren bei drei Gleichungen mit drei Unbekannten, und dann auch bei noch mehr Gleichungen, anwenden kann, zeigen die folgenden Beispiele.

Beispiel 13.				
	1) $2x + 3y - 4z = 10$	3	1	Multiplicatoren zur Elimination von z.
	2) $x - 2y + 3z = 6$	4		
	3) $3x - y + 2z = 8$		2	

Auflös. 4) $10x + y = 54$
5) $8x + y = 26$

6) $2x = 28$

$x = 14$; $y = -86$; $z = -60$.

Beispiel 14.					
	1) $2x + y - 3z - v = 12$	-1	2		Multiplicatoren zur Elimination von y.
	2) $3x - 2y + 2z - 2v = 2$		1		
	3) $x + 3y + 4z + 3v = 1$			-1	
	4) $4x + y - 5z + 4v = 8$	1		3	

Auflös.				
	5) $2x - 2z + 5v = -4$	4		Multiplicatoren zur Elimination von v.
	6) $7x - 4z - 4v = 26$	5	9	
	7) $11x - 19z + 9v = 23$		4	

	8) $43x - 28z = 114$	4	Zur Elimination von z.
	9) $107x - 112z = 326$	-1	

$$x = \frac{456 - 326}{172 - 107} = \frac{130}{65} = 2.$$

Aus den Gleichungen 8), 5) und 1) erhält man nun noch:

$$z = -1;\quad v = -2;\quad y = 3.$$

Anmerkung 2. Sind drei Gleichungen mit drei Unbekannten gegeben, so kann man wünschen, zwei Unbekannte auf ein Mal zu eliminiren. Dies führt zu der Frage: womit muß man jede Gleichung multipliciren, wenn durch Addition aller drei Gleichungen unmittelbar eine Gleichung mit einer Unbekannten entstehen soll? Die Untersuchung über diese Frage führt zu einer in vielen Fällen bequemen Regel, die wir jetzt entwickeln wollen. Es sei gegeben:

$$1)\quad a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$2)\quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$3)\quad a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Wir suchen nun drei Zahlen α_1, α_2 und α_3 von der Eigenschaft, daß, wenn man die erste Gleichung mit α_1, die zweite mit α_2, die dritte mit α_3 multiplicirt und nun alle drei Gleichungen addirt, dann zwei Unbekannte, etwa y und z, fortfallen, also ihre Coefficienten Null werden. Demnach muß

$$b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 = 0 \text{ und}$$
$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0 \text{ sein.}$$

So entstehen freilich zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, aber man kann, wenn etwa α_2 und α_3 durch α_1 ausgedrückt sind, dann α_1 beliebig, daher auch zweckmäßig wählen. Betrachtet man also α_2 und α_3 als die beiden Unbekannten der vorstehenden zwei Gleichungen und entwickelt sie, so folgt:

$$\alpha_2 = \frac{b_3c_1 - b_1c_3}{b_2c_3 - b_3c_2}\cdot\alpha_1 \text{ und } \alpha_3 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{b_2c_3 - b_3c_2}\cdot\alpha_1$$

für jeden Werth von α_1. Wählt man nun für α_1 den Nenner beider Brüche, so beseitigt man die Bruchform und erhält:

$$\text{I. } \alpha_1 = b_2c_3 - b_3c_2;\quad \text{II. } \alpha_2 = b_3c_1 - b_1c_3;\quad \text{III. } \alpha_3 = b_1c_2 - b_2c_1.$$

Eine Vergleichung der gegebenen Gleichungen mit diesen Multiplicatoren giebt eine einfache und leicht zu behaltende Regel zu ihrer Berechnung.

Gleichungen.	Multiplicatoren.
1) $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$	$b_2c_3 - b_3c_2$
2) $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$	$b_3c_1 - b_1c_3$
3) $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$	$b_1c_2 - b_2c_1$

Die Multiplicatoren sind die Differenzen der Kreuz-Producte aus den Coefficienten von y und z der beiden nachfolgenden Gleichungen, wenn man bei der zweiten Gleichung die dritte und erste, bei der dritten aber die erste und zweite Gleichung als die folgenden ansieht.

Will man y oder z entwickeln, so bildet man die Kreuzproducte aus den Coefficienten von resp. x und z oder x und y.

Beispiel 1.
$$1)\quad 3x + 2y + 3z = 5$$
$$2)\quad 2x + 2y + z = 9$$
$$3)\quad 5x - 5y - 4z = 2.$$

Auflösung.

Will man x finden, so ist

$$\alpha_1 = 2\cdot(-4) - (-5)\cdot 1 = -3$$
$$\alpha_2 = (-5)\cdot 3 - 2\cdot(-4) = -7$$
$$\alpha_3 = 2\cdot 1 - 2\cdot 3 = -4.$$

Multiplicirt man also 1) mit -3, 2) mit -7 und 3) mit -4, so fallen y und z fort, und man erhält:

$$-9x - 14x - 20x = -15 - 63 - 8;\text{ hieraus}$$
$$x = 2.$$

Will man y finden, so ist

$$\alpha_1 = 2\cdot(-4) - 5\cdot 1 = -13$$
$$\alpha_2 = 5\cdot 3 - 3(-4) = +27$$
$$\alpha_3 = 3\cdot 1 - 2\cdot 3 = -3,\text{ und man erhält:}$$
$$y = 4.$$

Will man endlich z finden, so ist

$$\alpha_1 = 2\cdot(-5) - 5\cdot 2 = -20$$
$$\alpha_2 = 5\cdot 2 - 3(-5) = +25$$
$$\alpha_3 = 3\cdot 2 - 2\cdot 2 = +2,\text{ und man erhält:}$$
$$z = -3.$$

Eine bequeme Darstellung zeigt das nächste Beispiel.

Beispiel 2.

Gleichungen:	Multiplicatoren zur Entwicklung von: x	y	z
1) $3x + 2y + 2z = 8$	2	-12	-10
2) $2x + 3y + 4z = 12$	-2	2	5
3) $4x + y + 2z = 10$	2	8	5

$$6x - 4x + 8x = 16 - 24 + 20;\quad x = 1{,}2.$$
$$-24y + 6y + 8y = -96 + 24 + 80;\quad y = -0{,}8.$$
$$-20z + 20z + 10z = -80 + 60 + 50;\quad z = 3.$$

Wenn alle drei Multiplicatoren, welche man zur Entwicklung einer Unbekannten (z. B. x) erhält, einen gemeinschaftlichen Factor haben, so kann man diesen aus allen drei Factoren fortlassen, weil die Gleichung, welche zur Entwicklung von x entsteht, wenn der Factor nicht fortgelassen wird, sich durch ihn heben läßt. Im Beispiel 2. kann man daher für die dort angegebenen Multiplicatoren folgende setzen:

Zur Entwicklung von x die Multiplicatoren 1, -1 und 1
" " " y " " -6, 1 und 4
" " " z " " -2, 1 und 1.

Beispiel 3.
1) $4x + 5y + 5z = 12$
2) $3x + 3y + 4z = 8$
3) $2x + 4y + 5z = 10$

Auflös. $x = \frac{2}{9}$, $y = \frac{14}{9}$, $z = \frac{2}{3}$.

Zur Entwicklung von z erhält man die Multiplicatoren 6, —6 und —3, und für sie kann man also setzen: 2, —2 und —1.

Daher ist $10z - 8z - 5z = 24 - 16 - 10$ oder

$-3z = -2$; folglich $z = \frac{2}{3}$.

Beispiel 4.
$$\begin{aligned} 1)\ & 2x + y + 2z = 5 \\ 2)\ & x + 3y + 4z = 9 \\ 3)\ & 3x + 2y + 3z = 12 \end{aligned}$$

Auflös. $x = \frac{10}{3}$, $y = 9$, $z = -\frac{16}{3}$.

Beispiel 5.
$$\begin{aligned} 1)\ & 3x - 2y + z = 4 \\ 2)\ & 2x - y + 3z = 6 \\ 3)\ & x + 3y - 2z = 2 \end{aligned}$$

Auflös. $x = \frac{11}{7}$, $y = 1$, $z = \frac{9}{7}$.

Die Multiplicatoren zur Entwicklung von x werden —7, —1 und —5; man kann für sie +7, +1 und +5 setzen, d. h. man kann alle drei durch —1 heben. Die Factoren zur Entwicklung von y werden —7, +7 und +7; man kann für sie —1, +1 und +1 setzen.

Beispiel 6.
$$\begin{aligned} 1)\ & ax + by + cz = a \\ 2)\ & ax + 2by + 2cz = b \\ 3)\ & ax + 2by + 3cz = c \end{aligned}$$

Man kann hier ax, by und cz als die Unbekannten ansehen.

Auflös. $x = \frac{2a - b}{a}$, $y = \frac{2b - a - c}{b}$, $z = \frac{c - b}{c}$.

Beispiel 7.
$$\begin{aligned} 1)\ & 2x - 3y + 8z = 12a \\ 2)\ & 3x + 2y - 6z = 5b \\ 3)\ & 4x + 4y - 3z = 5a - b. \end{aligned}$$

Auflös. $x = 2a + b$, $y = -2b$, $z = a - b$.

Anmerkung. 3. Es kommen Fälle vor, in welchen die Coefficienten einer Gleichung nur annähernd gegeben sind, etwa als abgekürzte Decimalbrüche; dann sind natürlich auch die Unbekannten nur annähernd richtig zu bestimmen. Sind hierbei die Coefficienten vielziffrige Zahlen, so thut man wohl, durch Division die Coefficienten der Unbekannten, die man eliminiren will, auf 1 zu bringen. z. B.

$$\begin{aligned} 1)\ & 3{,}4246x + 4{,}7218y = 10{,}4978 \\ 2)\ & 5{,}3412x - 1{,}3113y = 2{,}7414. \end{aligned}$$

Will man nun y eliminiren, so entsteht:

Aus 1) $0{,}7252 \cdot x + y = 2{,}2232$

Aus 2) $4{,}0732 \cdot x - y = 2{,}0906$; addirt:

$4{,}7984\ x = 4{,}3138$; hieraus:

$x = 0{,}8990$; $y = 1{,}5712$.

IV. **Die französische Methode.** Um aus zwei Gleichungen zwei Unbekannte zu entwickeln, multiplicirt man eine Gleichung mit einem beliebigen Buchstaben p und addirt (oder subtrahirt) beide Gleichungen, indem man x und y aus den betreffenden Gliedern ab-

sondert. Jetzt setzt man für p einen solchen Werth, daß der Coefficient der einen Unbekannten Null wird, die andere Unbekannte kann man dann entwickeln. Das Verfahren ist leicht auf mehr Gleichungen mit mehr Unbekannten auszudehnen. Sind z. B. 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten x, y, z gegeben, so multiplicirt man eine Gleichung mit p, eine zweite mit q und addirt die drei Gleichungen, indem man wieder x, y, z absondert. Nun kann man für p und q solche Werthe setzen, daß zwei Unbekannte den Coefficienten Null erhalten; die dritte Unbekannte ist dann zu finden.

Beisp. 1. 1) $2x + 3y = 10$

2) $5x - 2y = 3.$

Multiplicirt man 1) mit p, und addirt:

$$(2p + 5)x + (3p - 2)y = 10p + 3.$$

Setzt man $2p + 5 = 0$, also $p = -\frac{5}{2}$, so entsteht:

$$\left(-\frac{15}{2} - 2\right)y = -25 + 3; \text{ also } y = \frac{44}{19}.$$

Setzt man $3p - 2 = 0$, also $p = \frac{2}{3}$, so folgt:

$$\left(\frac{4}{3} + 5\right)x = \frac{20}{3} + 3; \text{ also } x = \frac{29}{19}.$$

Beisp. 2. 1) $x + y + z = 6$

2) $3x - y - z = 6$

3) $2x - 3y - 2z = -1.$

Multiplicirt man 1) mit p und 2) mit q und addirt, so folgt:

$$(p + 3q + 2)x + (p - q - 3)y + (p - q - 2)z = 6p + 6q - 1.$$

Setzt man jetzt: $p + 3q + 2 = 0$ und

$p - q - 3 = 0$, so folgt:

$$p = \frac{7}{4} \text{ und } q = -\frac{5}{4}; \text{ folglich}$$

$$\left(\frac{7}{4} + \frac{5}{4} - 2\right)z = \frac{42}{4} - \frac{30}{4} - 1;$$

also $z = 2$.

Ebenso kann man $x = 3$, $y = 1$ finden.

Anmerkung 4. Auch bei mehreren Gleichungen mit mehreren Unbekannten ist es zuweilen bequem, die Unbekannten nicht unmittelbar zu entwickeln, sondern ähnlich, wie in §. 136. zu verfahren.

Beispiel. Ein Wasserbehälter hat 3 Zuflußröhren A, B und C. Durch A und B zusammen läßt er sich in $1\frac{1}{3}$ Stunde füllen, durch A und C in $1\frac{1}{2}$ Stunde und durch B und C in $2\frac{2}{5}$ Stunden; in welcher Zeit durch jede Röhre allein?

Auflös. Durch A allein in x Stunden, durch B in y und durch C in z Stunden, so ist (vergl. das Beispiel Seite 192):

$$1)\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4};\quad 2)\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3};\quad 3)\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{12}.$$

Betrachtet man zunächst $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ als die Unbekannten, so folgt $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$; $\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$, daher $x = 2$, $y = 4$, $z = 6$. (Durch alle 3 Röhren zugleich dauert die Füllung $1\frac{1}{11}$ Stunde.)

§. 141.

Anmerkung über die Methode der kleinsten Quadrate.

Drei Größen A, B und C können in einem solchen Zusammenhange mit einander stehen, daß man zu der Gleichung

$$x \cdot A + y \cdot B = C$$

berechtigt zu sein glaubt, ohne aber die von A, B, C **unabhängigen** Coefficienten x und y zu kennen. Kann man nun für bestimmte Werthe von A und B den zugehörigen Werth von C durch einen praktischen Versuch finden, ist z. B., wenn A den Werth a_1 und B den Werth b_1 hat, dann $C = c_1$ gefunden: so hat man die Gleichung

$$a_1x + b_1y = c_1.$$

Findet man durch einen zweiten Versuch, daß a_2, b_2 und c_2 auch zu einander gehörige Werthe der Größen A, B, C sind, so ist noch

$$a_2x + b_2y = c_2,$$

und aus beiden Gleichungen kann man x und y entwickeln. — Weil aber praktische Versuche ganz genaue Resultate nicht geben, oft auch, weil die Annahme $xA + yB = C$ nur annähernd wahr ist: so macht man weitere Versuche und erhält noch mehr Gleichungen zwischen x und y:

$$a_3x + b_3y = c_3$$
$$a_4x + b_4y = c_4$$

u. s. w.

Alle diese Gleichungen werden freilich die ganz richtigen Werthe von x und y selbst dann nicht geben, wenn die Annahme $xA + yB = C$ völlig richtig war; aber man wird doch diejenigen Werthe der Unbekannten für die richtigen gelten lassen können, welche allen den gefundenen Gleichungen am genauesten entsprechen. Wie findet man aber solche Werthe? Diese Frage hat **Gauß** durch seine **Methode der kleinsten Quadrate** beantwortet, deren Begründung nicht in den Grenzen dieses Lehrbuches liegt; hier soll nur das Verfahren selbst mitgetheilt werden. Man multiplicirt jede Gleichung

1) mit dem Factor von x und addirt alle Gleichungen,
2) mit dem Factor von y und addirt auch alle Gleichungen.

So erhält man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$1)\ (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots)x + (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots)y$$
$$= a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + \ldots$$

$$2)\ (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + ..)x + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + ...)y$$
$$= b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 + ..,$$

und aus diesen Gleichungen hat man x und y zu entwickeln.

Aehnliche Gleichungen mit unbekannten Coefficienten kommen auch zwischen nur zwei Größen A, B vor, oder zwischen noch mehr Größen, oder auch zwischen A und Potenzen von B, u. s. w.; z. B.

$$A = x + yB, \text{ oder: } x + yB + zB^2 + v \cdot B^3 = A, \text{ u. s. w.}$$

Es ist leicht einzusehen, daß nach der angegebenen Methode genau so viel Gleichungen entstehen, als Unbekannte sind.

Das folgende Beispiel führt Holtzmann in seiner Analysis an. Die dort in Metern und Graden des Centesimal-Thermometers angegebenen Maße sind hier auf preußische Ruthen und Grade des Réaumur'schen Thermometers reducirt.

Beispiel. Poisson nimmt in seinem Werke Theorie mathématique de la chaleur an, daß die Wärme der Erde bei geringen Tiefen von der Oberfläche nach dem Inneren zu mit der Tiefe gleichförmig wachse. Bezeichnen wir daher die Temperatur an der Erdoberfläche mit x Grad R., die Zunahme derselben für jede Ruthe, die man tiefer eindringt, mit y Grad, so hat die Temperatur T (in Graden) in der Tiefe von A Ruthen folgende Größe:

$$T = x + A \cdot y.$$

In der Gegend von Lille hat man nun durch Beobachtungen von artesischen Brunnen folgende Temperatur (T) in den beigesetzten Tiefen (A) gefunden:

Tiefe des Brunnens. Ruthen.	Temperatur des Wassers. Grade.
5,7	8,9
6,3	9,0
8,7	9,4
9,2	9,4
9,5	9,2
9,5	9,2
9,9	9,8
10,3	9,7
10,3	9,6
10,7	9,7
13,4	10,0
13,6	10,0
14,2	9,8
16,6	10,6
26,7	11,3

Setzt man nun die durch diese Versuche gefundenen zusammengehörigen Werthe von T und A in die Gleichung T = x + Ay ein, so entstehen 15 Gleichungen:

$$\begin{aligned}
8{,}9 &= x + 5{,}7y\\
9{,}0 &= x + 6{,}3y\\
9{,}4 &= x + 8{,}7y\\
9{,}4 &= x + 9{,}2y\\
9{,}2 &= x + 9{,}5y\\
9{,}2 &= x + 9{,}5y\\
9{,}8 &= x + 9{,}9y\\
9{,}7 &= x + 10{,}3y\\
9{,}6 &= x + 10{,}3y\\
9{,}7 &= x + 10{,}7y\\
10{,}0 &= x + 13{,}4y\\
10{,}0 &= x + 13{,}6y\\
9{,}8 &= x + 14{,}2y\\
10{,}6 &= x + 16{,}6y\\
11{,}3 &= x + 26{,}7y.
\end{aligned}$$

Nach der Methode der kleinsten Quadrate hat man nun zuerst alle diese Gleichungen mit dem Factor von x (also mit 1) zu multipliciren und sie dann zu addiren. So entsteht:

$$(1.)\ 145{,}6 = 15x + 174{,}6y.$$

Ferner soll man jede Gleichung mit dem Factor von y multipliciren und wieder alle Gleichungen addiren. So erhält man:

$$(2.)\ 1736{,}92 = 174{,}6x + 2392{,}3y.$$

Aus den Gleichungen (1.) und (2.) kann man nun x und y entwickeln und erhält:

$$x = 8{,}344 \text{ (Grad) und } y = 0{,}117 \text{ (Grad).}$$

Setzt man diese Werthe in die ursprüngliche Gleichung ein, so ist für jene Gegend:

$$T = 8{,}344 + A \cdot 0{,}117.$$

Ein zweites Beispiel folgt in §. 190. Anmerkung 2.

Die Proportions-Rechnungen.

§. 142.

Einleitung.

Einige Gattungen algebraischer Aufgaben, welche zu Gleichungen zwischen Brüchen, also Verhältnissen, d. h. zu Proportionen führen, pflegt man unter dem Namen „Proportions-Rechnungen" zusammenzufassen. Indem man von jeder Gattung solcher Aufgaben eine allgemein, d. h. in Buchstaben auflöst, benutzt man das Resultat als Regel zur Auflösung aller Aufgaben derselben Gattung; die vielfachen Anwendungen dieser Rechnungen auf das praktische Leben und verwandte Wissenschaften rechtfertigen dieses Verfahren. Den einzelnen Rechnungen schicken wir einige Bemerkungen und Sätze voraus, sprechen aber immer nur von geometrischen Proportionen.

I. Aus jeder der Proportionen:

$$a:b = c:x;\quad b:a = x:c;$$
$$c:x = a:b;\quad x:c = b:a$$

folgt $x = \frac{bc}{a}$; d. h. ist das unbekannte Glied einer Proportion ein äußeres (inneres), so findet man es, wenn man das Product der beiden inneren (äußeren) Glieder durch das bekannte äußere (innere) Glied dividirt. $\frac{bc}{a}$ wird häufig die 4te Proportionale zu a, b und c genannt.

Aus jeder der stetigen Proportionen

$$a:x = x:b;\quad x:a = b:x$$

folgt $x = \sqrt{ab}$ (§. 42.).

Kommt in einer Proportion x mehrmal vor, so kann man, um x zu entwickeln, entweder das Product der inneren Glieder dem der äußeren gleich setzen, oder auch, was manchmal bequem ist, die Summen- und Differenzen-Sätze (§. 45.) anwenden.

z. B. 1) $a + x : x = c : d$, hieraus:

$$a + x - x : x = c - d : d; \text{ folglich } x = \frac{ad}{c - d}.$$

2) $a - 3x : 2x = c : d$, hieraus:

$$a - 3x : x = 2c : d,$$

$$a : x = 2c + 3d : d; \text{ folglich } x = \frac{ad}{2c + 3d}.$$

3) $3 + 4x : 3 - 4x = 5 : 1$, hieraus:

$$3 + 4x : 6 = 5 : 6; \text{ folglich}$$

$$3 + 4x = 5 \text{ und } x = \frac{1}{2}.$$

II. Man kann nur solche Größen mit einander vergleichen, welche gleichbenannte Zahlen sind oder sich auf gleiche Benennung bringen lassen; folglich können auch nur solche Größen Glieder eines Verhältnisses sein; das Verhältniß selbst ist dann immer dem Verhältniß zweier abstracten Zahlen gleich. (Vergl. §. 40. und 39.) z. B. 10 Thlr. : 4 Thlr. = 5 : 2; 5 Lth. : 2 Pfd. = 5 : 60 = 1 : 12.

Wenn man bei einer Proportion den Fall, daß alle Glieder unbenannt sind, ausnimmt, so können hiernach nur noch drei Fälle Statt finden, wenn man sich gleichartige Größen in gleichbenannte verwandelt denkt:

1) alle Glieder sind gleichbenannt, z. B.

a Pfd. : b Pfd. = c Pfd. : x Pfd.;

2) alle Glieder sind benannte Zahlen, aber nur die Glieder desselben Verhältnisses gleichbenannte, z. B.

a Pfd. : b Pfd. = c Thlr. : x Thlr.;

3) die Glieder eines Verhältnisses sind gleichbenannte Zahlen, die des andern unbenannte, z. B.

a Pfd. : b Pfd. = c : x.

In allen drei Fällen hebt sich jede Benennung fort, und man erhält immer $a : b = c : x$. Die weitere Rechnung geschieht sonach immer mit unbenannten Zahlen; folglich kann man jetzt alle für unbenannte Zahlen bewiesenen Gesetze anwenden, z. B. die mittleren Glieder mit einander vertauschen, das Product der innern oder äußern Glieder bilden, u. s. w.

III. Sind A, B, C, D, ... gleichartige Größen, a, b, c, d, ... unbenannte Zahlen und hat man die Proportionen:

$$
\begin{array}{l}
1)\ A:B = a:b \\
2)\ B:C = c:d \\
3)\ C:D = e:f \\
4)\ D:E = g:h, \text{ so folgt:} \\
\hline
A:E = aceg:bdfh.
\end{array}
$$

Dieser Satz ist in §. 46. für den Fall bewiesen worden, daß A, B, C,... unbenannte Zahlen sind; hier wird also behauptet, daß das Verfahren des Zusammensetzens der Proportionen auch auf Größen Anwendung findet, wenn nur das erste Glied jeder Proportion dem zweiten Gliede der vorhergehenden gleich ist. Der Beweis in §. 46. paßt hier nicht, weil man Größen nicht multipliciren kann. Er ist jetzt so zu führen:

Aus 1) folgt: $B = \frac{b}{a}A$; in 2) substituirt:

$$\frac{b}{a}A:C = c:d, \text{ folglich}$$

$$C = \frac{d}{c}\cdot\frac{b}{a}\cdot A.$$

Wird C in 3) substituirt, so folgt:

$$\frac{d}{c}\cdot\frac{b}{a}A:D = e:f, \text{ folglich:}$$

$$D = \frac{f}{e}\cdot\frac{d}{c}\cdot\frac{b}{a}\cdot A.$$

Wird endlich D in 4) substituirt, so folgt:

$$\frac{f}{e}\cdot\frac{d}{c}\cdot\frac{b}{a}A:E = g:h \text{ oder}$$

$$A:E = aceg:bdfh.$$

Die Anzahl der Proportionen ist hierbei gleichgültig. Dieser wichtige Satz, der auch häufig in der Geometrie gebraucht wird, dient zum Auffinden des Verhältnisses zweier Größen vermittelst einer oder mehrerer Zwischen-Größen. Um z. B. das Verhältniß zweier Dreiecke A und B zu finden, sucht man ein drittes Dreieck P, welches sowohl zu A, als auch zu B in einem bekannten Verhältniß steht. Verhält sich etwa

$$
\begin{array}{l}
A:P = a:a_1 \text{ und} \\
P:B = h:h_1, \text{ so folgt:} \\
\hline
A:B = ah:a_1h_1.
\end{array}
$$

IV. Stehen zwei Größen A und B in einem solchen Zusammenhange mit einander, daß eine Aenderung der einen Größe auch eine Aenderung der andern erzeugt oder voraussetzt, so sagt man:

die Größen sind von einander abhängig. Wir haben es hier mit Größen zu thun, deren Abhängigkeit von einander zu gleichen Verhältnissen, d. h. zu einer Proportion führt. Hierbei sind zwei Fälle denkbar:

1) Eine Vervielfachung oder Theilung von A ruft eine eben so große Vervielfachung oder Theilung von B hervor. Man sagt dann: „A und B stehen im geraden Verhältniß zu einander." Geht etwa B in b über, wenn A in a übergeht, so hat man die Proportion

$$A:a = B:b,$$

wofür man auch setzen kann:

$$A:nA = B:nB, \text{ oder } A:\frac{A}{n} = B:\frac{B}{n}.$$

Beide Seiten zeigen dann steigende oder beide fallende Verhältnisse; daher wäre die Proportion $A:a = b:B$ offenbar falsch.

2) Wenn aber eine Vervielfachung von A eine eben so große Theilung von B, oder eine Theilung von A eine eben so große Vervielfachung von B hervorruft, so sagt man: „A und B stehen im umgekehrten Verhältniß zu einander", und jetzt findet die Proportion Statt:

$$A:a = b:B,$$

wofür man auch setzen kann:

$$A:nA = \frac{B}{n}:B, \text{ oder } A:\frac{A}{n} = nB:B.$$

Offenbar wäre jetzt die Proportion $A:a = B:b$ falsch.

In beiden Fällen aber nennt man A und B proportionale Größen.

Bei allen Proportionsrechnungen ist das eben Gesagte wohl zu beachten und bei jeder besonderen Aufgabe zu beurtheilen, ob zwei Größen zu einander im geraden, oder im umgekehrten Verhältniß stehen. Beispiele hierüber im nächsten §.

§. 143.

Einfache und zusammengesetzte Regel de tri.

I. Sind zwei Größen A und B proportional, ist A nur von B allein abhängig und ändert sich die Größe B, indem sie in b übergeht: so kann man die Größe x berechnen, in welche A übergehen muß; denn das Verhältniß $A:x$ ist dann entweder dem Verhältniß $B:b$, oder dem Verhältniß $b:B$ gleich, je nachdem A und B zu einander im geraden, oder umgekehrten Verhältniß stehen. Man hat dann entweder:

$$A:x = B:b, \text{ folglich } x = \frac{b}{B}\cdot A; \text{ oder}$$

$$A:x = b:B, \text{ folglich } x = \frac{B}{b}\cdot A.$$

Die Aufgabe enthält drei bekannte Zahlen und wird eine Aufgabe der Regel de tri genannt. z. B.

1) Eine Garnison von 2000 Mann hat gerade noch auf 6 Monat Proviant, als sie um 600 Mann vermehrt wird; wie lange wird der Proviant jetzt reichen?

Auflös. Nehmen wir an: x Monat, so haben wir zur besseren Uebersicht folgenden Ansatz der Aufgabe:

2000 Mann reichen 6 Monat.
2600 „ „ x „

Wir urtheilen: je mehr Mann, desto weniger Monate reichen sie mit dem Proviant; folglich stehen die Größen 2000 Mann und 6 Monat zu einander im umgekehrten Verhältniß, also verhält sich:

$2000:2600 = x:6$, und hieraus folgt $x = 4\frac{8}{13}$ Monat.

2) Es ist ein Graben von 200 Fuß Länge und 6 Fuß Breite ausgeworfen worden. Wenn derselbe 8 Fuß breit gemacht worden wäre, wie lang würde er für dieselben Kosten geworden sein?

Auflös. 200′ lang . . . . . . 6′ breit
x′ „ . . . . . . 8′ „

Wir urtheilen: je breiter der Graben sein soll, desto weniger lang wird er bei denselben Kosten; wir haben also ein umgekehrtes Verhältniß, folglich: $200:x = 8:6$; also $x = 150'$.

3) Auf der Eisenbahn Berlin-Cöln zahlt man in der ersten Klasse für 69 Meilen 14 Thlr. 2 Sgr. Personengeld; hingegen auf der Bahn Berlin-Eisenach-Cassel für $44\frac{1}{2}$ Meile 11 Thlr. 5 Sgr.; welche Bahn hat billigere Fahrpreise?

Auflös. Berechnen wir, wie viel das Personengeld auf der ersten Bahn für $44\frac{1}{2}$ Meile betragen würde:

69 Meilen . . . . 422 Sgr.
$44\frac{1}{2}$ „ . . . . x „

Je mehr Meilen, desto höher das Personengeld: d. h. das Verhältniß ist ein gerades, also $69:44\frac{1}{2} = 422:x$, hieraus $x = 9$ Thlr. 2 Sgr. 2 Pf. Die Fahrpreise der ersten Bahn sind billiger.

II. Eine Größe A kann aber von mehreren Größen B, C, D, E abhängig sein, während sie mit jeder einzelnen dann proportinal ist, wenn die andern sich nicht ändern. Wenn nun aber alle diese Größen sich ändern, indem B in b, C in c, D in d und E in e übergeht, in welche Größe x geht dann A über? Um diese Auf-

gabe zu lösen, können wir annehmen, daß die Veränderungen der Größen B, C, D, E nach einander eintreten; dann wird auch A nach und nach in x übergehen, so etwa, daß, wenn zuerst B allein sich ändert und in b übergeht, dann aus A die Größe x_1 wird; jetzt mag C in c übergehen, so wird x_1 sich ändern und etwa den Werth x_2 annehmen; geht nun D in d über, so mag x_2 in x_3 übergehen; ändert sich endlich noch E in e, so wird x_3 in x übergehen. Hieraus ergeben sich, wenn wir festsetzen, daß A mit B und E im geraden, mit C und D aber im umgekehrten Verhältniß stehen soll, folgende Proportionen:

$$A : x_1 = B : b$$
$$x_1 : x_2 = c : C$$
$$x_2 : x_3 = d : D$$
$$x_3 : x = E : e.$$

Hieraus folgt durch Zusammensetzen (§. 142. III.):

$$A : x = BcdE : bCDe;$$

d. h. A verhält sich zu x, wie die Producte der Verhältnißzahlen, welche aus den Größen B, C, D, E entspringen.

Praktisch erhält man dasselbe Resultat so: Man untersucht, wie sich A zu x verhält, wenn jedesmal nur eine der Größen B, C, D, E sich ändert, und setzt die gefundenen Verhältnisse zusammen. Daher der folgende Ansatz:

$$A : x = \left\{ \begin{array}{l} B : b \\ c : C \\ d : D \\ E : e \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wenn B allein sich ändert.} \\ \text{„ C „ „ „} \\ \text{„ D „ „ „} \\ \text{„ E „ „ „} \end{array}$$

Hieraus $A : x = BcdE : bCDe$. Man kann natürlich schon vor der Multiplication (rechts) jedes Vorderglied gegen ein beliebiges Hinterglied heben.

Je nachdem A nur von zwei Größen B, C, oder von dreien B, C, D, u. s. w. abhängig ist, enthält die Aufgabe bezüglich fünf, sieben, ... bekannte Zahlen und heißt eine Aufgabe der Regel de quinque, septem, u. s. w., im Allgemeinen eine Aufgabe der zusammengesetzten Regel de tri.

Beispiel 1. Ein Stück Tuch von 60 Ellen Länge und 2 Ellen Breite hat 144 Thlr. gekostet, wie viel wird ein Stück Tuch von derselben Güte kosten, welches 50 Ellen lang und $\frac{9}{4}$ Ellen breit ist?

Ansatz der Aufgabe:

60 Ellen lang, 2 Ellen breit, 144 Thlr.
50 „ „ $\frac{9}{4}$ „ „ x „

Auflös.

$$144 : x = \left\{ \begin{array}{l} 60 : 50 \\ 2 : \frac{9}{4} \end{array} \right\}; \text{ hieraus folgt } x = 135 \text{ Thlr.}$$

Beispiel 2. 20 Arbeiter werfen in 16 Tagen, indem sie täglich 10 Stunden arbeiten, einen Graben von 6′ Breite, 5′ Tiefe und 400′ Länge aus. Wie lang würden 45 Arbeiter in demselben Boden einen 8′ breiten und 6′ tiefen Graben in 12 Tagen gemacht haben, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten?

Ansatz der Aufgabe.

20 Arb., 6′ breit, 5′ tief, 400′ lang, 16 Tage, tägl. 10 St.
45 „ 8′ „ 6′ „ x′ „ 12 „ „ 12 „

Auflös.

$$400 : x = \left\{\begin{array}{r} 20:45 \\ 8:\ 6 \\ 6:\ 5 \\ 16:12 \\ 10:12 \end{array}\right\}; \text{ gehoben, folgt:}$$

$$1 : x = 4 : 45 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3; \text{ also } x = 506\tfrac{1}{4}'.$$

§. 144.

Procent-, Rabatt- und Agio-Rechnung.

I. Der hundertste Theil einer Größe a, also $\frac{1}{100} \cdot a$, wird ein Procent ($1\frac{0}{0}$) der Größe a genannt; folglich sind p Procent von a gleich $\frac{p}{100} \cdot a$. z. B. 1) Eine Waare ist mit 12 pCt. Gewinn für 227 Thlr. verkauft worden; wie viel (x) betrug der Einkaufspreis?

Auflös. $x + \frac{12}{100} x = 227$; hieraus $x = 202$ Thlr. 20 Sgr. 4 Pf.

2) Jemand hat 24 Thlr. Steuer zu zahlen; wie viel Procent seines jährlichen Einkommens von 1200 Thlr. beträgt die Steuer?

Auflös. $\frac{x}{100} \cdot 1200 = 24$, folglich $x = 2$ (Procent).

3) In einer Mischung von Gold, Silber und Kupfer, 1 Pfd. schwer, sind $2\frac{2}{3}$ pCt. Gold und 16 pCt. Silber; wie viel Gold, Silber und Kupfer enthält die Mischung?

Auflös. 8 Quent. Gold, 4 Loth 8 Quent. Silber und 24 Loth 4 Quent. Kupfer. (1 Pfd. = 30 Lth., 1 Lth. = 10 Quent.)

II. Das Gewicht einer Waare mit Einschluß der Emballage heißt das Brutto-Gewicht, ohne Emballage das Netto-Gewicht; das Gewicht der Emballage selbst: die Tara oder das Tara-Gewicht. Beträgt die Tara p pCt. des Brutto-Gewichts und ist letzteres gleich a Pfd., so ist das Tara-Gewicht $= \frac{p}{100} \cdot a$ Pfd. und das Netto-Gewicht $= \left(a - \frac{p}{100} a\right)$ Pfd. z. B.

Eine Waare zahlt pro Ctr. 1 Thlr. 10 Sgr. Eingangssteuer. Wenn nun die eingeführte Waare 48 Ctr. 60 Pfd. Brutto-Gewicht hat, die Tara aber mit 18 pCt. in Rechnung gestellt wird, wie viel Steuer ist zu zahlen?

Auflös. Das Netto-Gewicht ist 82 pCt. vom Brutto-Gewicht; daher die Steuer $= \frac{82}{100} \cdot 48{,}6 \cdot \frac{4}{3}$ Thlr. $=$ 53 Thlr. 4 Sgr. 1 Pf.

III. Rabatt ist bei dem Kaufe einer größeren Menge von Waare entweder

1) ein Erlaß an Geld (Rabatt in Hundert), oder
2) eine Zulage an Waare (Rabatt auf Hundert).

Man drückt den Rabatt in Procenten des Nominal-Werthes der Waare aus; beträgt er p pCt. und ist der Preis der verlangten Waare = a Thlr., so zahlt man bei Rabatt in Hundert für diese Waare nur $\left(a - \frac{p}{100}a\right)$ Thlr.; bei Rabatt auf Hundert zahlt man a Thlr., erhält aber Waare im Werthe von $\left(a + \frac{p}{100}a\right)$ Thlr.

Alle hier vorkommenden Fragen reduciren sich auf folgende: Jemand hat Waare im Werthe von a Thlr. empfangen und bei p pCt. Rabatt b Thlr. dafür gezahlt; wie groß ist b, wenn a gegeben ist, und wie groß a, wenn b gegeben; auch kann p gesucht sein, wenn a und b bekannt sind. (An die Stelle des Preises kann auch die Quantität der Waare treten.)

Auflös. 1) Rabatt in Hundert: $b = a - \frac{p}{100}a$.

2) Rabatt auf Hundert: $a = b + \frac{p}{100}b$.

Diese beiden Gleichungen führen auch zu den Proportionen:

1) Rabatt in Hundert: $100 : 100 - p = a : b$,

2) Rabatt auf Hundert: $100 : 100 + p = b : a$, und auch diesen Ansatz kann man zur Auflösung der folgenden Aufgaben anwenden.

z. B. 1) Das Loth einer Waare kostet $5\frac{1}{2}$ Sgr. Jemand kauft 32 Pfd. mit $6\frac{2}{3}$ pCt. Rabatt in Hundert, wie viel (x) hat er zu zahlen?

Auflös. 32 Pfd. würden ohne Rabatt 176 Thlr. kosten; folglich zahlt er $\left(176 - \frac{6\frac{2}{3}}{100} \cdot 176\right)$ Thlr. $=$ 164 Thlr. 8 Sgr.

2) Wenn in demselben Falle der Käufer 100 Thlr. in dieser Waare anlegen wollte, wie viel würde die Waare, welche er erhält, werth sein? (Rabatt in Hundert).

Auflös. 107 Thlr. 4 Sgr. $3\frac{3}{7}$ Pf., aus dem Ansatze:

$$100 = x - \frac{6\frac{2}{3}}{100}x.$$

3) In dem 1sten Beispiele sei Rabatt auf Hundert gemeint, und der Käufer will 32 Pfd. incl. Rabatt; wie viel (x) hat er zu zahlen?

Auflös. 165 Thlr. $\left(x + \frac{6\frac{2}{3}}{100}x = 176.\right)$

4) Das 2te Beispiel bei Rabatt auf Hundert.

Auflös. 106 Thlr. 20 Sgr.

5) Ein Buchhändler bietet Abonnenten-Sammlern auf 12 Exemplare eines Buches ein Frei-Exemplar; wie viel Rabatt will er geben?

Auflös. Rabatt auf Hundert: $13 = 12 + \frac{p}{100}12$; $p = 8\frac{1}{3}$ pCt.

Rabatt in Hundert: $12 = 13 - \frac{p}{100}13$; $p = 7\frac{9}{13}$ pCt.

IV. Agio bedeutet die Zulage oder den Abzug an Geld beim Umsetzen einer Geldsorte in eine andere und wird ebenfalls in Procenten berechnet. Steht z. B. Gold gegen Silber p pCt. höher, so heißt das: a Thlr. Gold sind gleich $\left(a + \frac{p}{100}a\right)$ Thlr. Silber, also 100 Thlr. Gold = (100 + p) Thlr. Silber. Praktisch wichtig ist folgende Aufgabe:

Beispiel 1. Gold stehe gegen Silber p pCt.; wieviel beträgt das Agio von einem Friedrichsd'or?

Auflös. 1 Friedrichsd'or oder 5 Thlr. Gold $= \left(5 + \frac{p}{100}5\right)$ Thlr. Silber = 5 Thlr. + $30\frac{p}{20}$ Sgr. Silber = 5 Thlr. + $\left(p + \frac{1}{2}p\right)$ Sgr. Silber. Man findet also das Agio in Silbergroschen, wenn man p zu $\frac{1}{2}$p addirt. Steht z. B. Preuß. Gold $13\frac{1}{3}$ pCt., so ist das Agio auf einen Friedrichsd'or $= \left(13 + \frac{1}{3} + 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$ Sgr. = 20 Sgr.

Beisp. 2. Ich erhielt für einen Louisd'or 5 Thlr. 14 Sgr. Courant; zu wie viel Procent wurde mir das Gold gewechselt?

Auflös. $p + \frac{1}{2}p = 14$, folglich $p = 9\frac{1}{3}$ pCt.

Beisp. 3. Jemand will 600 Thlr. Preuß. Courant in Preuß. Cassenanweisungen umsetzen, kann solche aber nur gegen einen Verlust von $\frac{2}{3}$ pCt. Agio erhalten; wie viel Geld in Cassenanweisungen erhält er?

Auflös. $\left(600 - \frac{\frac{2}{3}}{100}600\right)$ Thlr. = 596 Thlr.

§. 145.

Zinsen-, Disconto- und Zinseszinsen-Rechnung.

I. Einfache Zinsen. Ein Kapital a heißt zu p pCt. Zinsen (Interessen) ausgeliehen, wenn dem Eigenthümer desselben dadurch, daß er es einem Anderen zur Benutzung überläßt, eine jährliche Geld-Entschädigung von p Procent des Kapitals zu Theil wird. Auch wenn der Eigenthümer das Geld selbst benutzt und mit demselben einen jährlichen reinen Gewinn von p Procent des Kapitals erzielt, pflegt man zu sagen, das Geld verzinse sich zu p Procent. Die jährlichen Zinsen des Kapitals a sind sonach $= \frac{p}{100}a$, so daß 100 Thlr. jährlich p Thlr. Zinsen bringen. Bezeichnet Z die Zinsen von n Jahren und K das Kapital mit Einschluß dieser Zinsen von n Jahren, so ist:

$$Z = \frac{np}{100}a \text{ und } K = \left(1 + \frac{np}{100}\right)a.$$

z. B. 1) Jemand vermehrt sein jährliches Einkommen dadurch um 36 Thlr., daß er die Zinsen eines ausgeliehenen Kapitals von 4 pCt. auf 5 pCt. erhöht; wie groß ist das Kapital (x)?

Auflös. 3600 Thlr., aus dem Ansatze $\frac{1}{100}x = 36$.

2) Am 1. März 1847 verlieh Jemand ein Kapital von 4360 Thlr. zu $4\frac{1}{2}$ pCt. Zinsen und empfing Kapital nebst allen Zinsen am 1. November 1855 zurück; wie groß war diese Summe?

Auflös. 6060 Thlr. 12 Sgr. (Hier ist $n = 8\frac{2}{3}$).

3) Jemand antwortet auf die Frage, wie groß das Kapital sei, welches er einem Freunde zu 4 pCt. Zinsen geliehen habe: „Es ist gerade um 10000 Thlr. größer, als die Zinsen, welche mir mein Freund jährlich zahlt". Wie groß ist das Kapital?

Auflös. $10416\frac{2}{3}$ Thlr.

4) Jemand kauft ein Haus für 25000 Thlr. Er zieht aus dem Hause jährlich 1750 Thlr. an Miethe, hat aber im Durchschnitt jährlich 125 Thlr. Kosten für Steuern, Instandhaltung u. s. w.; zu wie viel Procent verzinst sich das Kapital?

Auflös. $\frac{p}{100}25000 = 1750 - 125$; folglich $p = 6\frac{1}{2}$ pCt.

5) Jemand ist verpflichtet, einem Anderen folgende Summen zu zahlen: a_1 Thlr. nach n_1 Jahren, a_2 Thlr. nach n_2 Jahren, a_3 Thlr. nach n_3 Jahren, u. s. w.; nach wie viel Jahren kann er statt dessen die ganze Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ auf ein Mal zahlen?

Auflös. Angenommen nach x Jahren, so folgt, wenn man die Summe der Zinsen von a_1, a_2, a_3, ... den Zinsen der Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ gleich setzt:

$$\frac{n_1 p}{100} a_1 + \frac{n_2 p}{100} a_2 + \frac{n_3 p}{100} a_3 + \ldots = \frac{x \cdot p}{100}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots).$$

Hieraus der mittlere Zahlungstermin:

$$x = \frac{n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 + \ldots}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}.$$

II. Wenn ein Kapital a erst nach n Jahren fällig ist, d. h. wenn es erst nach n Jahren an Jemand ausgezahlt werden soll, ohne daß dieser bis dahin Anspruch auf Zinsen hat, und der Empfänger schon heut die Auszahlung wünscht, so muß er sich einen Abzug gefallen lassen, welchen man den Disconto nennt, und welcher den zeitigen Inhaber des Kapitals a oder einen Anderen, der in dessen Stelle die Zahlung übernimmt, für den Verlust der Zinsen entschädigen soll. Beträgt der Disconto (also auch der angenommene Zinsverlust) p Procent aufs Jahr, so ist das heut auszuzahlende Kapital nicht etwa $= a - \frac{np}{100} \cdot a$, denn solches würde in n Jahren durch die Zinsen nicht zur Größe a anwachsen, sondern der heutige Werth von a, er mag x heißen, ist aus der Gleichung

$$x + \frac{np}{100} x = a$$

(oder aus der Proportion $100 + np : 100 = a : x$) zu entnehmen. Man erhält $x = \frac{100a}{100 + np}$.

Auf dieselbe Weise ist zu verfahren, wenn ein Kapital a auf n Jahre zu p Procent Zinsen ausgeliehen wird und der Gläubiger die Zinsen sogleich vom Kapital abziehen will. Er muß dem Schuldner heut das Kapital $\frac{100a}{100 + np}$ auf n Jahre zinsfrei übergeben, erhält aber dann das volle Kapital a zurück. Allerdings erleidet hierbei der Gläubiger einen Nachtheil dadurch, daß er die Zinsen des wirklich ausgezahlten Kapitals nicht in jährlichen Raten (oder halbjährigen 2c.) empfängt, sondern erst nach n Jahren; allein dieser Nachtheil kann durch einen erhöhten Procent-Satz ausgeglichen werden. Daß das bloße Abziehen der Zinsen noch in viel höherem Grade dem Schuldner zum Nachtheile gereicht, geht schon daraus hervor, daß $a - \frac{np}{100} a$, wenn n gehörig groß ist, Null und negativ werden kann.

Beispiel 1. Ein Wechsel über 1200 Thlr., in 18 Monaten zahlbar, soll heut mit 5 Procent Verlust discontirt werden; wie viel erhält der Inhaber des Wechsels?

Antwort: 1116 Thlr. 8 Sgr. $4\frac{1}{2}$ Pf.

Beispiel 2. Jemand will ein Kapital von 10000 Thlr. auf 12 Jahre zinsfrei borgen, ist aber erbötig, ein nach 12 Jahren fälliges Schuld-Document von solcher Höhe auszustellen, daß der Gläubiger mit 5 Procent Zinsen gedeckt ist. Auf welche Summe wird das Schuld-Document lauten?

Antwort: Auf 16000 Thlr.

Anmerkung. In Beziehung auf den Disconto muß bemerkt werden, daß im kaufmännischen Verkehr beim Discontiren eines Wechsels, im Widerspruch mit den vorhergehenden Gesetzen, die vollen Zinsen bis zu dem Tage, an welchem der Wechsel fällig ist, abgezogen werden. Der Nachtheil, welcher den Besitzer des Wechsels hierbei trifft, ist aber deshalb unerheblich, weil einmal der Disconto nach dem Geldverkehr sich regelt, dann aber auch, weil Wechsel sehr selten auf länger als 6 Monat ausgestellt werden; ein Wechsel auf 3 Monat gilt schon als langer Wechsel. Discontirt z. B. die Preußische Bank am 11. April einen Wechsel über 600 Thlr., welcher am 1. Juni desselben Jahres fällig ist, zu 4 Procent, so zieht sie die Zinsen für 49 Tage ab. Hierbei wird der Monat zu 30 Tagen, das Jahr zu 360 Tagen gerechnet. Nun geben 600 Thlr. aufs Jahr 24 Thlr. Zinsen, also täglich 24 Pf., daher auf 49 Tage: 3 Thlr. 8 Sgr.; die Bank zahlt also für den Wechsel: 596 Thlr. 22 Sgr. Die genaue Rechnung nach II. giebt 596 Thlr. 22 Sgr. $6\frac{3}{10}$ Pf. Man sieht, wie gering der Unterschied ist.

III. Zinseszinsen. Werden die Zinsen eines zu p Procent Zinsen ausgeliehenen Kapitals a nicht dem Eigenthümer desselben in bestimmten Zeiträumen ausgezahlt, sondern am Schlusse des ersten und jedes folgenden Jahres dem Kapital zugelegt und weiterhin mit verzinset, so sagt man, das Kapital sei zu p Procent Zinseszinsen ausgeliehen. Bezeichnet K die Größe, zu welcher das Kapital a am Schlusse des nten Jahres angewachsen ist, so findet man K auf folgende Weise: Nach einem Jahre wird aus dem Kapital a die Summe $a+\frac{p}{100}a$, für welche $\left(1+\frac{p}{100}\right)a$ gesetzt werden kann; daher hat man:

am Schlusse des 2ten Jahres: $\left(1+\frac{p}{100}\right)\times\left(1+\frac{p}{100}\right)a$

$$= \left(1+\frac{p}{100}\right)^2 \cdot a,$$

" " " 3ten " : $\left(1+\frac{p}{100}\right)^3 \cdot a,$

" " " 4ten " : $\left(1+\frac{p}{100}\right)^4 \cdot a,$ u. s. w.

Hieraus folgt am Schlusse des nten Jahres:

$$K = \left(1+\frac{p}{100}\right)^n \cdot a.$$

Diese Formel dient als Bestimmungsgleichung auch zur Entwickelung von a, p und n. In Beziehung auf n ist sie transcendent; nimmt man aber von beiden Seiten den Logarithmus, so folgt:

$$\log K = n \cdot \log\left(1+\frac{p}{100}\right) + \log a.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf n jetzt algebraisch, und n kann entwickelt werden.

Die Zinseszinsen-Rechnung findet nicht allein bei ausgeliehenen Kapitalien Anwendung, sondern überall da, wo Größen in gewissen Zeitabschnitten so wachsen, daß der Zuwachs in einem Abschnitt zum Wachsthum in den folgenden beiträgt, z. B. bei Forsten, Volksmengen u. s. w.

Beispiel 1. Ein Kapital von 12000 Thlr. ist zu 4 Procent Zinseszinsen ausgeliehen. Am Schlusse des 10ten Jahres erfolgt die Zurückzahlung; zu welcher Größe ist es dann angewachsen?

Auflösung. Zu $1{,}04^{10} \cdot 12000$ Thlr. $= 17762{,}9$ Thlr.

Beispiel 2. Ein Wald wird jetzt zu 40000 Klaftern abgeschätzt. Wie viel Klaftern wird er in 40 Jahren haben, wenn sich im Durchschnitt 45 Klaftern jährlich um $\frac{2}{3}$ Klaftern vermehren.

Auflösung. $\frac{p}{100} \cdot 45 = \frac{2}{3}$, folglich $p = \frac{40}{27}$ (Procent).

Nach 40 Jahren hat der Wald $\left(\frac{137}{135}\right)^{40} \cdot 40000$ Klaftern $= 72033$ Klaftern.

Beispiel 3. 5000 Thlr. waren auf 10 Jahre ausgeliehen und sind dadurch zu 7053 Thlr. angewachsen. Zu wie viel Procent bei einfachen Zinsen und zu wie viel Procent bei Zinseszinsen hat sich das Kapital verzinset?

Auflösung. $4\frac{1}{10}$ Procent bei einfachen Zinsen; $3\frac{1}{2}$ Procent bei Zinseszinsen.

Beispiel 4. In wie viel Jahren verdoppelt sich ein zu 5 Procent Zinsen ausgeliehenes Kapital, wenn einfache Zinsen, dann aber auch, wenn Zinseszinsen vorausgesetzt werden?

Auflösung. In x Jahren, so hat man bei einfachen Zinsen:

$$\left(1 + \frac{5}{100}x\right)a = 2a; \quad x = 20 \text{ Jahre};$$

bei Zinseszinsen:

$$1{,}05^x \cdot a = 2a, \text{ folglich:}$$

$$x \log 1{,}05 = \log 2; \text{ oder } x = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} = 14{,}206 \text{ Jahre.}$$

In beiden Fällen ist die Zeit von der Größe des Kapitals unabhängig.

Beispiel 5. Ein Kapital von 3000 Thlr. ist zu 5 Procent und einfachen Zinsen ausgeliehen worden, ein anderes Kapital gleichzeitig zu 4 Procent Zinseszinsen. Wenn nun nach 26 Jahren beide Kapitale resp. durch Zinsen und Zinseszinsen gleich groß geworden sind, wie groß (x) war das zweite Kapital anfänglich?

Auflösung. $1{,}04^{26} \cdot x = 2{,}3 \cdot 3000$; $x = 2488{,}76$ Thlr.

Anmerkung. Man kann die Formel $K = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot a$ auch dann anwenden, wenn die Zinsen nicht jährlich, sondern in andern Terminen zum Kapital geschlagen werden; nur muß man dann unter p nicht die jährlichen, sondern die auf den Termin reducirten (z. B. halbjährlichen) Procente verstehen, und unter n nicht die Anzahl der Jahre, sondern die Anzahl der Termine in diesen Jahren. Werden z. B. die Zinsen alle 3 Monate zum Kapital geschlagen, so hat man am Schlusse des nten Jahres $K = \left(1 + \frac{\frac{1}{4}p}{100}\right)^{4n} \cdot a$.

§. 146.

Die Kettenregel dient zur Reduction einer benannten Zahl auf eine andere Benennung, oder auch des Geldwerthes einer Größe auf den Geldwerth einer anderen, wenn man eine unmittelbare Vergleichung beider Größen nicht anstellen kann, sondern sich dazu einer oder mehrerer Zwischengrößen bedienen muß. Sind P und P_0 benannte Einheiten, so kann man fragen, für welchen Werth von x die Größe xP_0 der Größe aP gleich zu achten ist, wenn man weiß, daß in Bezug auf Zwischengrößen, deren Einheiten P_1, P_2, P_3 sein mögen $b \cdot P = c \cdot P_1$, $d \cdot P_1 = e \cdot P_2$, $f \cdot P_2 = g \cdot P_3$ und $h \cdot P_3 = k \cdot P_0$ ist. Aus diesen Gleichungen und der angenommenen $x \cdot P_0 = a \cdot P$ folgen die Proportionen:

$$\left.\begin{array}{l} P_0 : P \;= a : x \\ P \;: P_1 = c : b \\ P_1 : P_2 = e : d \\ P_2 : P_3 = g : f \\ P_3 : P_0 = k : h \end{array}\right\}$$

Setzt man diese Proportionen nach §. 142, III. zusammen, so folgt:

$P_0 : P_0 = acegk : xbdfh$, d. h. $acegk = xbdfh$,

folglich $x = \frac{acegk}{bdfh}$.

Dasselbe Resultat erhält man praktisch so: Man schreibt die gleichen Producte links und rechts neben einen verticalen Strich so hin, daß jedes Product rechts dieselbe Benennung hat, wie das nächste links, und wieder das letzte rechts mit dem ersten links in der Benennung übereinstimmt (Kette).

$x \cdot P_0$	$a \cdot P$
$b \cdot P$	$c \cdot P_1$
$d \cdot P_1$	$e \cdot P_2$
$f \cdot P_2$	$g \cdot P_3$
$h \cdot P_3$	$k \cdot P_0$

Wie aus dem Vorhergehenden zu entnehmen, ist dann das Product aller Zahlen links, wenn man jede benannte Einheit fortläßt, dem Producte der Zahlen rechts, ebenfalls ohne Benennung, gleich. Man kann natürlich jede Zahl links gegen jede beliebige rechts heben und findet schließlich x, wenn man das Product aller Zahlen rechts durch das Product der bekannten Zahlen links dividirt. z. B.

1) Wie viel betragen $7\frac{1}{2}$ Friedrichsd'or in Gulden Rheinischer Währung, wenn das Gold gegen Preußisch Courant $13\frac{1}{3}$ % steht und der Gulden = $17\frac{1}{7}$ Sgr. ist?

Auflös.

x Gulden	$7\frac{1}{2}$ Frd'or.
20 Fr.	$113\frac{1}{3}$ Thlr. Pr.
1 Thlr.	30 Sgr.
$17\frac{1}{7}$ Sgr.	1 Gulden.

$x = 74\frac{3}{8}$ Gulden.

2) A kaufte 50 Schffl. Roggen, vertauschte aber 40 Schffl. desselben gegen 25 Schffl. Weizen und hierauf 20 Schffl. dieses Weizens gegen 40 Schffl. Hafer. Von diesem Hafer verkaufte er 30 Schffl. für 72 Fl. Rheinischer Währung. Wenn nun jeder Kauf und Tausch dem Werthe der Waare angemessen war und 7 Fl. Rh. Währung gleich 4 Thlr. Preuß. Cour. sind, wie viel kosteten dem A die 50 Schffl. Roggen in Preuß. Courant?

Auflös. Angenommen x Thlr., so hat man:

x Thlr.	50 Schffl. R.
40 Schffl. R.	25 Schffl. W.
20 Schffl. W.	40 Schffl. H.
30 Schffl. H.	72 Fl. Rh. W.
7 Fl.	4 Thlr.

Hieraus folgt x = 85 Thlr. 21 Sgr. 5 Pf.

§. 147.

Die Gesellschafts- oder Theilungs-Rechnung löst die Aufgabe: ein Ganzes nach gegebenem Verhältniß in Theile zu zerlegen oder aus Theilen zusammenzusetzen. Kennt man die Summe S der Zahlen a, b, c.... und ihr laufendes Verhältniß a:b:c:.... $= \alpha:\beta:\gamma:\ldots$, so kann man aus dieser Proportion nach §. 47. II. so viel neue Proportionen bilden, als Unbekannte a, b, c, ... sind, nämlich:

$$a + b + c + \ldots : \alpha + \beta + \gamma + \ldots = \begin{cases} a:\alpha \\ b:\beta \\ c:\gamma, \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Hieraus folgt, weil $a + b + c + \ldots = S$ ist,

$$a = \frac{S}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}\cdot\alpha;\quad b = \frac{S}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}\cdot\beta;$$

$$c = \frac{S}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}\cdot\gamma;\ \text{u. s. w.}$$

d. h. man findet die einzelnen Theile, in welche S zerlegt oder aus denen S zusammengesetzt werden soll, wenn man S durch die Summe der Verhältnißzahlen dividirt und diesen Quotienten mit jeder einzelnen Verhältnißzahl multiplicirt. z. B.

1) Drei Spieler A, B, C gewinnen in der Lotterie 300 Thlr. auf ein Loos, welches 24 Thlr. kostete, und zu dessen Ankauf A 6 Thlr., B 8 Thlr. und C 10 Thlr. gegeben hatte; wie viel erhält jeder vom Gewinn?

Auflös. 300 Thlr. sollen nach dem Verhältniß 3:4:5 getheilt werden; folglich erhält A $\frac{300}{3+4+5}\cdot 3$ Thlr. = 75 Thlr., B erhält $\frac{300}{12}\cdot 4$ Thlr. = 100 Thlr., C endlich $\frac{300}{12}\cdot 5$ Thlr. = 125 Thlr.

Häufig ist bei diesen Aufgaben das Verhältniß, nach welchem eine Größe getheilt werden soll, ein zusammengesetztes und aus der Aufgabe erst zu bilden, wie im nächsten Beispiele.

2) Für Fracht sind 40 Thlr. an drei Fuhrleute gezahlt worden.

A hat 8 Ctr. 20 Meilen gefahren,
B „ 16 „ 30 „ „
C „ 30 „ 10 „ „ ;

wie viel erhält jeder?

Auflös. A erhält x, B y und C z Thaler. Wäre die Meilenzahl immer dieselbe, so würde sich x:y:z = 8:16:30 verhalten;

hätte aber jeder Fuhrmann dieselbe Last gefahren, so verhielte sich $x:y:z = 20:30:10$; folglich verhält sich im Allgemeinen (§. 143. II.):

$$x:y:z = 8 \cdot 20 : 16 \cdot 30 : 30 \cdot 10 \quad \text{oder}$$
$$x:y:z = 8:24:15.$$

Dasselbe Verhältniß erhält man durch folgenden Schluß: Es ist bei vorliegender Aufgabe gleichviel, ob A 8 Ctr. 20 Meilen weit, oder $8 \cdot 20$ Ctr. 1 Meile weit fährt; eben so kann man annehmen B fährt eine Meile weit $16 \cdot 30$ Ctr. und C $30 \cdot 10$ Ctr. Die weitere Rechnung ergiebt: A erhält 6 Thaler 24 Sgr. 3 Pf., B 20 Thlr. 12 Sgr. 9 Pf. und C 12 Thlr. 23 Sgr.

3) Bei seiner Abreise zahlte A in einem Gasthofe incl. Trinkgelder 18 Thlr. 16 Sgr. 6 Pf. Er hatte sich die Trinkgelder so berechnet, daß er auf jeden Thaler, den er dem Wirthe bezahlte, dem Hausknecht 1 Sgr. 4 Pf. und der übrigen Dienerschaft 4 Sgr. gab. Wie viel hat von der obigen Summe der Wirth, der Hausknecht, die übrige Dienerschaft erhalten?

Auflös. 15 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf.; 21 Sgr.; 2 Thlr. 3 Sgr.

4) Es sollen 1540 Thlr. unter vier Gläubiger A, B, C und D nach Verhältniß ihrer Forderungen vertheilt werden. Nun verhält sich die Forderung des A zu der des B wie $4:5$, die des D zu der des C wie $5:2$, die des D zu der des B wie $4:3$; wie viel erhält jeder Gläubiger?

Auflös. A erhält 336 Thlr., B 420 Thlr., C 224 Thlr. und D 560 Thlr.

5) Zu einem Feuerwerkssatze braucht man 48 Pfd. einer Mischung von Salpeter, Schwefel und Kohle im Verhältniß $18:3:4$; wie viel muß man von jeder Materie nehmen?

Auflös. 34 Pfd. 16 Lth. 8 Quentch. Salpeter, 5 Pfd. 22 Lth. 8 Quentch. Schwefel, 7 Pfd. 20 Lth. 4 Quentch. Kohle.

Anmerkung. Auf einen Fall, der wenigstens mittelbar mit der Gesellschafts-Rechnung zusammenhängt und in praktischen Anwendungen häufig vorkommt, sei der Leser noch aufmerksam gemacht.

Wenn eine Größe S aus Theilen besteht, z. B. aus 4 Theilen A, B, C und D, und man das Verhältniß aller Theile mit Ausnahme eines Theils, etwa D, zu S kennt: wie verhält sich dann D zu S?

Auflös. Es mag sich verhalten:

$$A:S = a:n$$
$$B:S = b:n$$
$$C:S = c:n, \text{ so folgt:}$$
$$A+B+C:S = a+b+c:n, \text{ daher}$$
$$S-(A+B+C):S = n-(a+b+c):n \text{ oder}$$
$$D:S = n-(a+b+c):n.$$

Ist z. B. ein Dreieck S in 4 Theile A, B, C, D getheilt und verhält sich $A:S = 1:5$, $B:S = 2:9$, $C:S = 3:10$, so hat man:

$$A:S = 18:90$$
$$B:S = 20:90$$
$$C:S = 27:90, \text{ folglich}$$
$$D:S = 90 - 65:90 \text{ oder}$$
$$D:S = 25:90 = 5:18.$$

In dieser Form findet man das Verhältniß von D zu S bequemer, als wenn man A, B, C durch S ausdrückt und ihre Summe von S abzieht, wodurch dann natürlich auch $D = \frac{5}{18} S$ entsteht.

§. 148.

Die Alligations- oder Mischungs-Rechnung.

Die Güte (Qualität) einer Materie A ist dem Preise α der Einheit dieser Materie (z. B. eines Pfundes, Quartes, u. s. w.) proportional; daher ist die Qualität durch diesen Preis bestimmt. Mischt man nun beliebige Quantitäten von Materien, welche verschiedene Güte (also Preise) haben, unter einander, so kann man nach dem Preise fragen, welchen die Einheit der Mischung hat. Eine zweite Frage ist die: in welchem Verhältniß muß man solche Materien mischen, damit die Einheit der Mischung einen bestimmten Preis erhält. Die Alligations-Rechnung beantwortet diese Fragen. Bei den folgenden zwei Aufgaben setzen wir voraus, daß sowohl alle Quantitäten auf dieselbe Einheit (Pfund, Quart, u. s. w.) sich beziehen, als auch alle Preise (auf Thaler, Gulden, u. s. w.).

I. Von den Materien A, B, C, D, ... habe die Einheit resp. den Preis $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$. Nimmt man nun von der Materie A a Einheiten, von B, C, D, ... resp. b, c, d, ... Einheiten und mischt alle diese Quantitäten a, b, c, d, ... unter einander: welchen Preis x hat dann die Einheit der Mischung?

Auflös. Von der Materie A hat die Einheit den Preis α, folglich haben a Einheiten den Preis $a \cdot \alpha$, und weil dasselbe von den Quantitäten der andern Materien B, C, D, ... gilt, so hat die Mischung den Preis:

$$1)\quad a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma + d \cdot \delta + \ldots.$$

Die Mischung hat aber $a + b + c + d + \ldots.$ Einheiten, und weil die Einheit den Preis x hat, so ist der Preis der Mischung auch:

$$2)\quad (a + b + c + d + \ldots.) \cdot x.$$

Aus 1) und 2) folgt aber:

3) $(a+b+c+d+\ldots)\cdot x = a\cdot\alpha + b\cdot\beta + c\cdot\gamma + d\cdot\delta + \ldots$, und hieraus ergiebt sich:

$$x = \frac{a\cdot\alpha + b\cdot\beta + c\cdot\gamma + d\cdot\delta + \ldots}{a + b + c + d + \ldots}.$$

Die Gleichung 3) kann man auch benutzen, um a oder b u. s. w. zu finden, wenn der Mittelpreis x gegeben ist.

Beisp. 1. Zu einer Bowle werden 10 Flaschen Moselwein à 20 Sgr., 3 Flaschen Rheinwein à 1 Thlr. und 2 Flaschen Champagner à 2 Thlr. 10 Sgr. genommen; wie viel kostet ein Glas dieser Bowle, wenn die andern Bestandtheile außer Acht bleiben und jede Flasche zu 6 Glas gerechnet wird?

Auflös. Die Flasche: $\frac{43}{45}$ Thlr., das Glas: 4 Sgr. $9\frac{1}{3}$ Pf.

Beisp. 2. Man hat 6 Lth. 8löthiges Silber, 3 Lth. 10löthiges, 4 Lth. 12löthiges. Wie viel Lth. 16löthiges Silber muß man nehmen, wenn durch Schmelzen aller dieser Stücke 11löthiges Silber entstehen soll?

Auflös. Die Löthigkeit vertritt hier die Stelle des Preises (vergl. S. 215, Beisp. 34.). Braucht man x Lth. 16löthiges Silber, so ist

$$6\cdot 8 + 3\cdot 10 + 4\cdot 12 + x\cdot 16 = (6+3+4+x)\cdot 11;$$

und hieraus $x = 3\frac{2}{5}$ Lth.

Beisp. 3. Eine Frau mischt 5 Quart Milch à 1 Sgr. 6 Pf. unter 2 Quart Sahne à 6 Sgr. und gießt dann noch 8 Quart Wasser hinzu. Dies Gemisch verkauft sie als Milch und läßt sich das Quart mit 2 Sgr. bezahlen; um wie viel betrügt sie bei jedem Quart ihre Abnehmer? Antw. Um $8\frac{2}{5}$ Pf.

II. In welchem Verhältniß muß man zwei Materien A und B, von welchen dieselbe Einheit resp. den Preis α und β hat, mischen, wenn die Einheit der Mischung den Mittelpreis m haben soll? Es sei $\alpha > m > \beta$.

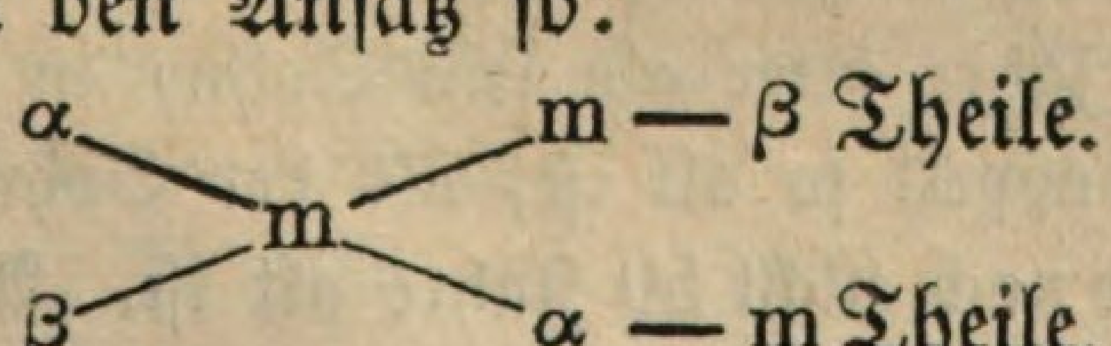
Auflös. Von A x Einheiten, von B y Einheiten, so ist

$$x\cdot\alpha + y\cdot\beta = (x+y)\cdot m;$$

folglich $x(\alpha - m) = y(m - \beta)$ oder

$$x : y = m - \beta : \alpha - m;$$ d. h.

es verhält sich die von der bessern Materie zu nehmende Menge zu der, welche man von der schlechteren nehmen muß, wie die Differenz des mittleren und schlechteren Preises zur Differenz des besseren und mittleren. Gewöhnlich macht man den Ansatz so:



z. B. Man hat 2 Sorten Mehl; von der einen kostet die Metze 10 Sgr., von der anderen 4 Sgr. In welchem Verhältniß muß man beide mischen, wenn die Metze der Mischung 8 Sgr. kosten soll.

Auflös. 10 ⟍ ⟋ 4 Theile des besseren Mehles
8
4 ⟋ ⟍ 2 Theile des schlechteren.

Das Verhältniß ist also 2 : 1.

Ist noch die Quantität der Mischung gegeben, so ist der Rest der Rechnung durch die Gesellschafts-Rechnung auszuführen. Sollen z. B. in vorstehender Aufgabe 24 Metzen Mehl durch die Mischung erzeugt werden, so muß man $\frac{24}{2+1} \cdot 2 = 16$ Metzen des besseren und 8 Metzen des schlechteren Mehles nehmen.

Beispiel 2. Man braucht 3 Lth. 12karätiges Gold und hat 10karätiges und 18karätiges; wie viel muß man von jeder Sorte nehmen? Antw. $2\frac{1}{4}$ Lth. 10kar. und $\frac{3}{4}$ Lth. 18kar. Gold.

Beispiel 3. Aus Spiritus zu 80 pCt. Alkohol sollen durch Zugießen von Wasser 300 Quart Spiritus zu 55 pCt. erzeugt werden; wie viel Wasser und Spiritus ist zu mischen?

Auflös. $93\frac{3}{4}$ Quart Wasser und $206\frac{1}{4}$ Quart Spiritus.

§. 149.

Uebungsbeispiele zum ersten Kapitel der Algebra.

1) Dividirt man $2a^3x - a^4 + a^2b^2 - 2abx^2 + a^2bx - b^3x$ durch $a^2 - bx$, so ist der Quotient $= (a - b)^2$; wie groß ist x?

Auflös. $x = a - b$.

2) Wenn man weiß, daß in der Gleichung

$$x^2 + (a - b)\,x = 2a^2 + b^2 + 3ab$$

ein Glied, welches x als Factor enthielt, ausgelassen worden und $x = a + b$ eine Wurzel der Gleichung ist: wie heißt das ausgelassene Glied?

Auflös. Auf der linken Seite fehlt $+ bx$.

3) Giebt es eine zweiziffrige Zahl mit den folgenden Eigenschaften? Dividirt man sie durch die Summe ihrer Ziffern, so erhält man 4 zum Quotienten; vertauscht man aber ihre Ziffern mit einander und dividirt jetzt durch die Summe der Ziffern, so erhält man 7.

Auflös. Die beiden Gleichungen $\frac{x + 10y}{x + y} = 4$ und $\frac{10x + y}{x + y} = 7$ sind von einander nicht unabhängig; beide reduciren sich auf $x = 2y$; folglich hat jede zweiziffrige Zahl die angegebenen Eigenschaften, wenn die letzte Ziffer das Doppelte der ersten ist, also 12, 24, 36, 48.

4) A ist heut 25 Jahre älter als sein Sohn; in welchem Falle kann er erleben, daß er gerade doppelt so alt ist, als der Sohn?

Auflös. Wenn er noch nicht 50 Jahre alt ist. Ansatz: $x = 2(x - 25)$.

5) Wie viel Einwohner wird eine Stadt in 20 Jahren haben, wenn sie heut 30,000 hat und im Durchschnitt jährlich auf 160 Menschen 6 Geburten und 9 Sterbefälle treffen?

Auflös. $x = \left(1 - \frac{\frac{15}{8}}{100}\right)^{20} \cdot 30000 = 20545.$

6) Jemand hat drei verschiedene Mischungen aus Gold, Silber und Kupfer. Die erste enthält 1 pCt. Gold und 8 pCt. Silber, die zweite 2 pCt. Gold und 20 pCt. Silber, die dritte 3 pCt. Gold und 40 pCt. Silber; der Rest ist Kupfer. Er will 30 Pfd. einer neuen Mischung haben von 2 pCt. Gold und 24 pCt. Silber, als Rest Kupfer; wie viel muß er von jeder oben angegebenen Mischung nehmen?

Auflös. Von der ersten x Pfd., von der zweiten y Pfd., von der dritten z Pfd., so hat man zur besseren Uebersicht:

	x Pfd.	y Pfd.	z Pfd.	30 Pfd.
Gold:	1 pCt.	2 pCt.	3 pCt.	2 pCt.
Silber:	8 pCt.	20 pCt.	40 pCt.	24 pCt.
	der Rest Kupfer.			

Hieraus: 1) $x + y + z = 30$
2) $x + 2y + 3z = 60$
3) $8x + 20y + 40z = 720.$

Man erhält $x = 15$, $y = 0$, $z = 15$.

7) Ein Feuerwerkssatz besteht aus 4 Theilen Salpeter und 3 Theilen Schwefel, ein anderer aus 5 Theilen Salpeter und 2 Theilen Schwefel; wie viel nimmt man von jedem Satze, wenn die Mischung der genommenen Quantitäten 2 Pfd. Salpeter und 1 Pfd. Schwefel enthalten soll?

Auflös. Vom ersten Satze x Pfd., vom zweiten y Pfd., so ist (§. 147.): $\frac{4}{7}x + \frac{5}{7}y = 2$ und $x + y = 3$ (oder auch $\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y = 1$); folglich $x = 1$, $y = 2$.

8) Man hat 3 Feuerwerkssätze. Es besteht:

der 1te aus 30 Theilen Salpeter, 7 Theilen Schwefel, 9 Theilen Kohle.
» 2te » 24 » » 5 » » 7 » »
» 3te » 36 » » 10 » » 2 » »

Aus diesen drei Sätzen sollen 39 Pfd. eines neuen Satzes so gemischt werden, daß dieser 26 Pfd. Salpeter und 6 Pfd. Schwefel enthält. Wie viel nimmt man von jedem Satze?

Auflös. Resp. 23 Pfd., 12 Pfd., 4 Pfd.

9) Ein Feuerwerkssatz enthält Salpeter, Schwefel und Kohle, und zwar 6 mal so viel Salpeter und $\frac{2}{3}$ mal so viel Schwefel als Kohle. Ein zweiter Satz besteht nur aus Salpeter und Schwefel und enthält 5 mal so viel Salpeter als Schwefel. Aus diesen zwei Sätzen und aus reiner Kohle soll nun ein neuer Satz von 250 Pfd. gemischt werden, welcher 191 Pfd. Salpeter und 27 Pfd. Schwefel enthalten soll. Wie viel Pfd. muß man von jedem Satze und wie viel reine Kohle nehmen?

Auflös. 161 Pfd., 78 Pfd. und 11 Pfd.

10) Man hat 3 Stücke Metall. Das erste besteht aus Gold und Silber, enthält 8 pCt. Gold und wiegt 5 Lth.; das zweite besteht aus Gold, Silber und Kupfer, enthält 2 pCt. Gold und 18 pCt. Silber und wiegt 25 Lth.; das dritte besteht aus Silber und Kupfer, enthält 5 pCt. Silber und wiegt 1 Pfd. Durch Schmelzen werden diese 3 Stücke zu einer Composition verbunden; wie viel Procent Gold, Silber und Kupfer enthält letztere?

Auflös. $1\frac{1}{2}$ pCt. Gold, $17\frac{2}{3}$ pCt. Silber, $80\frac{5}{6}$ pCt. Kupfer.

11) Eine Summe Geld wird unter 4 Personen A, B, C, D vertheilt. A erhält 1476 Thlr., B 75 pCt. des Antheils von A, und C und D erhalten zusammen so viel als B, während sich ihre Antheile wie 5 : 4 verhalten. Wie viel Procent der vertheilten Summe hat jeder Einzelne bekommen?

Auflös. In der angegebenen Ordnung: 40 pCt., 30 pCt., $16\frac{2}{3}$ pCt., $13\frac{1}{3}$ pCt.

12) A und B vollenden eine Arbeit in 4 Tagen, zu welcher A und C $2\frac{2}{5}$ Tage, B und C aber 3 Tage nöthig gehabt hätten. In welcher Zeit wird hiernach jeder Einzelne die Arbeit ausführen, und in welcher Zeit werden es alle drei zusammen?

Antw. A in 6, B in 12, C in 4, alle drei in 2 Tagen.

13) Jemand ist verpflichtet, 4000 Thlr. nach 18 Monaten zu zahlen. Er zahlt 1000 Thlr. sogleich, 1500 Thlr. nach 8 Monaten, 500 Thlr. nach 12 Monaten; wann wird er den Rest zahlen müssen? (Einfache Zinsen.)

Antw. Nach $4\frac{1}{2}$ Jahr.

14) $2 - \sqrt[3]{1+x} = \sqrt[3]{1-x}$ (§. 135. Beisp. 4).

Auflös. $x = 0$.

15) Man hat zwei um 10 Thlr. verschiedene Summen Geldes. Von der kleineren nimmt man 12 Thlr. 15 Sgr. fort und legt sie der größeren zu; dann nimmt man von der vergrößerten Summe den dritten Theil fort und legt ihn der verkleinerten Summe zu. Wenn jetzt beide Summen gleich sind, wie groß war jede Anfangs? Antw. 30 Thlr. und 40 Thlr.

16) Ein Tabackshändler erhält aus Amerika 25 Tausend Stück Cigarren in kleinen Kisten, zusammen im Gewicht von $4\frac{1}{4}$ Ctr. Brutto, und 20 Körbe Rollen-Varinas, à 120 Pfd. Brutto. Die Steuer beträgt pro Centner von Cigarren 20 Thlr., vom Rollen-Taback 11 Thlr. Wenn nun das Steueramt beim Rollen-Taback 10 pCt. Tara und bei Cigarren in kleinen Kisten 40 pCt. Tara rechnet, wie viel Eingangs-Steuer hat der Händler zu zahlen?

Auflös. 288 Thlr. 18 Sgr.

17) Ein Pulverfabrikant will ein Pulver anfertigen lassen, welches so aus Salpeter, Kohle und Schwefel zusammengesetzt ist, daß es 16 pCt. Kohle und 12 pCt. Schwefel enthält. Auf dieses Pulver sind drei Bestellungen eingegangen, und zwar die eine zu $1\frac{1}{2}$ Ctr, die zweite zu 2 Ctr. $66\frac{2}{3}$ Pfd., die dritte zu 3 Ctr. 83 Pfd. 10 Lth. Wie viel Salpeter, Kohle und Schwefel braucht der Fabrikant zur Herstellung dieser ganzen Quantität Pulver?

Auflös. 5 Ctr. 76 Pfd. Salpeter, 1 Ctr. 28 Pfd. Kohle und 96 Pfd. Schwefel.

Zweites Kapitel.

Die quadratischen Gleichungen. Die imaginären Wurzeln.

§. 150.

Auflösung der reinen quadratischen Gleichung.

Jede reine quadratische Gleichung läßt sich auf die Form bringen:

$$x^2 = a;$$

ihre Auflösung kann nach §. 137. 1. erfolgen. Bringt man a auf die linke Seite und setzt $a = (\sqrt{a})^2$, so entsteht:

$$x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$(x - \sqrt{a}) \cdot (x + \sqrt{a}) = 0.$$

Ein Product wird Null, wenn ein Factor Null ist; folglich hat die Gleichung $x^2 = a$ zwei Wurzeln:

$$x = +\sqrt{a} \quad \text{und} \quad x = -\sqrt{a}.$$

Beide Wurzeln erhält man bequemer, wenn man aus $x^2 = a$ folgert: $x = \sqrt{a}$, und unter $\sqrt{a}$, wie von jetzt an bei der Auflösung jeder Gleichung geschehen soll, nicht die absolute, sondern die reelle Wurzel versteht, d. h. jede reelle Zahl, welche quadrirt, a giebt. Wir sagen also: aus $x^2 = a$ folgt $x = \pm\sqrt{a}$.

Wir haben hierbei a positiv vorausgesetzt; nehmen wir jetzt die Gleichung $x^2 = -a$, a absolut gedacht, so hat sie gar keine Wurzel, so lange nur reelle Zahlen in Betracht kommen. Läßt man aber imaginäre Wurzeln zu (§. 54.) und versteht unter $\sqrt{-a}$ die Zahl, welche quadrirt, $-a$ giebt, so folgt aus $x^2 = -a$ ganz wie oben: $x^2 - (\sqrt{-a})^2 = 0$ oder $(x - \sqrt{-a})(x + \sqrt{-a}) = 0$; folglich $x = +\sqrt{-a}$ und auch $x = -\sqrt{-a}$. Wir folgern also fortan unmittelbar: aus $x^2 = -a$ folgt $x = \pm\sqrt{-a}$.

Beispiel 1. $\sqrt{x + \sqrt{5}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5} + x} + \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5} - x}$.

Auflös. Quadrirt, folgt $x = \sqrt{5 - 4x^2}$ und $x = \pm 1$. Macht man mit diesen Wurzeln die Probe (vergl. Seite 211.), so findet man, daß bei den Vorzeichen, welche die Aufgabe zeigt, nur $+1$ eine Wurzel ist. Hingegen ergiebt sich, daß -1 eine Wurzel der Gleichung $\sqrt{x + \sqrt{5}} = -\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5} + x} + \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5} - x}$ ist, und daß die Gleichung $\sqrt{x + \sqrt{5}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5} + x} - \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5} - x}$ gar keine Auflösung gestattet.

Beispiel 2. $\frac{x+b}{x-a} - \frac{x-a}{2x-2b} = \frac{2ax-3b^2}{2x^2-2(a+b)x+2ab}$.

Auflös. $x = \pm\sqrt{a^2-b^2}$.

Beispiel 3. $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-4} = \sqrt{\frac{1}{2}x+1} + \sqrt{\frac{1}{2}x-1}$.

Auflös. $x = \pm\sqrt{5}$. (Bei den Vorzeichen der Aufgabe nur $+\sqrt{5}$.)

Beispiel 4. $\frac{a}{9a+3x} + \frac{a}{6a-2x} - \frac{9a^2+ax}{54a^2-6x^2} = \frac{1}{5}$.

Auflös. $x = \pm 2a$.

Beispiel 5. $1 + 4\sqrt{4x+1} = \frac{\sqrt{(4x+1)^3}-2}{x}$.

Auflös. $x + 4x\sqrt{4x+1} = (4x+1)\sqrt{4x+1} - 2$;
$x + 2 = \sqrt{4x+1}$, u. s. w.; $x = \pm\sqrt{-3}$. (Die Probe erst nach §. 156.)

§. 151.

Die imaginäre Wurzel.

Um die reine quadratische Gleichung allgemein auflösen zu können, haben wir die imaginäre Quadratwurzel als neue Zahlenform einführen müssen. Wir werden sie bei der vollständigen quadratischen Gleichung und bei den höheren Gleichungen wiederfinden. Allerdings kommt es bei der Auflösung einer Gleichung in der Regel nur darauf an, ihre reellen Wurzeln zu finden; daher könnte man meinen, daß die bloße Einführung der imaginären Wurzeln das theoretische Bedürfniß befriedige und eine weitere Betrachtung derselben und das praktische Rechnen mit ihnen unnöthig sei. Dem ist aber nicht so; und wenn auch die große Wichtigkeit der imaginären Zahlen jetzt noch nicht erkannt werden kann, so wird zur Begründung der Nothwendigkeit des praktischen Rechnens mit ihnen doch die Bemerkung genügen, daß die Wurzeln höherer, namentlich cubischer Gleichungen oft in imaginärer Form erscheinen, während sie in der That reell sind. In einem solchen Falle ist also ihre Umformung, d. h. das Rechnen mit ihnen, ein praktisches Bedürfniß.

Imaginär ist jede Wurzel mit geradem Exponenten und negativem Radicanden (§. 54.), also jede Wurzel von der Form $\sqrt[2n]{-a}$, und sie bezeichnet die (nicht reelle) Zahl, welche mit 2n potenzirt, $-a$ giebt; daher das Grundgesetz:

$$\left(\sqrt[2n]{-a}\right)^{2n} = -a.$$

Später wird gezeigt werden, wie man jede imaginäre Wurzel auf die imaginäre Quadratwurzel zurückführen kann; jetzt wollen

wir nur von dieser sprechen. Die Erklärung von $\sqrt{-a}$ liegt in der Gleichung $(\sqrt{-a})^2 = -a$. Im vorigen §. haben wir gesehen, daß zwei Ausdrücke quadrirt, $-a$ geben, nämlich $+\sqrt{-a}$ und $-\sqrt{-a}$; folglich hat $\sqrt{-a}$ diese zwei Werthe; wir dehnen daher den Begriff „positiv und negativ" auch auf imaginäre Zahlen aus und sagen, eine imaginäre Zahl kann positiv imaginär und negativ imaginär sein. Mehr als diese zwei Werthe kann $\sqrt{-a}$ nicht haben; denn wäre $x = \sqrt{-a}$ und auch $y = \sqrt{-a}$, so folgt $x^2 = -a$ und $y^2 = -a$, also, wenn man subtrahirt: $(x-y)(x+y) = 0$, d. h. x und y sind nur entweder gleich, oder gerade entgegengesetzt.

Die einfachste imaginäre Wurzel ist $\sqrt{-1}$, und auf diese läßt sich zunächst jede imaginäre Quadratwurzel zurückführen:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a \cdot (-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1};$$

z. B. $\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1}$, $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$, u. s. w.

Auch $\sqrt{-1}$ hat die zwei Werthe $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$; beide geben quadrirt, -1.

Die positiv imaginäre Wurzel $+\sqrt{-1}$ werden wir fortan immer durch den Buchstaben i bezeichnen und die imaginäre Einheit nennen; daher ist:

$$i = +\sqrt{-1}, \quad -i = -\sqrt{-1}, \quad \sqrt{-a} = \pm i\sqrt{a}.$$

Zur Vermeidung jeder Undeutlichkeit wird festgesetzt, daß bei jeder imaginären Quadratwurzel durch das Vorzeichen markirt werden soll, ob der positiv, oder der negativ imaginäre Werth der Wurzel gemeint ist. Kein Vorzeichen gilt als +. z. B.

$$\sqrt{-4} = +2i, \quad -\sqrt{-9} = -3i,$$

$$+\sqrt{-8} = +2i\sqrt{2}, \quad \pm\sqrt{-12} = \pm 2i\sqrt{3}.$$

Die Gesetze über Wurzeln gelten auch für imaginäre Quadratwurzeln, so weit sie mit dem Grundgesetz $(\pm\sqrt{-a})^2 = -a$ in Uebereinstimmung sind. Die Prüfung, welche man hierbei vorzunehmen hat, erstreckt sich aber immer nur auf das Vorzeichen des Resultats. z. B. $(\sqrt{-3})^2 = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{+9}$. Nun ist $\sqrt{+9}$ reell und kann $+3$ und -3 sein. Hier gilt nur -3, weil $+9$ aus zwei negativen Factoren entstand. Ferner $(+\sqrt{-2})(-\sqrt{-3}) = -\sqrt{+6}$; auch hier entstand $+6$ aus zwei negativen Factoren, folglich hat hier $\sqrt{+6}$ den Werth $-\sqrt{6}$; daher ist:

$$(+\sqrt{-2})(-\sqrt{-3}) = -(-\sqrt{6}) = +\sqrt{6}.$$

Alle diese besonderen Untersuchungen kann man aber vermeiden, wenn man folgende Regel befolgt: Man bringe jede imaginäre Quadratwurzel $\sqrt{-a}$ auf die Form $i\sqrt{a}$, führe jetzt die Rechnung aus, indem man i als Buchstaben behandelt, und setze zuletzt statt i und der sich etwa ergebenden Potenzen von i die Werthe ein.

Die Potenzen von i sind:

$$i = +\sqrt{-1}$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -i = -\sqrt{-1}$$
$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = +1.$$

Weil nun $i^4 = +1$ ist, so werden i^5, i^6, i^7, i^8 resp. gleich i, i^2, i^3, i^4; dasselbe gilt dann von den nächsten vier Potenzen i^9, i^{10}, i^{11}, i^{12}, u. s. w. immer für die vier folgenden.

Bezeichnet sonach a die Null und alle ganzen positiven Zahlen 1, 2, 3, ..., so ist:

$$i^{4a} = +1; \quad i^{4a+1} = +i = +\sqrt{-1};$$
$$i^{4a+2} = -1; \quad i^{4a+3} = -i = -\sqrt{-1};$$

d. h. alle geraden Potenzen von i sind reell, und zwar $+1$, oder -1, je nachdem der Exponent durch 4 theilbar ist, oder nicht; alle ungeraden Potenzen von i sind imaginär, und zwar $+i$, oder $-i$, je nachdem der Exponent um 1 größer, oder um 1 kleiner ist, als eine durch 4 theilbare Zahl.

Beispiele. $(+\sqrt{-1})^{11} = -\sqrt{-1}$; $(+\sqrt{-1})^{30} = -1$; $(-\sqrt{-1})^{20} = +1$; $(-\sqrt{-1})^{19} = +\sqrt{-1}$; $i^{41} = i$; $(\pm i)^{100} = +1$.
$\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-8} = i\sqrt{6} \cdot i\sqrt{8} = i^2 \cdot 4\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$;
$(+\sqrt{-2})(-\sqrt{-2})(+\sqrt{-12}) = i\sqrt{2} \cdot (-i\sqrt{2}) 2i\sqrt{3} = -4i^3\sqrt{3} = +4i\sqrt{3} = 4\sqrt{-3}$; $\dfrac{3\sqrt{-8}}{-2\sqrt{-3}} = \dfrac{6i\sqrt{2}}{-2i\sqrt{3}} = -3\sqrt{\tfrac{2}{3}} = -\sqrt{6}$;
$(-\sqrt{-5})(-\sqrt{-5}) = -5$; $(-\sqrt{-5})(+\sqrt{-5}) = +5$.

§. 152.

Die Auflösung der vollständigen quadratischen Gleichung.

Die vollständige quadratische Gleichung hat, geordnet, folgende Form:

$$x^2 + ax + b = 0;$$

um sie aufzulösen, kann man sie so umformen, daß die Unbekannte x in ihr nur einmal vorkommt. Bringt man b auf die andere Seite:

$$x^2 + ax = -b,$$

so läßt sich die linke Seite durch Addition eines Quadrats zu einem vollständigen Quadrat von der Form $(x+p)^2$ ergänzen. Es ist $(x+p)^2 = x^2 + 2px + p^2$, und die beiden ersten Glieder dieser Summe stimmen mit der linken Seite obiger Gleichung vollkommen überein, wenn man $2p = a$, also $p = \frac{a}{2}$ setzt. Hieraus folgt aber, daß diese linke Seite in $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$ übergeht, wenn man $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, also das Quadrat des halben Factors von x, zu ihr addirt; natürlich muß man dasselbe Quadrat auch zur rechten Seite addiren und erhält dann:

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b.$$

Diese Gleichung enthält x nur einmal und ist nach §. 134. aufzulösen; man würde zunächst den Exponenten von $x+\frac{a}{2}$ und dann $\frac{a}{2}$ auf die andere Seite bringen. Weil die Gleichung aber, wenn man $x+\frac{a}{2}$ als die Unbekannte ansieht, eine reine quadratische ist, so erhält man für $x+\frac{a}{2}$ zwei Werthe: $+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ und $-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$; daher ergeben sich auch für x zwei Werthe.

Die Auflösung ist also, übersichtlich zusammengestellt, folgende:

$$x^2 + ax + b = 0$$

Auflösung.

$$x^2 + 2\cdot\frac{a}{2}\cdot x = -b$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ addirt:}$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$$

$$x+\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Beispiel. $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{4} = 0.$

Auflösung.

$$x^2 - 2\cdot\frac{5}{6}x = -\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}, \text{ addirt:}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{16}{36}$$

$$x - \frac{5}{6} = \pm\frac{4}{6}$$

$$x = \frac{5}{6} \pm \frac{4}{6} = \begin{cases} \frac{3}{2} \text{ oder} \\ \frac{1}{6} \end{cases}$$

Anstatt aber in jedem besonderen Falle die Auflösung so vollständig, wie bei diesem Beispiele, durchzuführen, ist es bequemer, nachdem die Gleichung geordnet, also auf die Form

$$x^2 + ax + b = 0$$

gebracht ist, ihre Wurzeln aus der Formel

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

unmittelbar zu entnehmen. Diese Formel sagt: Aus der geordneten quadratischen Gleichung ergiebt sich x gleich dem halben entgegengesetzten Factor des zweiten Gliedes ± der Quadratwurzel aus dem Quadrat dieses halben Factors + dem entgegengesetzten dritten Gliede. z. B.

1) $x^2 + 8x + 12 = 0;\ x = -4 \pm\sqrt{16-12} = \begin{cases} -2. \\ -6. \end{cases}$

2) $x^2 - 3x + 2 = 0;\ x = +\frac{3}{2} \pm\sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \begin{cases} +2. \\ +1. \end{cases}$

3) $x^2 + 8x - 20 = 0;\ x = -4 \pm\sqrt{16+20} = \begin{cases} +2. \\ -10. \end{cases}$

4) $x^2 - 4x - 21 = 0;\ x = +2 \pm\sqrt{4+21} = \begin{cases} +7. \\ -3. \end{cases}$

5) $x^2 - 6x + 7 = 0;\ x = +3 \pm\sqrt{9-7} = 3 \pm\sqrt{2}.$

6) $x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0;\ x = -\frac{1}{12} \pm\sqrt{\frac{1}{144} + \frac{1}{3}} = \begin{cases} +\frac{1}{2}. \\ -\frac{2}{3}. \end{cases}$

7) $x^2 - 2x + 2 = 0;\ x = +1 \pm\sqrt{1-2} = 1 \pm i.$

8) $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{11}{16} = 0;\ x = +\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{-2}.$

Ueber die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ ist für den Fall, daß a und b reelle Zahlen sind, noch Folgendes zu bemerken:

Es sind immer beide Wurzeln reell, oder beide sind imaginär.

I. Reell sind beide Wurzeln, wenn $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$ positiv oder Null ist, also immer, wenn b negativ ist, dann auch, wenn b positiv, aber $\overline{\overline{<}} \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ist. Ist $b = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, so hat die Gleichung zwei gleiche Wurzeln $\left(-\frac{a}{2} \pm 0\right)$, und ihre linke Seite ist dann ein vollständiges Quadrat, weil $x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$ ist. Für $b = 0$ erhält man $x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ -a \end{matrix}\right\}$; die Auflösung geschieht in diesem Falle einfacher durch Verwandlung der linken Seite in das Product $x\,(x + a)$.

Sind beide Wurzeln reell, so kann man ferner aus den Vorzeichen von a und b auf die Vorzeichen der Wurzeln schließen.

1) Sind a und b positiv, so sind beide Wurzeln negativ, weil eine Summe positiver Summanden überhaupt nicht gleich Null sein kann.

2) Ist a negativ und b positiv, so sind beide Wurzeln positiv; denn für jeden negativen Werth von x würden alle drei Summanden der linken Seite positiv werden, ihre Summe könnte also nicht Null sein.

3) Ist a beliebig positiv oder negativ, aber b negativ, so ist die eine Wurzel positiv, die andere negativ; denn in diesem Falle ist in der Formel für x der absolute Werth des zweiten Summanden größer als der des ersten; daher überwiegt bei der algebraischen Addition das Vorzeichen des zweiten Summanden, und weil dieses sowohl +, als auch − ist, so wird auch die eine Wurzel der Gleichung positiv, die andere negativ. — Auch das in 1) und 2) Gesagte kann man aus der Formel für x entnehmen, wenn man urtheilt, daß bei einem positiven Werthe von b der absolute Werth des zweiten Summanden kleiner ist, als der des ersten.

Stellt man das Gefundene zusammen, so hat man, wenn a und b absolut genommen werden, vier Fälle:

$x^2 + ax + b = 0$, beide Wurzeln sind negativ;
$x^2 - ax + b = 0$, beide Wurzeln sind positiv;

$x^2+ax-b=0$, die eine Wurzel ist positiv, die andere negativ;
$x^2-ax-b=0$, die eine Wurzel ist positiv, die andere negativ.

Hieraus ergiebt sich ein praktisches (auch für höhere Gleichungen gültiges) Gesetz, durch welches man aus der Folge der Vorzeichen der drei Glieder auf die Vorzeichen der Wurzeln schließen kann. Jede Folge gleicher Vorzeichen in zwei auf einander folgenden Gliedern zeigt eine negative, jeder Wechsel in den Vorzeichen eine positive Wurzel an.

II. Imaginär sind beide Wurzeln, wenn $\left(\frac{a}{2}\right)^2-b$ negativ, also b positiv und größer als $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ ist. Führt man in diesem Falle i ein, so folgt

$$x=-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{-\left[b-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]}$$
$$=-\frac{a}{2}\pm i\sqrt{b-\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Jetzt sind $-\frac{a}{2}$ und $\sqrt{b-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$ reell, und bezeichnet man diese Zahlen resp. mit p und q, so haben die Wurzeln der Gleichung die Form $p\pm q\cdot i$. Ist also $p+qi$ eine Wurzel einer quadratischen Gleichung mit reellen Coefficienten (a und b), so ist immer $p-qi$ die andere.

Anmerkung 1. Sind in der Gleichung $x^2+ax+b=0$ die gegebenen Zahlen a und b rational, so sind immer beide Wurzeln der Gleichung rational, oder beide sind irrational. Diese Eigenschaft der quadratischen Gleichung sei der nachfolgenden Bemerkung vorausgeschickt.

Hat man einen Ausdruck, der einen Buchstaben a enthält, z. B. $\frac{2a+1}{a+1}$, und setzt man für a eine bestimmte Zahl, etwa 2, so geht der Ausdruck auch in eine bestimmte Zahl $\frac{5}{3}$ über. Man kann nun fragen, ob eine andere bestimmte Zahl, statt a gesetzt, auch den Ausdruck zu $\frac{5}{3}$ machen kann. Dies ist nicht der Fall; denn wäre x eine solche Zahl, so müßte $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{5}{3}$ sein, und weil diese Gleichung (geordnet) vom ersten Grade ist, so kann sie nur eine Wurzel haben, und da $x=2$ eine solche sein muß, so kann es keine zweite geben.

Es sei aber der Ausdruck $\frac{2a^2+1}{a+1}$ gegeben. Er geht für $x = 2$ in den Werth 3 über, und untersucht man hier, ob eine andere Zahl, für a gesetzt, den Ausdruck auch zu 3 macht, löst man also die Gleichung $\frac{2x^2+1}{x+1} = 3$ auf, so findet man, daß es allerdings noch eine solche Zahl giebt; denn diese Gleichung wird eine quadratische; sie hat also zwei Wurzeln, von denen $x = 2$ die eine ist, und weil diese rational ist, so muß die andere auch rational sein. Ordnet man die vorstehende Gleichung, so erhält man

$$x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0;$$

aus ihr folgt $x = 2$ und $x = -\frac{1}{2}$.

Um aber die vorstehenden Fragen allgemein, also in Buchstaben zu beantworten, kann man sie in einfachster Form so stellen: „Für welche Werthe von a bleibt $\frac{2a+1}{a+1}$ oder $\frac{2a^2+1}{a+1}$ unverändert?" Zur Beantwortung schreibt man x statt a und setzt den neuen Ausdruck dem alten gleich. Entsteht so eine einfache Gleichung, so bleibt der Ausdruck nur unverändert, wenn man a unverändert läßt; ist aber die Gleichung eine quadratische, so giebt es noch einen anderen Werth, der für a gesetzt, den Ausdruck unverändert läßt, und sind die Zahlen des Ausdrucks rational, so muß dieser zweite Werth ebenfalls rational sein.

Wir müssen also sagen: $\frac{2a+1}{a+1}$ bleibt nur unverändert, wenn man a unverändert läßt. Was aber den zweiten Ausdruck betrifft, so folgt aus der Gleichung $\frac{2x^2+1}{x+1} = \frac{2a^2+1}{a+1}$, wenn man sie ordnet:

$$x^2 - \frac{2a^2+1}{2(a+1)}x - \frac{2a^2-a}{2(a+1)} = 0,$$

und diese Gleichung muß zwei rationale Wurzeln haben, und a muß die eine sein. Es entsteht:

$$x = \frac{2a^2+1}{4(a+1)} \pm \frac{2a^2+4a-1}{4(a+1)} \text{ oder}$$

$$x = a \text{ und } x = -\frac{2a-1}{2(a+1)}.$$

Der Ausdruck $\frac{2a^2+1}{a+1}$ bleibt also nicht nur unverändert, wenn man

a unverändert läßt, sondern auch, wenn man $-\frac{2a-1}{2(a+1)}$ statt a setzt. — Man hätte übrigens die geordnete quadratische Gleichung nicht aufzulösen brauchen, weil man eine Wurzel dieser Gleichung bereits kennt ($x = a$); daher ist nach §. 88. Anmerk. die linke Seite durch $x - a$ theilbar, und man gelangt, wenn man die Division vollzieht, zu einer einfachen Gleichung. Ein noch einfacheres Mittel, die zweite Wurzel zu finden, wenn man die eine kennt, folgt später aus §. 157. Anmerk.

Führt der gegebene Ausdruck, welcher a enthält, zu einer cubischen Gleichung, so ist auch diese aufzulösen, weil ihre linke Seite, wenn die Gleichung geordnet ist, durch $x - a$ theilbar ist; man kommt dann auf eine quadratische Gleichung, so daß also in diesem Falle der gegebene Ausdruck, außer für a selbst, noch für zwei andere Werthe von a unverändert bleibt. Die Anzahl dieser Werthe steigt überhaupt mit dem Grade der Gleichung.

Die Untersuchung, für welche Werthe eines Buchstaben ein Ausdruck, der diesen Buchstaben enthält, unverändert bleibt, findet vielfach eine fruchtbare Anwendung und führt namentlich in der Analysis zu einer elementaren Behandlung der Maxima und Minima.

Beispiel 1. Für welche Werthe von a bleibt $a^2 - 2a + 3$ unverändert?

Auflös. $x^2 - 2x + 3 = a^2 - 2a + 3$

$x^2 - a^2 - 2(x - a) = 0$; durch $x - a$ gehoben:

$x + a - 2 = 0$, folglich $x = 2 - a$.

Der Ausdruck bleibt also unverändert, wenn man a unverändert läßt, und auch, wenn man $2 - a$ statt a setzt.

Beispiel 2. Für welche Werthe von a bleibt $\frac{1+a}{\sqrt{a}}$ unverändert?

Antw. Wenn man a unverändert läßt, oder auch, wenn man $\frac{1}{a}$ statt a setzt.

Beispiel 3. Für welche Werthe von a bleibt $\frac{1-a}{\sqrt{a}}$ unverändert?

Antw. Nur, wenn man a unverändert läßt. — Man findet zwar $x = \frac{1}{a}$, überzeugt sich aber durch die Probe, daß der Ausdruck, wenn man $\frac{1}{a}$ statt a setzt, in den entgegengesetzten Ausdruck übergeht.

Beispiel 4. Für welchen Werth von a bleibt $\frac{2+6a-3a^2}{1+3a}$ unverändert?

Antw. Wenn man a unverändert läßt, oder $-\frac{a}{1+3}$ statt a setzt.

Beispiel 5. Für welchen Werth von x bleibt $ax^2 + bx + c$ unverändert?

Antw. Wenn man x unverändert läßt, oder $-\frac{b}{a} - x$ statt x setzt.

Beispiel 6. Eine Wurzel der Gleichung $x^3 - 13x + 12 = 0$ sei bekannt, nämlich $x = 1$; man soll die andern finden.

Auflös. Wir beantworten zunächst die Frage: für welche Werthe von x bleibt $x^3 - 13x + 12$ unverändert? Bezeichnet z solchen Werth, so soll

$$z^3 - 13z + 12 = x^3 - 13x + 12$$

sein, oder $z^3 - x^3 - 13(z - x) = 0$; durch $z - x$ gehoben:

$$z^2 + xz + x^2 - 13 = 0; \text{ folglich:}$$

$$z = -\frac{x}{2} \pm \sqrt{-\tfrac{3}{4}x^2 + 13}.$$

Setzt man jetzt $x = 1$, so folgt $z = 3$ und $z = -4$; daher sind 3 und -4 die andern Wurzeln der Gleichung $x^3 - 13x + 12 = 0$.

Beispiel 7. Es sind die beiden Summen $a + b$ und $a + c$ gegeben. Giebt es einen Werth von a, für welchen jede der beiden Summen in die andere übergeht?

Auflös. Es giebt, außer a selbst, noch einen Werth von a, für welchen das Product $(a + b)(a + c)$ unverändert bleibt, und weil für einen solchen Werth jeder einzelne Factor nicht unverändert bleiben kann (denn er führt zu einer Gleichung des ersten Grades), so ist es möglich, daß aus jedem Factor der andere wird. — Aus

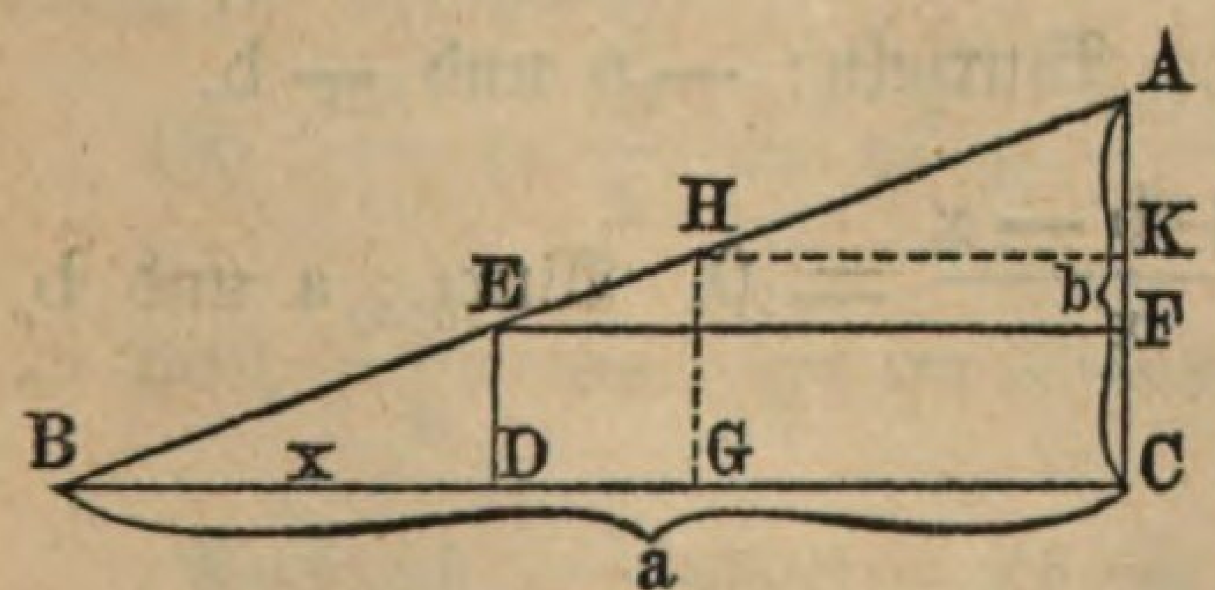
$$(x + b)(x + c) = (a + b)(a + c)$$

folgt: $x = a$ und $x = -a - b - c$.

Hieraus folgt nun weiter, daß es zwar keinen Werth von a giebt, für welchen jede der Summen $a + b$ und $a + c$ in die andere übergeht, wohl aber einen Werth, nämlich $-a - b - c$, für welchen jede Summe in die entgegengesetzte andere übergeht.

Beispiel 8. In das rechtwinklige Dreieck ABC ist das Rechteck CDEF eingeschrieben; giebt es in diesem Dreieck noch ein zweites eingeschriebenes Rechteck von derselben Größe?

Auflös. Die Katheten des Dreiecks ABC mögen a und b heißen, die Länge BD werde mit x bezeichnet; dann ist DE aus der Proportion



$$x : DE = a : b$$

zu entwickeln. Man findet $DE = \frac{bx}{a}$ und den Inhalt des Rechtecks CDEF $= \frac{bx}{a}(a - x)$. Wir stellen also jetzt die Frage: für welchen Werth von x bleibt $\frac{bx}{a}(a - x)$ unverändert? Als Antwort findet man: wenn man x unverändert läßt, oder $a - x$ statt x setzt. Macht man also CG = BD und

construirt das Rechteck CGHK, so ist dieses dem Rechteck CDEF gleich. Nur in einem Falle giebt es ein zweites Rechteck von derselben Größe nicht, wenn nämlich $x = a - x$, also $x = \frac{a}{2}$ ist (das Rechteck wird dann das größte von allen, die sich in das Dreieck einschreiben lassen).

Anmerkung 2. Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ kann man auch dadurch auflösen, daß man sie mit a multiplicirt und nun ax als die Unbekannte betrachtet. Es entsteht:

$$(ax)^2 + b(ax) + ac = 0 \text{ folglich } ax = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}.$$

z. B. $-3x^2 + 4x + 7 = 0$. Multiplicirt man mit -3, so entsteht:

$$(3x)^2 - 4(3x) - 21 = 0.$$

$$3x = 2 \pm \sqrt{4 + 21} = \left\{\begin{matrix} +7 \\ -3 \end{matrix}\right\};$$

daher $x = \frac{7}{3}$ und $x = -1$.

Anmerkung 3. Die Wurzeln der beiden Gleichungen

$$x^2 + ax + b = 0 \text{ und } x^2 - ax + b = 0$$

unterscheiden sich von einander nur durch ihre Vorzeichen. Sind α und β die Wurzeln der einen Gleichung, so sind $-\alpha$ und $-\beta$ die der anderen.

§. 153.

Uebungs-Aufgaben über quadratische Gleichungen.

Man beachte bei Auflösung der folgenden Gleichungen das in §. 137. Gesagte.

1) $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{3-x}$; $x = 1$ und $x = -\frac{3}{5}$.

2) $\frac{x-1}{a} + \frac{a+1}{x} = 2$; $x = a$ und $x = 1 + a$.

3) Ich bin 30 Jahre älter als mein Sohn, aber 36 Jahre älter als meine Tochter; multiplicirt man das Alter meines Sohnes mit dem meiner Tochter, so erhält man mein Alter; wie alt sind meine Tochter, mein Sohn und ich? Auflös. 4, 10 und 40 Jahre.

4) $\frac{x+a}{a} + \frac{x+b}{b} + \frac{x^2 - ab}{ab} = 0$. Wurzeln: $-a$ und $-b$.

5) $\frac{x+a-b}{a} + \frac{x-a-2b}{b} + \frac{a+b-x}{x} = 0$. Wurz.: a und b.

6) $\frac{a-b}{x-b^2} - \frac{1}{b} = \frac{a+b}{x+a^2} - \frac{1}{a}$.

Auflös. Verwandelt man jede Seite in einen Bruch, so entsteht:

$$\frac{ab-x}{bx-b^3} = \frac{ab-x}{ax+a^3} \text{ oder } (ab-x)[(a-b)x + a^3 + b^3] = 0,$$

folglich $x = ab$ und $x = -\frac{a^3+b^3}{a-b}$.

7) Jemand geht 16 Schritt weit in gerade so viel Secunden, als er Schritt in 5 Secunden geht. In welcher Zeit legt er eine Meile (10000 Schritt) zurück? Auflös. In einer Stunde 33 Minuten 10 Secunden.

8) $\frac{a}{a+x}+\frac{b}{b+x}=1$; $x=\pm\sqrt{ab}$.

9) $\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{ax}-1=a$.

Auflös. Multiplicirt man mit $\sqrt{x}$, so folgt: $\sqrt{a}-\sqrt{x}=a\sqrt{x}-x\sqrt{a}$ oder

$$(\sqrt{a}-\sqrt{x})(1-\sqrt{ax})=0;\ x=a \text{ und } x=\frac{1}{a}.$$

10) $\sqrt{\frac{ab}{x}}+c\sqrt{\frac{x}{ab}}=2\sqrt{c}$. Auflös. Bringt man $2\sqrt{c}$ auf die linke Seite, so wird diese ein vollständiges Quadrat. Bequemer aber quadrirt man zuerst; dann entsteht leicht: $(cx-ab)^2=0$; $x=\frac{ab}{c}$.

11) $\sqrt{x+b+c}-\sqrt{a}=\sqrt{a-b-x}-\sqrt{c}$. Die geordnete Gleichung wird $x^2-(a-2b-c)x-ab+b^2+bc=0$; zerlegt man b^2 in $2b^2-b^2$, so entsteht: $x^2-b^2-(a-2b-c)(x+b)=0$. Hieraus $x=-b$ und $x=a-b-c$. Ist jede Quadratwurzel in der gegebenen Gleichung absolut gedacht, so ist $-b$ keine Wurzel.

12) $\sqrt{1+x}-\sqrt{ab}=1-\sqrt{ab-x}$; $x=ab-1$ und $x=0$.

13) $\sqrt{4-x}+\sqrt{1+x}-\sqrt{9+x}=0$; $x=\frac{4}{5}$ und $x=0$.

14) $bcx-a^2=\frac{a^2}{x}-bc$; $x=\frac{a^2}{bc}$ und $x=-1$.

15) $\frac{x-a}{a-b}+\frac{x+b}{2a}=\frac{b}{2a-x}+\frac{x-b}{2a-2b}$; $x=2a-b$ und $x=\frac{2a^2}{2a-b}$.

16) $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{x-c}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}=0$; $x=\frac{ac}{a+b}$ (und $x=\frac{ac}{a-b}$?).

17) $\sqrt{\frac{3}{2}+x}-\sqrt{4+x}+\sqrt{1-x}=0$; Wurzeln: $\frac{1}{2}$ und $-\frac{3}{2}$.

18) $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2+x}-\sqrt{2b(a+b)+x}=0$; $x=a^2-b^2$.

Unter welcher Bedingung gilt auch die zweite Wurzel $\frac{a^2-4ab-b^2}{5}$ der geordneten Gleichung?

19) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}=a^2+\frac{ab^3}{x}$; $x=ab$ und $x=-\frac{ab^3}{a^2+b^2}$.

20) $\frac{abcd}{x}-\frac{cdx}{ab}=1-c^2d^2$.

Auflös. $\frac{1}{x}[abcd-x]=\frac{cd}{ab}[x-abcd]$, u. s. w.

$$x=abcd \text{ und } x=-\frac{ab}{cd}.$$

21) $\frac{x+2b}{3a-c}-\frac{2b+c}{x-3a}=2$; $x=6a-c$ und $x=3a-2b-c$.

22) $1 - abx = \frac{1}{(a+b)^2 \cdot x}$; $x = \frac{1}{b(a+b)}$ und $x = \frac{1}{a(a+b)}$.

23) $ax - bx = \frac{a}{x} \cdot \frac{a-2bx}{a+b}$; $x = \frac{a}{a+b}$ und $x = \frac{a}{b-a}$.

24) $a^2 + \frac{1+x}{1-x} \cdot b^2 = \frac{ab}{x-x^2}$; $x = \frac{a}{a+b}$ und $x = \frac{b}{a-b}$.

25) $\frac{bx}{a} = \frac{x-2a}{x-b} \cdot a - \frac{a-2x}{x-b} \cdot b$; $x = \frac{a^2}{b}$ und $x = 2a + b$.

26) $a^2 - \frac{ab}{cx} = abcx - b^2$; $x = \frac{a}{bc}$ und $x = \frac{b}{ac}$.

27) $\frac{bx-a}{b-a} = \frac{1}{x}$; $x = 1$ und $x = \frac{a-b}{b}$.

28) Welche Zahl ist um $\frac{5}{36}$ größer als ihr Quadrat?

Auflös. $\frac{1}{6}$ und $\frac{5}{6}$.

29. Ein Wechsel über 400 Thlr. wurde nach kaufmännischer Usance (vergl. §. 145. II. Anmerk.) für 395 Thlr. $27\frac{1}{2}$ Sgr. discontirt, und gerade zu soviel Procent, als der Wechsel noch Monate zu laufen hatte; wie viel Procent betrug der Disconto? Auflös. $3\frac{1}{2}$ pCt.

30) $\frac{2x-b}{4x-2a} = \frac{a}{2x+b} - \frac{b^2}{4x^2 - 2(a-b)x - ab}$;

$x = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$. (Die Probe erst später mit Hülfe des §. 156.)

31) Um den Werth eines unendlichen periodischen Kettenbruches (in welchem eine gewisse Anzahl Glieder in derselben Ordnung fortwährend wiederkehren) zu ermitteln, z. B.

$$x = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \text{u. s. w.}}}}}}},$$

setze man

$$x = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + x}}; \text{ woraus folgt:}$$

$$x = \frac{2+x}{6+3x+1}, \text{ also}$$

$$3x^2 + 6x - 2 = 0, \text{ oder}$$

$$x^2 + 2x - \tfrac{2}{3} = 0. \text{ Hieraus:}$$

$$x = -1 + \sqrt{\tfrac{5}{3}}.$$

Die andere Wurzel der quadratischen Gleichung kann hier nicht gelten, weil x nicht negativ werden darf.

32) Welchen Werth hat

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{u. s. w.}}}}}}\;?$$

Auflös. $\sqrt{2}$.

Anmerk. Um die Gleichung $x^2+ax=b$ mittelst eines Kettenbruches aufzulösen, setze man $x(a+x)=b$, woraus folgt:

$$x=\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\text{u. s. w.}}}}}\quad\text{oder auch:}$$

$$x=\cfrac{1}{a:b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a:b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a:b+\cfrac{1}{a+\text{u. s. w.}}}}}}}.$$

Behandelt man die Gleichung im Beispiele 31) $x^2+2x-\frac{2}{3}=0$ auf diese Weise, so erhält man den dort gegebenen Kettenbruch.

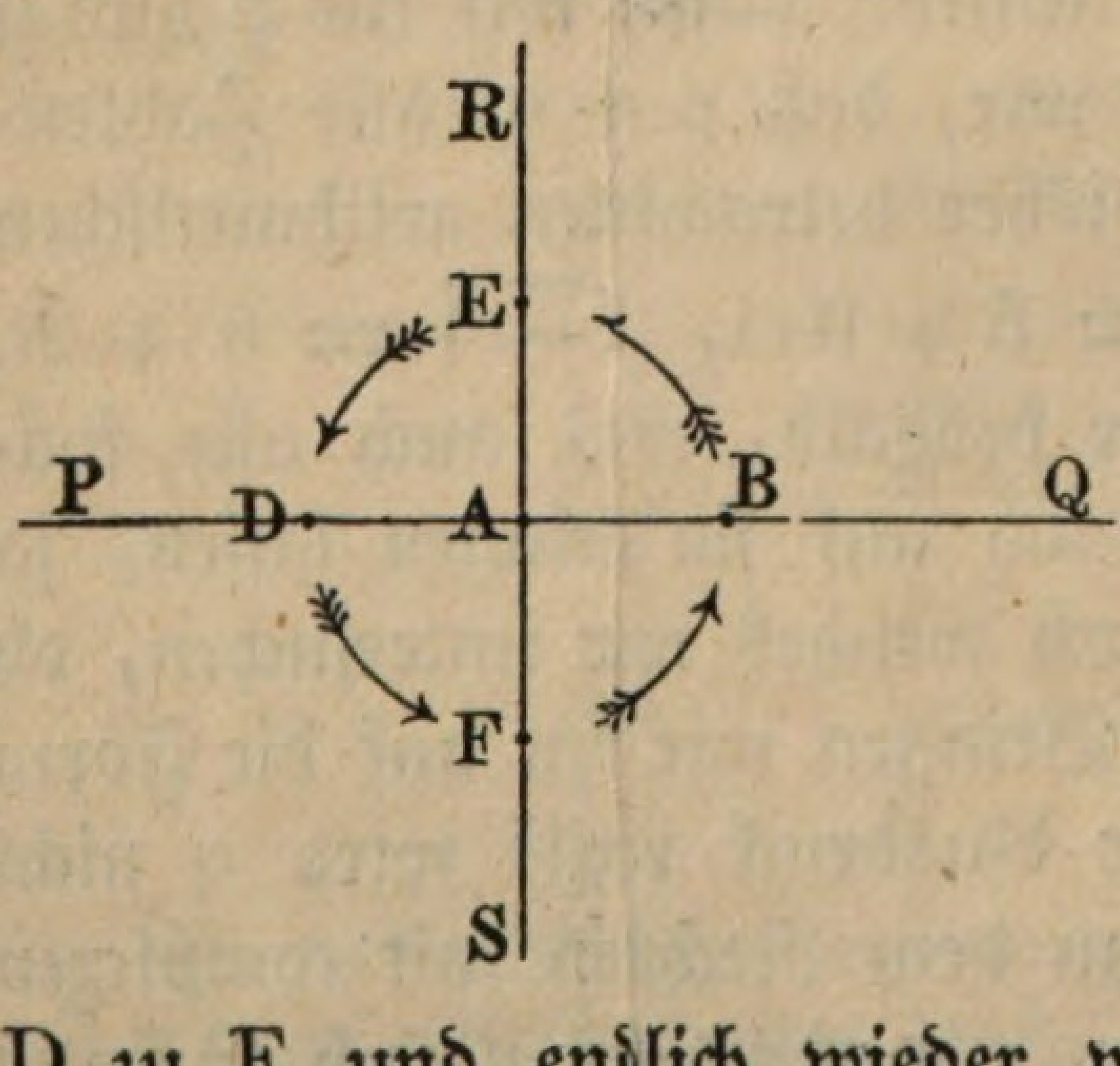
§. 154.

Die complexe Zahl.

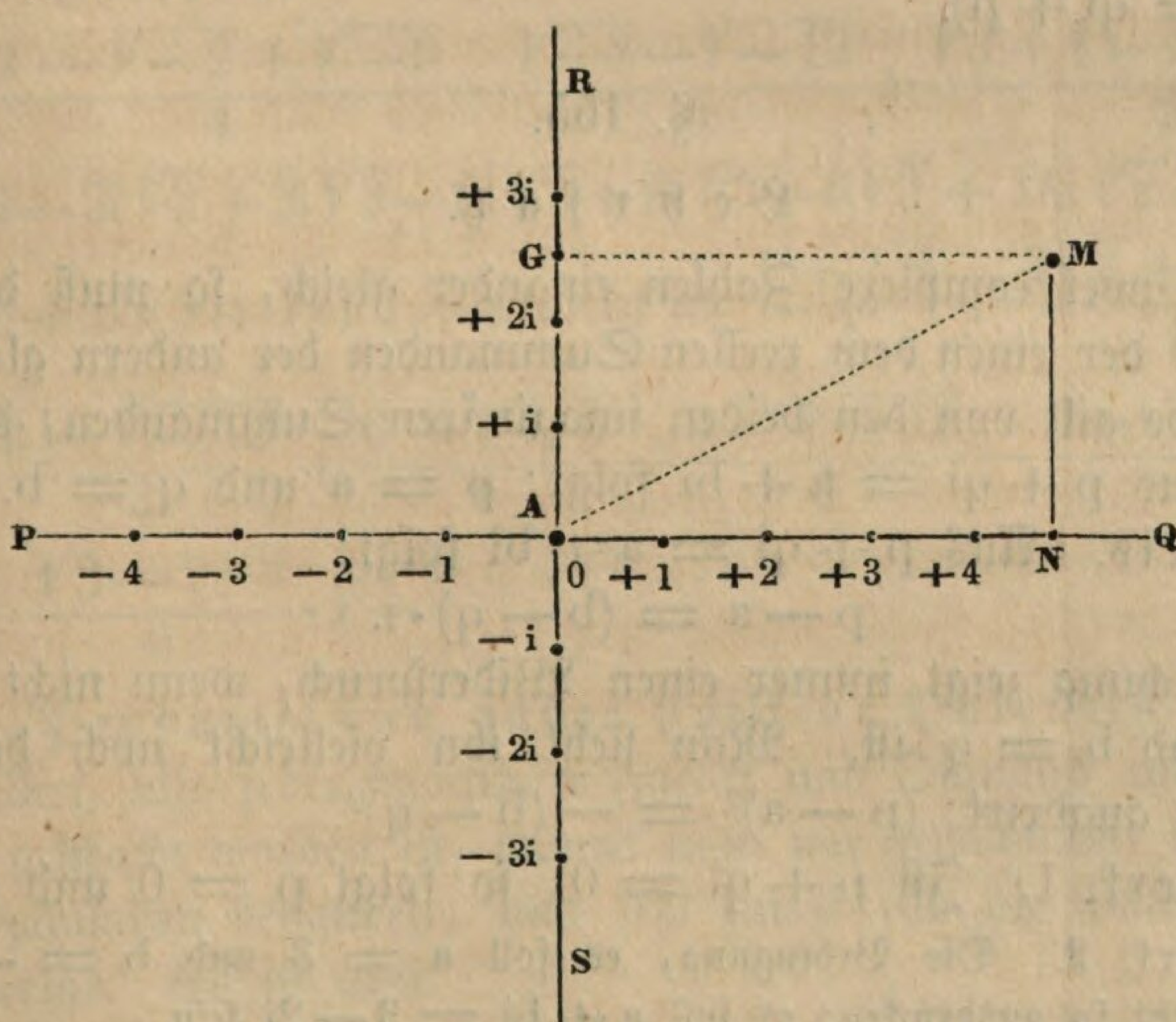
Die Auflösung der vollständigen quadratischen Gleichung hat uns auf die Formen $p+qi$ und $p-qi$ geführt, in welchen p und q reell sind. In so fern q auch negativ sein kann, sind beide Formen in der einen $p+qi$ enthalten. Man nennt $p+qi$ eine complexe Zahl, p ihr reelles, qi ihr imaginäres Glied. Lassen wir für p und q auch den Werth Null zu, so erkennen wir, daß $p+qi$ alle Zahlenwerthe in sich schließt, auf welche die bisher betrachteten arithmetischen Ausdrücke führen können, z. B. $5=5+0\cdot i$, $\sqrt{-4}=0+2i$. Besonders wichtig ist diese Form aber deshalb, weil auch alle späteren noch zu betrachtenden Ausdrücke sich auf sie bringen lassen; ja diese Form ist künftig das Mittel, durch welches wir untersuchen, ob ein Ausdruck reell oder imaginär ist. Bringen wir ihn auf die Form $p+qi$, und wird $q=0$, so ist der Ausdruck reell; wird q nicht $=0$, so ist er imaginär. Ehe wir zu dem Rechnen mit complexen Zahlen übergehen, wollen wir zeigen, wie man sich (nach Gauß)

die imaginären und complexen Zahlen im Gegensatz zu den reellen versinnlichen kann. Man möge das Folgende nicht unbeachtet lassen, weil wir später in einem wichtigen Falle davon Gebrauch machen werden.

Zur Versinnlichung der reellen Zahlen nahmen wir früher (§§. 18., 37. und 118.) in einer geraden Linie PQ einen Anfangspunkt oder Nullpunkt A an. Alle Punkte der Linie rechts von A stellten positive Zahlen, links von A negative Zahlen vor. Denken wir uns jetzt PQ in einer Ebene (etwa der des Papiers), so stellen nur die Punkte der Ebene, welche in PQ liegen, (reelle) Zahlen vor; alle anderen Punkte sind bis jetzt ohne Bedeutung. Diese anderen Punkte dienen nun zur Versinnlichung der imaginären und complexen Zahlen. Hierzu gelangt man durch folgende Betrachtung: Sind B und D gleich weit von A entfernt, und stellt B die Zahl $+a$ vor, d. h. hat AB a Längeneinheiten, so hat AD auch a Längeneinheiten, und D versinnlicht die Zahl $-a$. Man geht nun von B zu D über, oder man überträgt die Länge AB aus der Richtung AQ in die Richtung AP, indem man aus $+a$, $-a$ macht. Legen wir nun durch A eine zweite Linie RS senkrecht zu PQ und tragen von A aus nach beiden Richtungen (oben und unten) auch a Längeneinheiten ab, AE und AF, so können wir fragen, ob man nicht auf ähnliche Weise, wie von B zu D, auch von B zu E und F übergehen kann, d. h. wir können untersuchen, auf welche Art sich AB nicht auf die entgegengesetzte Richtung, sondern auf die perpendikulären Seitenrichtungen AR und AS aus der Richtung AQ übertragen ließe. Hierzu fehlt uns ein arithmetisches Symbol. Solches läßt sich aber durch Analogie finden. Der Uebergang aus $+a$ in $-a$ kann dadurch geschehen, daß man $+a$ mit -1 multiplicirt; wir können also fragen: mit welcher Zahl müßte man $+a$ multipliciren, um B in die Richtung AR oder AS zu übertragen? Gesetzt x wäre die Zahl, mit welcher $+a$ multiplicirt werden muß, um B aus der Richtung AQ in die Richtung AR zu übertragen, so würde E die Zahl $+x \cdot a$ vorstellen. Da nun aber die Richtung AP ganz dieselbe Lage zu AR hat, wie AR zu AQ, so könnte man den Punkt E in die Richtung AP übertragen, wenn man $+x \cdot a$ wieder mit x multiplicirte, d. h. der Punkt D müßte die Zahl $+x^2 \cdot a$ vorstellen. Eben so könnte man durch Multiplication mit x von D zu F und endlich wieder von F zu B übergehen; also würde F



die Zahl $+x^3 \cdot a$ und B auch noch die Zahl $+x^4 \cdot a$ vorstellen. Weil nun aber D die Zahl $-a$ versinnlicht, so muß $+x^2 \cdot a = -a$, folglich $x = \pm\sqrt{-1}$ sein, und sonach hat man: E stellt die Zahl $\pm a\sqrt{-1}$, D die Zahl $(\pm\sqrt{-1})^2 \cdot a = -a$, F die Zahl $(\pm\sqrt{-1})^3 \cdot a = \mp a\sqrt{-1}$, endlich B die Zahl $(\pm\sqrt{-1})^4 \cdot a = +a$ vor. Die Punkte E und F stellen also entgegengesetzte imaginäre Zahlen vor; welcher Punkt die positiv imaginäre Zahl vorstellen soll, ist gleichgültig; der andere stellt dann die negativ imaginäre Zahl vor. Wir wollen festsetzen, daß E die Zahl $+ai$, also F die Zahl $-ai$ versinnlichen soll. Trägt man nun von A aus auf AR und AS dieselben gleichen Längeneinheiten ab, welche, auf AQ und AP abgetragen, die ganzen reellen Zahlen erzeugen, so versinnlichen die Endpunkte dieser Längen in AR die Zahlen $+i$, $+2i$, $+3i$, ..., und in AS die Zahlen $-i$, $-2i$, $-3i$ u. s. w. Interpoliren wir, so erhalten wir alle imaginären Zahlen $\pm qi$, wenn q beliebig gebrochen oder irrational ist. — Welche Punkte stellen aber complexe Zahlen vor?



Nehmen wir zuerst an, in $p+qi$ wären p und q positiv, so würden wir, um von A aus zur Zahl p zu gelangen, die Richtung AQ einschlagen. Gesetzt, N stellt die Zahl p vor, so würden wir, wenn der zweite Summand positiv reell wäre, in der Richtung AQ weiter gehen; da er aber positiv imaginär ist, so müssen wir diese Richtung verlassen und in der perpendiculären Seitenrichtung nach oben um die Länge q fortschreiten. Stellt in AR der Punkt G die Zahl

qi vor, und zieht man GM $\#$ AQ, NM $\perp$ AQ, also $\#$ AR, so hat NM die Länge q; folglich repräsentirt M die complexe Zahl p + qi. Ist p negativ, so liegt N in AP; ist q negativ, so liegt G in AS; immer findet man aber auf dieselbe Weise den Punkt M, welcher p + qi repräsentirt. Man sieht, daß jede complexe Zahl durch einen und nur durch einen Punkt der Ebene, in welcher PQ und RS liegen, versinnlicht wird, und daß umgekehrt jeder Punkt der Ebene einer einzigen reellen, oder imaginären, oder complexen Zahl zugehört. Fällt M in A, so ist $p + qi = 0$, weil $p = 0$ und $q = 0$ ist.

Von Wichtigkeit ist noch der absolute Zahlenwerth der Länge AM, d. h. der Entfernung des Punktes M, welcher p + qi vorstellt, vom Nullpunkt. Da $AN = p$, $NM = q$ ist, so erhält man nach dem Pythagoreischen Lehrsatz $AM = \sqrt{p^2 + q^2}$. Dieser Ausdruck $\sqrt{p^2 + q^2}$ wird der Modul der complexen Zahl p + qi genannt. Bemerkt mag noch werden, daß man auch zu M gelangt, wenn man von A aus zuerst nach G (q·i) und von G aus nach M fortschreitet ($p + qi = qi + p$).

§. 155.

Lehrsatz.

Sind zwei complexe Zahlen einander gleich, so muß der reelle Summand der einen dem reellen Summanden der andern gleich sein, und dasselbe gilt von den beiden imaginären Summanden; d. h.

aus $p + qi = a + bi$ folgt: $p = a$ und $q = b$.

Beweis. Aus $p + qi = a + bi$ folgt:

$$p - a = (b - q) \cdot i.$$

Diese Gleichung zeigt immer einen Widerspruch, wenn nicht zugleich $p = a$ und $b = q$ ist. Man sieht ihn vielleicht noch deutlicher, wenn man quadrirt: $(p - a)^2 = -(b - q)^2$.

Anmerk. 1. Ist $p + qi = 0$, so folgt $p = 0$ und $q = 0$.

Anmerk. 2. Die Bedingung, es soll $a = 3$ und $b = -2$ sein, kann man jetzt so ausdrücken: es soll $a + bi = 3 - 2i$ sein.

§. 156.

Das Rechnen mit complexen Zahlen.

Um die vollständige quadratische Gleichung allgemein auflösen zu können, mußten wir die complexe Zahl in die Arithmetik einführen, also den Begriff der Summe dahin erweitern, daß diese auch Ungleichartiges, nämlich Reelles und Imaginäres, zusammenfassen kann.

Die complexe Zahl $p+qi$ bezeichnet sonach die Zahl, welche so viel reelle (ganze oder gebrochene, positive oder negative) Einheiten enthält, als die reelle Zahl p anzeigt, und so viel imaginäre Einheiten, als die reelle Zahl q anzeigt. Jede complexe Zahl nimmt in der Zahlenebene (§. 154.) eine bestimmte Stelle ein und ist nur auf eine Weise in der Form $p+qi$ zu bestimmen, wie dies aus dem vorhergehenden Lehrsatz erhellt. Indem wir die complexe Zahl den für Summen gültigen Gesetzen unterwerfen, können wir sie mit beliebigen reellen, imaginären oder wieder complexen Zahlen verbinden und diese Verbindung wieder in eine complexe Zahl zu verwandeln suchen. Diese Verwandlung ist der Zweck des Rechnens mit complexen Zahlen, weil wir von dem Resultat einer solchen Verbindung erst dann einen klaren Begriff erhalten, wenn es auf die Form $p+qi$ gebracht ist. Die Umformung der Verbindung einer complexen Zahl mit andern Zahlen folgt hier, so weit sie jetzt schon ausgeführt werden kann.

I. Summen und Differenzen. Es ist $(p+qi)\pm(a+bi) = (p\pm a)+(q\pm b)i$. z. B.

1) $\frac{2-\sqrt{-2}+\sqrt{-3}}{4}-\frac{\sqrt{-8}-\sqrt{-12}}{3}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{-18}+\sqrt{-75}}{2}$

$= \frac{1}{12}[6-3i\sqrt{2}+3i\sqrt{3}-8i\sqrt{2}+8i\sqrt{3}+6\sqrt{3}+18i\sqrt{2}+30i\sqrt{3}]$

$= \frac{1}{12}[6+6\sqrt{3}+7i\sqrt{2}+41i\sqrt{3}] = \frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{7\sqrt{2}+41\sqrt{3}}{12}\cdot i.$

2) $\frac{2-\sqrt{-12}}{3}+\frac{6-\sqrt{-8}}{4}-\frac{2-\sqrt{-18}}{6}-\frac{3-\sqrt{-2}+\sqrt{-3}}{9}$

$= \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}-7\sqrt{3}}{9}\cdot\sqrt{-1}.$

II. Producte und ganze positive Potenzen. Nachdem i eingeführt, also jeder imaginäre Factor und Dignand auf die Form $p+qi$ gebracht worden ist, rechnet man wie gewöhnlich, indem man i als Buchstaben behandelt, und setzt zuletzt für die Potenzen von i ihre Werthe. Es ist aber

$$(p+qi)(a+bi) = (ap-bq)+(bp+aq)i;$$

folglich wird durch fortgesetztes Multipliciren immer wieder die Form $p+qi$ erzeugt, daher auch durch Potenziren.

z. B. 1) $(\sqrt{a}-\sqrt{-a})(\sqrt{a^3}+\sqrt{-a^3}) = 2a^2$.

2) $(2-\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3}) = -1-3i\sqrt{3}$.

3) $(a-\sqrt{-ab}+2\sqrt{-b^2})(a+\sqrt{-ab}-2\sqrt{-b^2}) = a^2+ab-4b\sqrt{ab}+4b^2$.

4) $(1-\sqrt{-4})(1+\sqrt{-4})-(3+\sqrt{-3})(3-\sqrt{-3}) = -7$.

5) $(2-\sqrt{-1})(1+\sqrt{-2}-\sqrt{-3})(\sqrt{2}+\sqrt{-1}-\sqrt{-3})$
$= (-3+\sqrt{3}+\sqrt{6}) - 3(-3+\sqrt{3}+\sqrt{6})\cdot i.$

6) $\frac{2-\sqrt{-2}}{1+\sqrt{a}}\cdot\frac{3+\sqrt{-8}}{1-\sqrt{a}} = \frac{10}{1-a}+\frac{\sqrt{2}}{1-a}\cdot\sqrt{-1}.$

7) $\frac{a+\sqrt{-b}}{1+\sqrt{-a}}\cdot\frac{a-2\sqrt{-b}}{1-\sqrt{-a}} = \frac{a^2+2b}{1+a}-\frac{a\sqrt{b}}{1+a}\cdot\sqrt{-1}.$

8) $(2+\sqrt{-3})^2 = 1+4i\sqrt{3}.$

9) $(2-\sqrt{-1})^3 = 2-11\sqrt{-1}.$

10) $(1-\sqrt{2}+\sqrt{-2})^2 = (1-2\sqrt{2})-(4-2\sqrt{2})\sqrt{-1}.$

11) $\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = +1.$

12) $(1+\sqrt{-1})^8 = +16.$

13) $\left(\frac{-2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+2\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 2-11i.$

14) $\left(-\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-2\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 2-11i.$

III. Quotienten. Es kommt hier darauf an, aus dem Nenner jede imaginäre Wurzel fortzuschaffen. Hat der Nenner die Form $q\cdot i$, so multiplicirt man Zähler und Nenner mit i; hat er die Form $p\pm qi$, so multiplicirt man mit $p\mp qi$. — Hervorzuheben ist hier, daß das am Schlusse des §. 151. für positive ganze Potenzen von i angeführte Gesetz auch für negative ganze Potenzen von i gilt. Es ist $i^{-4a} = \frac{1}{i^{4a}} = +1$; folglich hat man:

$$i^{-4a} = +1;\ \text{folglich}\ i^{-4a+1} = +i,$$
$$i^{-4a+2} = -1\ \text{und}\ i^{-4a+3} = -i.$$

Beispiele:

1) $\frac{3}{2\sqrt{-4}} = -\frac{3}{4}i;$

2) $\frac{2+\sqrt{-12}-\sqrt{3}}{4\sqrt{-3}} = \frac{1}{2}+\frac{3-2\sqrt{3}}{12}\cdot\sqrt{-1};$

3) $\frac{2}{2+\sqrt{-3}} = \frac{4}{7}-\frac{2\sqrt{3}}{7}\sqrt{-1};$ 4) $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1};$

5) $\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{-3}-3\sqrt{-2}} = (2+\sqrt{6})\cdot i;$ 6) $\left(\frac{1}{1+\sqrt{-1}}\right)^2 = -\frac{1}{2}\sqrt{-1};$

7) $\frac{3+2\sqrt{3}+3\sqrt{-2}-\sqrt{-6}}{3-\sqrt{-6}} = 1+i\sqrt{2}.$

8) $\frac{3+\sqrt{2}+2\sqrt{-1}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-2}} = 1+i\sqrt{2}.$

9) $\left(\frac{2+\sqrt{-3}}{3-\sqrt{-2}}\right)^2 = \frac{7-24\sqrt{6}}{121} + \frac{28\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{121}\cdot\sqrt{-1}$;

10) $\frac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}\cdot\frac{2-\sqrt{-1}}{2+\sqrt{-1}} = -\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\sqrt{-1}$.

IV. Um $\sqrt{a \pm bi}$ auf die Form $p \pm qi$ zu bringen, kann man §. 155. anwenden. Setzt man $\sqrt{a \pm bi} = p \pm qi$, so sind p und q zwei unbekannte reelle Zahlen, zu deren Entwickelung zwei Gleichungen gebraucht werden. Quadrirt man aber, so entsteht:

$$a \pm bi = (p^2 - q^2) \pm 2pq\cdot i.$$

Nach §. 155. muß also:

$$1)\quad p^2 - q^2 = a$$

$$2)\quad 2pq = b \text{ sein.}$$

Man kann nun q aus 2) in 1) substituiren und erhält eine Gleichung zur Entwickelung von p. Bequemer aber ist folgendes Verfahren: Quadrirt man beide Gleichungen und addirt sie dann, so entsteht:

$$p^4 + 2\cdot p^2\cdot q^2 + q^4 = a^2 + b^2 \text{ oder}$$

$$3)\quad p^2 + q^2 = +\sqrt{a^2+b^2}.$$

Die Wurzel muß hier positiv genommen werden, weil p und q reell sein sollen. Aus 1) und 3) folgt nun:

$$2p^2 = a + \sqrt{a^2+b^2}$$

$$2q^2 = -a + \sqrt{a^2+b^2}.$$

Entwickelt man p und q und setzt die Werthe in die Gleichung $\sqrt{a \pm bi} = p \pm qi$ ein, so erhält man die Formel:

$$\sqrt{a \pm b\cdot i} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\cdot i.$$

Die beiden Wurzeln rechts, d. h. p und q, sind beide positiv, oder beide negativ; denn es war (No. 2) $2pq = b$, also positiv. Nimmt man aber p und q negativ, so muß man auch $\sqrt{a \pm bi}$ negativ nehmen.

Beispiele:

1) $\sqrt{2-\sqrt{-5}} = \sqrt{2-i\sqrt{5}}$; hier ist $a = 2$, $b = \sqrt{5}$, $a^2+b^2 = 9$;

folglich: $\sqrt{2-\sqrt{-5}} = \sqrt{\frac{2+3}{2}} - \sqrt{\frac{-2+3}{2}}\cdot i = \sqrt{\frac{5}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}$.

2) $\sqrt{2\sqrt{-3}} = \sqrt{0+2i\sqrt{3}}$; hier ist $a = 0$, $b = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{3}$;

folglich: $\sqrt{2\sqrt{-3}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{2}}\cdot i = \sqrt[4]{3} + i\sqrt[4]{3}$.

3) $\sqrt{-1-\sqrt{-3}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{6}$.

4) $\sqrt{2\sqrt{2}+2\sqrt{-3}+2\sqrt{-6}} = (1+\sqrt{2})+i\sqrt{3}$. Man braucht hier §. 122. V.

5) $\dfrac{-2+\sqrt{(1+4\sqrt{-3})^3}}{\sqrt{-3}} = 9+4i\sqrt{3}$.

6) $\dfrac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{-2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

7) $\sqrt{\dfrac{10-5\sqrt{-1}}{2+\sqrt{-1}}} = 2-\sqrt{-1}$.

8) $\sqrt{1+4\sqrt{-3}}+\sqrt{1-4\sqrt{-3}} = 4$. Am bequemsten rechnet man hier nach §. 122. IV.

9) $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{-2}}+\sqrt{-\frac{1}{2}\sqrt{-2}} = \sqrt[4]{2}$.

10) $\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi} = \sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}$.

Der Ausdruck $\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}$ ist daher immer reell. Später wird dasselbe für $\sqrt[n]{a+bi}+\sqrt[n]{a-bi}$ nachgewiesen werden.

Anmerkung. Ueber die Bedeutung des Operirens mit imaginären Zahlen ist noch Folgendes zu bemerken:

Wir haben zwei Zahlenreihen, eine reelle und eine imaginäre, und eine Zahlenebene. Indem wir von der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5,.... ausgingen, führte uns das Bedürfniß, alle Gesetze ungehindert, also allgemein anwenden zu können, zu der reellen Zahlenreihe, und dasselbe Bedürfniß führte später zur imaginären Zahlenreihe. Beide Reihen sind in dieser Beziehung gleich nothwendig, und wenn uns die imaginäre Zahlenreihe fremder und weniger wichtig erscheint, so liegt der Grund zunächst darin, daß in der reellen Zahlenreihe die natürlichen Zahlen enthalten sind, und daß wir auch mit den andern reellen Zahlen durch anhaltende Beschäftigung vertrauter sind; dann aber auch darin, daß die reellen Zahlen eine unmittelbare Anwendung auf Größen gestatten, die imaginären aber nicht.

Was nun das Rechnen innerhalb der reellen Zahlenreihe betrifft, so ist hierüber alles Nöthige bereits gesagt; innerhalb der imaginären Zahlenreihe geschieht aber das Rechnen ganz eben so, d. h. eine imaginäre Zahl wird um eine zweite imaginäre Zahl dadurch vermehrt oder vermindert, daß man in ihrer Reihe um die imaginären Einheiten der zweiten Zahl vor oder zurück geht [$ai \pm bi = (a \pm b)i$]. Aehnlich verfährt man, wenn eine imaginäre Zahl mit einer reellen multiplicirt, oder durch eine solche dividirt wird [$n \times ai = (na)i$, $\dfrac{ai}{n} = \dfrac{a}{n} \times i$].

Zur Erläuterung der übrigen Operationen wird die Verbindung beider Reihen und die Zahlenebene gebraucht.

Jede beider Reihen hat eine positive und eine negative Seite, getrennt (oder auch verbunden) durch die Null, der einzigen Zahl, welche beiden Reihen angehört (vergl. die Figur Seite 273). Soll nun eine Zahl mit qi multiplicirt werden, so multipliciren wir zuerst mit q, dann mit i; es fragt sich also nur, wie wir die Multiplication mit i aufzufassen haben. Eine Zahl mit i multipliciren heißt aber, sie aus ihrer Reihe in die andere übertragen, und zwar so, daß diese Zahl, wenn sie reell ist, in die entsprechende Zahl der imaginären Zahlenreihe übergeht [$i \times (\pm a) = \pm ai$], wenn sie aber imaginär ist, in die entsprechende entgegengesetzte Zahl der reellen Zahlenreihe [$i \times (\pm ai) = \mp a$]. Umgekehrt wird die imaginäre Zahl durch i dividirt, wenn wir zu der entsprechenden Zahl der reellen Zahlenreihe übergehen $\left[\frac{\pm ai}{i} = \pm a\right]$; aber die reelle wird durch i dividirt, wenn wir zu der entsprechenden entgegengesetzten Zahl der imaginären Zahlenreihe übergehen $\left[\frac{\pm a}{i} = \mp ai\right]$. Hieraus erklärt es sich auch, daß eine imaginäre Zahl qi, wenn sie mit 2, 3, 4, ... potenzirt wird, immer abwechselnd aus einer Reihe in die andere überspringt.

Die algebraische Addition einer reellen und einer imaginären Zahl führt zur complexen Zahl, also in die Zahlenebene, in der jeder Punkt eine solche Zahl versinnlicht. Da nun jede Verbindung einer complexen Zahl mit einer anderen beliebigen Zahl wieder zu der Form $p + qi$ führt, so erscheint jede solche Verbindung als ein Uebergang von einem Punkte der Zahlenebene zu einem anderen. Die besondere Art des Ueberganges in einzelnen Fällen zu bestimmen, ist nach dem schon Gesagten leicht und sei dem Leser überlassen. Daß die Rechnung mit complexen Zahlen auch zur rein imaginären und zur reellen Zahl führen kann, erklärt sich leicht; in der Zahlenebene liegen auch alle rein imaginären und alle reellen Zahlen.

§. 157.

Eigenschaften des quadratischen Ausdrucks $Ax^2 + Bx + C$.

Es ist $Ax^2 + Bx + C = A \cdot \left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right)$, d. h. man kann $Ax^2 + Bx + C$ immer auf die Form $A(x^2 + ax + b)$ bringen. Man achte nun auf die folgenden Eigenschaften des Ausdrucks

$$x^2 + ax + b.$$

I. $x^2 + ax + b$ läßt sich immer in ein Product von der Form $(x - \alpha)(x - \beta)$ verwandeln; α und β sind die Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$, und es ist noch $\alpha + \beta = -a$, $\alpha\beta = b$.

Beweis. Durch dasselbe Verfahren, welches bei der Auflösung der vollständigen quadratischen Gleichung angewandt wurde, kann man $x^2 + ax + b$ zunächst in die Differenz zweier Quadrate verwandeln:

$$x^2 + ax + b = x^2 + 2\cdot\frac{a}{2}x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b$$
$$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b\right]$$
$$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)^2.$$

Zerlegt man nun diese Differenz zweier Quadrate in das Product der Summe und Differenz der Dignanden, so erhält man für $x^2 + ax + b$ das Product

$$\left[x + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right]\cdot\left[x + \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right] \text{ oder}$$
$$\left[x - \left(-\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)\right]\cdot\left[x - \left(-\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)\right].$$

Nun sind aber $-\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ und $-\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ die Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$, und bezeichnet man diese Wurzeln mit α und β, so folgt $x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)$.

Aus

$$1)\ \alpha = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \text{ und}$$
$$2)\ \beta = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \text{ folgt auch noch:}$$

$$\alpha + \beta = -a \text{ und}$$
$$\alpha\cdot\beta = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b = b$$

Soll $Ax^2 + Bx + C$ in ein Product verwandelt werden, so schreibe man:

$$A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right),$$

verwandle den Ausdruck in den Klammern in ein Product mittelst der Wurzeln der Gleichung $x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$ und multiplicire dies Product noch mit A.

z. B. 1) $6x^2 - 19x - 7 = 6(x^2 - \frac{19}{6}x - \frac{7}{6})$. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 - \frac{19}{6}x - \frac{7}{6} = 0$ sind $+\frac{7}{2}$ und $-\frac{1}{3}$, folglich:

$$6x^2 - 19x - 7 = 6(x - \tfrac{7}{2})(x + \tfrac{1}{3}) = (2x - 7)(3x + 1).$$

2) $20 + 17x - 10x^2 = -10(x^2 - 1{,}7x - 2) = (5 - 2x)(4 + 5x)$.

3) $4x^2 + 4x + 2 = (2x + 1 + \sqrt{-1})(2x + 1 - \sqrt{-1})$.

4) $x^2 + 2x - 2 = (x + 1 + \sqrt{3})(x + 1 - \sqrt{3} = (x + 2{,}732)(x - 0{,}732)$.

II. *Wenn a und b reelle Zahlen sind, für welche Werthe von x wird $x^2 + ax + b$ positiv, für welche negativ?* Man kann $x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)$ setzen, wenn α und β die Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ sind. Sind nun α und β *reell*, so wird offenbar $(x - \alpha)(x - \beta)$ positiv, wenn beide Factoren positiv, oder beide negativ sind, d. h. wenn x größer ist, als die größere beider Wurzeln, oder kleiner als die kleinere; hingegen wird $(x - \alpha)(x - \beta)$ für jeden Werth von x negativ, für welchen der eine Factor positiv, der andere negativ ist, d. h. wenn x größer als die kleinere, aber zugleich kleiner als die größere beider Wurzeln ist. Dies Gesetz pflegt man so auszudrücken: *Sind a und b reell, so wird $x^2 + ax + b$ für jeden Werth von x negativ, welcher zwischen den beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ liegt; hingegen positiv für jeden Werth von x außerhalb dieser Wurzeln. — Sind aber die Wurzeln imaginär, so wird $x^2 + ax + b$ für jeden reellen Werth von x positiv.* Um den letzten Theil dieses Gesetzes zu beweisen, mögen $p \pm qi$ die Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ sein; dann ist:

$$x^2 + ax + b = (x - p - qi)(x - p + qi) = (x - p)^2 + q^2,$$

also positiv, weil das Quadrat jeder reellen Zahl positiv ist.

Um die Frage zu beantworten, für welche Werthe von x der Ausdruck $Ax^2 + Bx + C$ positiv oder negativ wird, setze man wieder:

$$Ax^2 + Bx + C = A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right).$$

Ist nun A positiv, so wird das Product für jeden Werth von x positiv oder negativ, welcher den Ausdruck in den Klammern positiv oder negativ macht; ist A negativ, so findet gerade das Umgekehrte Statt.

z. B. 1) $A = x^2 + 8x + 15$. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 + 8x + 15 = 0$ sind -3 und -5; folglich wird A negativ für jeden Werth von x zwischen -3 und -5 (z. B. für $x = -4$ oder $x = -3{,}12$), hingegen positiv für jeden Werth über -3 und unter -5 (z. B. für $x = -2$, $x = 5$, $x = -5{,}5$). Will man den Beweis an diesem Beispiele wiederholen, so setze man

$$A = [x - (-3)] \cdot [x - (-5)].$$

2) $4x^2 - 2x + 3$ ist für jeden reellen Werth von x positiv.

3) $-2 + 6x - 9x^2$ ist für jeden reellen Werth von x negativ.

4) $2 - x - 3x^2$ ist positiv für jeden Werth von x zwischen $\frac{2}{3}$ und -1, negativ für jeden Werth von x, der größer als $\frac{2}{3}$, oder kleiner als -1 ist.

5) $4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$ ist für jeden reellen Werth von x (außer $\frac{1}{4}$) positiv.

6) $\sqrt{-10 + 6x - x^2}$ ist für jeden reellen Werth von x imaginär.

Anmerkung. Aus dem Gesetz I. folgt: Kennt man eine Wurzel der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$, etwa $x = \alpha$, so findet man die andere sowohl, wenn man α von $-a$ abzieht, als auch, wenn man mit α in b dividirt, d. h. $-a - \alpha$ oder $\frac{b}{\alpha}$ ist die andere Wurzel.

Beispiel. Für welchen Werth von a bleibt $\frac{2a^2 - 3a + 2}{2a + 3}$ unverändert? (Vergl. §. 152. Anm. 1.)

Auflös. Ordnet man die Gleichung $\frac{2x^2 - 3x + 2}{2x + 3} = \frac{2a^2 - 3a + 2}{2a + 3}$, so erhält man:

$$x^2 - \frac{4a^2 + 13}{4a + 6}x - \frac{6a^2 - 13a}{4a + 6} = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $x = a$; daher findet man die andere, wenn man entweder a von $\frac{4a^2 + 13}{4a + 6}$ abzieht, oder $-\frac{6a^2 - 13a}{4a + 6}$ durch a dividirt. Der gegebene Ausdruck bleibt also unverändert, wenn man $\frac{13 - 6a}{6 + 4a}$ statt a setzt.

§. 158.

Höhere Gleichungen, welche sich auf quadratische reduciren lassen.

Die Gleichung $x^{2n} + ax^n + b = 0$ reducirt sich auf eine quadratische, wenn man x^n als Unbekannte betrachtet. Dann entsteht:

$$(x^n)^2 + a(x^n) + b = 0, \text{ folglich } x^n = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Hieraus ist x zu finden. Alle Wurzeln der Gleichung

$$x^{2n} + ax^n + b = 0$$

hat man hierdurch aber nur in einzelnen Fällen gefunden (§. 133., 7. und 8.), z. B. wenn $n = 2$ also $2n = 4$ ist:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \text{ bei beliebiger}$$

Verbindung der Doppelzeichen; oder wenn $n = \frac{1}{9}$, also $2n = \frac{2}{9}$ ist:

$$x = \left[-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right]^9.$$

z. B. 1) $x\sqrt{4-x^2} = \pm\sqrt{3}$; die Wurzeln sind $\pm\sqrt{3}$ und ± 1.

2) $x^3\sqrt[3]{x} - 4x\sqrt[3]{x^2} + 3 = 0$.

Auflös. $(\sqrt[3]{x^5})^2 - 4(\sqrt[3]{x^5}) + 3 = 0$; $x = 1$ und $x = 1,93318$.

3) Welche Zahl ist der Summe der fünften Wurzel aus ihrem Quadrate und der fünften Wurzel aus ihrer Reciproken gleich? Auflös. Es giebt zwei reelle Zahlen dieser Art: $+2,23004$ und $-0,4484224$.

4) $x^{14} + 0,953x^7 - 0,047 = 0$. Auflös. $x = -1$ und $x = 0,6461$.

§. 159.

Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten x, y ist:

$$1)\quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

und diese Gleichung bleibt eine quadratische, so lange von den drei Factoren a, b und c wenigstens einer nicht gleich Null ist.

Die Auflösung führt zu einer quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten (zuweilen auch zu einer einfachen), wenn die zweite Gleichung vom ersten Grade ist:

$$2)\quad nx + my + h = 0.$$

Man kann eine Unbekannte aus 2) entwickeln und in 1) substituiren, z. B. $y = -\frac{h+nx}{m}$. Es läßt sich leicht übersehen, daß in der neuen Gleichung x nur in der ersten und zweiten Potenz vorkommen kann. — Ist die zweite Gleichung auch eine quadratische, so führt die Verbindung beider im Allgemeinen zu einer Gleichung vom vierten Grade; wie man dann entwickelt, wird später gezeigt werden. In besonderen Fällen kann aber auch dann die Auflösung mittelst einer quadratischen Gleichung gelingen; es hängt dies von den Werthen der Coefficienten a, b, c, ... und von der geschickten Behandlung dieser Gleichungen ab. Dasselbe gilt von mehr als zwei Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten. Selbst wenn eine Gleichung von einem höheren, als dem zweiten Grade ist, kann eine zweckmäßige Verbindung mit andern Gleichungen zu einer quadratischen, oder einfachen Gleichung führen. Im Allgemeinen mag noch bemerkt werden, daß man häufig die Unbekannten nicht unmittelbar zu finden, sondern zunächst den Werth einer Verbindung derselben, z. B. ihrer Summe, ihrer Differenz, ihres Productes u. s. w. zu ermitteln sucht, und dann erst zu der Entwickelung der Unbekannten selbst übergeht. Zu den bereits früher angegebenen Methoden tritt

noch die der Multiplication und Division zweier Gleichungen Behufs der Elimination einer Unbekannten hinzu, wie im Beispiel 1.

Ergeben sich für die Unbekannten mehrere Werthe (der gewöhnliche Fall), so genügt die bloße Angabe derselben nicht; es muß ausdrücklich gesagt werden, welche Werthe zusammengehörige sind. Sind die beiden Gleichungen gegeben:

$$1)\quad 2x^2 + y^2 = 22$$
$$2)\quad 3x^2 - 2y^2 = 19,$$

so findet man zunächst auf dem gewöhnlichen Wege der Elimination:

$$x^2 = 9 \text{ und } y^2 = 4, \text{ und hieraus } x = \pm 3,\ y = \pm 2.$$

Im vorliegenden Falle löst jeder Werth von x in Verbindung mit jedem der beiden Werthe von y die Aufgabe, die sonach vier Auflösungen hat, weil in beiden Gleichungen nur die zweiten Potenzen der Unbekannten vorkommen. In der Regel ist dies aber nicht der Fall, und dann zählt man entweder die Auflösungen einzeln auf, oder man markirt zusammengehörige Werthe der Unbekannten x, y,... dadurch, daß man diesen Buchstaben gleiche Indices giebt, so daß z. B. x' und y', oder x'', y'', z'', auch x_2, y_2, z_2, u. s. w. zusammengehörige Werthe anzeigen. z. B.

$$1)\quad 2x^2 - xy = 10$$
$$2)\quad x^2 + y^2 = 5.$$

Multiplicirt man die zweite Gleichung mit 2 und zieht dann die erste von ihr ab, so entsteht:

$$xy + 2y^2 = 0; \text{ daher I. } y = 0,$$
$$\text{oder 3) } x + 2y = 0.$$

Entwickelt man x aus 3) und setzt den Werth in 2) ein, so entsteht:

$$5y^2 = 5; \text{ folglich: II. } y = \pm 1.$$

Für $y = 0$ ergiebt sich aus 1) oder 2): $x = \pm\sqrt{5}$

Für $y = \pm 1$ ergiebt sich aus 3): $x = \mp 2$.

Zusammengehörig sind die Werthe der Unbekannten, für welche alle gegebenen Gleichungen zu identischen werden. Im vorliegenden Falle sind also $y = 0$ und $x = \sqrt{5}$, so wie auch $y = 0$ und $x = -\sqrt{5}$ zusammengehörige Wurzeln; was aber die anderen Werthe von y und x betrifft, so genügen sie zwar in beliebiger Verbindung der Gleichung 2), nicht aber der Gleichung 1); diese Gleichung, oder bequemer die Gleichung 3), zeigt, daß nur $y = +1$ und $x = -2$, so wie $y = -1$ und $x = +2$ zusammengehörige Wurzeln sind. Allerdings erhält man aus 1) für jeden Werth von y zwei Werthe für x, nämlich für $y = +1$ wird $x = -2$ oder $+\frac{5}{2}$, und für

$y = -1$ wird $x = +2$ oder $-\frac{5}{2}$; aber $\frac{5}{2}$ und $-\frac{5}{2}$ entsprechen der Gleichung 2) nicht. Sonach hat die Aufgabe vier Auflösungen:

$x_1 = +\sqrt{5}$ und $y_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{5}$ und $y_2 = 0$,

$x_3 = -2$ und $y_3 = +1$, endlich $x_4 = +2$ und $y_4 = -1$.

Eine Gleichung zwischen zwei oder mehr Unbekannten heißt symmetrisch, wenn durch ein beliebiges Vertauschen der Unbekannten mit einander die Gleichung ganz unverändert bleibt; z. B. $x^2 + y^2 = a$, $xy + xz + yz = b$. Für die Entwickelung der Unbekannten gewinnen die symmetrischen Gleichungen eine Bedeutung, wenn alle Gleichungen für diese Unbekannten (oder auch einen Theil derselben) symmetrische sind. Sind sie für alle Unbekannten symmetrisch, so braucht man nur eine Unbekannte x zu entwickeln; die andern Unbekannten haben dann dieselben Werthe, weil die Entwickelung vollständig dieselbe geblieben wäre, wenn man vorher x mit einer der andern Unbekannten y vertauscht und y statt x entwickelt hätte. Sind die Gleichungen nur in Bezug auf einen Theil der Unbekannten symmetrisch, z. B. in Bezug auf y und z, aber auf x nicht (vergl. Beisp. 10.), so hat man für jeden Werth von x nur eine der Unbekannten y und z zu finden, die andere hat dann wieder dieselben Werthe. Hiermit ist aber nicht gesagt, daß von diesen Werthen gleiche auch zusammengehörige Wurzeln sind. Hat man z. B. zwei symmetrische Gleichungen mit den Unbekannten x und y, und ergeben sich für x die Werthe α und β, so hat zwar y auch die Werthe α und β, aber für $x = \alpha$ braucht nicht auch $y = \alpha$ zu sein; in der Regel ist, wenn $x = \alpha$ oder β ist, dann umgekehrt $y = \beta$ oder α; es hängt dies von den Werthen der bekannten Zahlen ab, die allerdings bedingen können, daß $x = y$ ist. z. B.

$$1)\quad x^2 + y^2 = 2a^2$$
$$2)\quad xy = a^2.$$

Setzt man den Werth von y aus 2) in 1) ein, so entsteht:

$$x^2 + \frac{a^4}{x^2} = 2a^2 \text{ oder geordnet:}$$

$$x^4 - 2a^2x^2 + a^4 = 0; \text{ woraus folgt:}$$

$$x = \pm a.$$

Dieselben Werthe hat nun auch y, weil beide Gleichungen symmetrische sind. Im vorliegenden Falle sind zusammengehörig:

$x_1 = a$ und $y_1 = a$, sowie $x_2 = -a$ und $y_2 = -a$.

Es ist also $x = y$, und auf diese Gleichung kann man durch eine zweckmäßige Behandlung der gegebenen Gleichungen immer kommen

(vergl. die Aufl. im nächsten Beispiel und im Beispiel 3.). — Das folgende Beispiel zeigt sowohl den Fall, in welchem $x = y$ ist, als auch den, in welchem x und y verschiedene Werthe haben, die man mit einander vertauschen kann.

Beispiel. 1) $x^2 + y^2 - x - y = 12$
2) $xy = 9.$

Multiplicirt man die zweite Gleichung mit 2 und addirt sie dann zur ersten, so entsteht:

$$(x+y)^2 - (x+y) - 30 = 0; \text{ folglich}$$

$$x + y = \begin{cases} +6 \text{ und} \\ -5. \end{cases}$$

Für $x + y = 6$ folgt:

1) $x^2 + y^2 = 18$
2) $2xy = 18$

$$(x-y)^2 = 0$$
$$x = y$$

daher aus 1) oder 2:

$$x = y = \pm 3.$$

Für $x + y = -5$ folgt:

1) $x^2 + y^2 = 7$
2) $2xy = 18$

$$(x-y)^2 = -11.$$
$$x - y = \pm i\sqrt{11}$$
$$x + y = -5$$
$$2x = -5 \pm i\sqrt{11}$$
$$2y = -5 \mp i\sqrt{11}.$$

Die Aufgabe hat also folgende vier Auflösungen:

$x_1 = +3$ und $y_1 = +3$; $x_2 = -3$ und $y_2 = -3$;

$$x_3 = \frac{-5 + i\sqrt{11}}{2} \text{ und } y_3 = \frac{-5 - i\sqrt{11}}{2};$$

$$x_4 = \frac{-5 - i\sqrt{11}}{2} \text{ und } y_4 = \frac{-5 + i\sqrt{11}}{2}.$$

Haben Gleichungen mit zwei oder mehr Unbekannten die Eigenschaft, daß sie unverändert bleiben, wenn man die Unbekannten, zugleich aber auch gewisse gegebene Zahlen mit einander vertauscht, so heißen sie symmetrisch in Bezug auf diese bekannten Zahlen; z. B. 1) $x + y = a$
2) $nx + my = b.$

Diese Gleichungen sind symmetrisch in Bezug auf n und m. Entwickelt man x, so findet man y aus dem erhaltenen Werthe von x, wenn man y statt x setzt, aber auch n und m mit einander vertauscht. Man erhält:

$$mx + my = ma$$
$$nx + my = b$$
$$(m-n)x = ma - b; \text{ folglich}$$
$$x = \frac{ma - b}{m - n},$$

daher, wenn man n mit m vertauscht:

$$y = \frac{na - b}{n - m}.$$

In den folgenden Beispielen sind besonders die Fälle berücksichtigt worden, welche in den Anwendungen der Algebra häufig wiederkehren.

Beispiel 1. 1) $xy = a$; 2) $\frac{x}{y} = b$.

Auflös. Multiplicirt man 1) mit 2) und dividirt dann 1) durch 2), so folgt $x = \pm\sqrt{ab}$, $y = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$, und zwar beide Wurzeln +, oder beide —.

Beispiel 2. 1) $x + y = a$; 2) $xy = b$.

Auflös. Quadrirt man 1) und zieht Gleichung 2), nachdem sie mit 4 multiplicirt ist, ab, so entsteht 3) $x - y = \pm\sqrt{a^2 - 4b}$. Aus 1) und 3) folgt jetzt $x = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4b})$; folglich aus 1) $y = \frac{1}{2}(a \mp \sqrt{a^2 - 4b})$. Da die gegebenen Gleichungen symmetrisch sind, so stimmen die Werthe von x und y mit einander überein; nur muß man, wenn in x die Quadratwurzel positiv genommen wird, sie in y negativ nehmen, und umgekehrt.

Anmerk. Eine kürzere Auflösung ergiebt sich aus §. 157. I. Die Wurzeln einer geordneten quadratischen Gleichung geben addirt, den entgegengesetzten Factor des zweiten Gliedes, multiplicirt, das letzte Glied. Hieraus folgt, daß x und y die Wurzeln der Gleichung $t^2 - at + b = 0$ sind, d. h. $\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ und $\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$. Ist z. B. der Inhalt eines Rechtecks gleich 27 □′, der Umfang gleich 24′, so sind die Seiten die Wurzeln der Gleichung $t^2 - 12t + 27 = 0$, also 9′ und 3′.

Beispiel 3. 1) $x^2 + y^2 = a$; 2) $xy = b$.

Auflös. Multiplicirt man 2) mit 2, addirt dann die Gleichung zu 1) und zieht sie nachher auch von 1) ab, so folgt:

3) $x + y = \pm\sqrt{a + 2b}$; 4) $x - y = \pm\sqrt{a - 2b}$; folglich

$$x = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{a + 2b} \pm \sqrt{a - 2b})$$

$$y = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{a + 2b} \mp \sqrt{a - 2b}).$$

Man kann die Vorzeichen der Quadratwurzeln in x beliebig, muß aber dann die in y so nehmen, wie sie durch ihre Stellung in beiden Ausdrücken markirt sind. Ist z. B. $x^2 + y^2 = 5$; $xy = 2$,

so folgt:
$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x = & +2 & +1 & -2 & -1 \\ \hline y = & +1 & +2 & -1 & -2 \end{array}$$

Beispiel 4. 1) $x^2 + xy + y^2 = a$

2) $x^2 + y^2 = b$.

Auflös. Zieht man 2) von 1) ab, so folgt:

3) $xy = a - b$.

Diese Gleichung in Verbindung mit 2) giebt x und y (vergl. Beispiel 3.).

Beispiel 5. 1) $x^2 - y^2 = a$; 2) $x - y = b$.

Auflös. Dividirt man 1) durch 2), so folgt:

3) $x + y = \frac{a}{b}$; folglich aus 2) und 3):

$$x = \frac{a + b^2}{2b};\ y = \frac{a - b^2}{2b}.$$

Beispiel 6. 1) $x^3 + y^3 = 10$; 2) $x + y = 2$.

Auflös. 1. Dividirt man 1) durch 2), so folgt:

3) $x^2 - xy + y^2 = 5$; jetzt 2) quadrirt:

4) $x^2 + 2xy + y^2 = 4$; 3) von 4) subtrahirt:

5) $xy = -\frac{1}{3}$.

Zieht man 5) von 3) ab, so folgt:

6) $x - y = \pm\sqrt{\frac{16}{3}} = \pm\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

Aus 6) und 2) folgt nun:

$x = 2{,}1547$ und $y = -0{,}1547$; oder umgekehrt.

Auflös. 2. Kubirt man 2) und zieht 1) ab, so folgt $3xy(x + y) = -2$ oder, für $x + y$ den Werth 2 gesetzt: $xy = -\frac{1}{3}$. Aus dieser Gleichung und aus 2) ergeben sich x und y.

Beispiel 7. 1) $x^2 + y^2 + x + y = a$; 2) $xy = b$.

Auflös. Multiplicirt man 2) mit 2 und addirt beide Gleichungen, so folgt $(x + y)^2 + (x + y) - (a + 2b) = 0$, folglich

3) $x + y = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4a + 8b}$.

Bezeichnet man diesen Werth mit f und zieht $2xy = 2b$ von 1) ab, so folgt: 4) $x - y = \pm\sqrt{a - 2b - f}$. Aus 3) und 4) sind x und y zu finden.

Beispiel 8. 1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $x + y = b$.

Auflös. Will man nicht einfach y aus 2) in 1) substituiren, so kann man 1) mit 2 multipliciren und von dieser Gleichung die quadrirte zweite Gleichung abziehen.

Es entsteht $x - y = \pm\sqrt{2a^2 - b^2}$, u. s. w.

Beispiel 9. 1) $x^2 = y^2 + z^2 - 2nyz$;

2) $x + y + z = a$; 3) $yz = b$.

Auflös. Addirt man in 1) zur rechten Seite $2yz - 2yz$, so folgt $x^2 = (y + z)^2 - 2(1 + n)yz$; substituirt man $y + z$ aus 2) und yz aus 3), so folgt:

$$x^2 = (a - x)^2 - 2(1 + n)b; \text{ folglich } x = \frac{a^2 - 2(1 + n)b}{2a}.$$

Durch Addition von $2yz - 2yz$ zur rechten Seite der Gleichung 1) erhält man aber auch $x^2 = (y - z)^2 + 2(1 - n)yz$, und da x gefunden und $yz = b$ ist, so kann man $y - z$ aus dieser Gleichung entwickeln, und mit Hülfe von 2) auch y und z.

Beispiel 10. 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 333$

2) $x - y - z = -2$

3) $xy + xz + yz = 285$.

Auflös. Multiplicirt man 3) mit 2 und addirt diese Gleichung dann zu 1), so folgt (bei abgekürzten Decimalbrüchen):

4) $x + y + z = \pm\sqrt{903} = \pm\ 30{,}0500$.

Addirt man 2) und 4), so folgt:

$$5)\quad x = \begin{cases} +14{,}025. \\ -16{,}025. \end{cases}$$

Zu jedem Werthe von x ergeben sich nun zwei Werthe für y und zwei für z; weil aber die drei gegebenen Gleichungen in Beziehung auf y und z symmetrisch sind, so ergeben sich jedesmal für z dieselben Werthe, wie für y, nur in umgekehrter Ordnung. Um aber y und z zu finden, hat man aus 2):

6) $y + z = x + 2$.

$y \cdot z$ kann man aus 3) finden; bequemer aber ist es, man multiplicirt 1) mit -1, quadrirt 2) und multiplicirt 3) mit 2; addirt man jetzt alle drei Gleichungen, so entsteht $4yz = 241$, folglich:

7) $yz = 60{,}25$.

Aus 6) und 7) ergeben sich y und z, wenn man in 6) für x den gefundenen Werth setzt. Die Auflösung ist:

x =	+ 14,0250	+ 14,0250	— 16,0250.
y =	+ 9,99997	+ 6,02503	$-7{,}0125 \pm 3{,}3279 \cdot \sqrt{-1}$.
z =	+ 6,02503	+ 9,99997	$-7{,}0125 \mp 3{,}3279 \cdot \sqrt{-1}$.

Beispiel 11. 1) $x^2 + \frac{8}{3}xy - y^2 - 2x + 1 = 0$
2) $x + 3y - 5 = 0$.

Setzt man x oder y aus 2) in 1), so entsteht jedesmal eine Gleichung vom ersten Grade. Man erhält:

$$x = \tfrac{1}{2};\quad y = \tfrac{3}{2}.$$

Allerdings ergeben sich für den gefundenen Werth von x aus 1) zwei Werthe für y, und für den gefundenen Werth von y zwei Werthe für x; aber nur für die oben angegebenen Wurzeln der Gleichungen wird 2) eine identische Gleichung, so daß die Aufgabe nur eine Auflösung hat.

§. 160.

Uebungen.

1) In der geordneten quadratischen Gleichung $x^2 + ax + \ldots = 0$ ist das letzte Glied unleserlich geschrieben. Wenn nun b eine Wurzel der Gleichung ist, wie groß ist die andere, und wie heißt das letzte Glied?

Auflös. Die andere Wurzel $= -a - b$; das letzte Glied $= -ab - b^2$.

2) Gegeben $\frac{xy}{z} = a$; $\frac{xz}{y} = 2a$; $\frac{yz}{x} = 3a$; gesucht x, y und z.

Auflös. $x = a\sqrt{2}$, $y = a\sqrt{3}$, $z = a\sqrt{6}$; alle drei Werthe +, oder auch zwei beliebige —, aber der dritte dann +.

3) Für welche Werthe von x ist $\sqrt{18 + 59x - 14x^2}$ reell, für welche imaginär?

Auflös. Reell für $x = -\frac{2}{7}$ bis $x = 4\frac{1}{2}$; für alle anderen Werthe von x imaginär.

4) Folgenden Bruch zu heben: $\frac{12 - 43x + 35x^2}{28 - 23x - 15x^2}$.

Auflös. $\frac{3 - 7x}{7 + 3x}$.

5) Für welchen Werth von x nimmt der Quotient $\frac{2 - 9x - 18x^2}{3 - 16x - 12x^2}$ die Form $\frac{0}{0}$ an, und welchen Werth hat der Quotient selbst in diesem Falle?

Antw. Für $x = \frac{1}{6}$; der Werth der Quotienten ist alsdann $= \frac{3}{4}$.

6) Für welchen Werth von x bleibt der Ausdruck $\frac{2 + 5x + 2x^2}{1 + 3x + 2x^2}$ unverändert?

Auflös. Setzt man $\frac{2+5z+2z^2}{1+3z+2z^2} = \frac{2+5x+2x^2}{1+3x+2x^2}$ und ordnet die Gleichung nach z, so folgt:

$$z^2 + \frac{1-2x}{2} z - \frac{x}{2} = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $z = x$, daher die andere nach §. 157. Anm. gleich $-\frac{1}{2}$. Die Auflösung sagt also, daß der Ausdruck $\frac{2+5x+2x^2}{1+3x+2x^2}$ nicht nur unverändert bleibt, wenn man x unverändert läßt, sondern auch, wenn man $-\frac{1}{2}$ statt x setzt. Dies kann nur den Sinn haben, daß entweder der Ausdruck sich so umformen läßt, daß x herausfällt, daß also der Nenner in den Zähler aufgeht und der Quotient von x unabhängig ist (was aber nicht der Fall ist), oder daß der Ausdruck für $x = -\frac{1}{2}$ eine Form annimmt, in welcher er dem Ausdrucke für jeden Werth von x gleich sein kann. Eine solche Form nimmt er aber wirklich an, nämlich die Form $\frac{0}{0}$; daher ist der Zähler und Nenner durch $x + \frac{1}{2}$ oder $2x + 1$ theilbar $\left(\text{es entsteht } \frac{2+x}{1+x}\right)$, und der gehobene Bruch bleibt nur unverändert, wenn man x unverändert läßt. (§. 152. Anm. 1.)

7) Wenn eine Zahl, um ihre Reciproke vermehrt, a giebt, welchen Werth giebt sie, wenn man sie um ihre Reciproke vermindert? (Nach einer Aufgabe von J. Rogner. Aufg.-Samml. 2. Aufl. No. 2550.)

Auflös. Aus $x + \frac{1}{x} = a$ und

$$x - \frac{1}{x} = y \text{ folgt:}$$

$$2x = a + y$$

$$\frac{2}{x} = a - y, \text{ folglich durch Multiplication:}$$

$$4 = a^2 - y^2;$$

daher $y = \pm\sqrt{a^2 - 4}$, je nachdem $x \gtrless \frac{1}{x}$ ist. — Hieraus folgt (worauf an der angeführten Stelle aufmerksam gemacht wird), daß $\sqrt{a^2-4}$ immer rational ist, wenn a sich in die Summe einer rationalen Zahl und ihrer Reciproken zerlegen läßt; z. B. $\sqrt{(2+\frac{1}{2})^2 - 4} = \pm(2 - \frac{1}{2}) = \pm\frac{3}{2}$

$$\sqrt{(\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{2})^2 - 4} = \pm(\tfrac{2}{3} - \tfrac{3}{2}) = \mp\tfrac{5}{6}$$

$$\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 - 4} = \pm\left(a - \frac{1}{a}\right).$$

8) Gegeben: 1) $ax + by = c$

2) $nx - my = d$;

es soll x entwickelt, der Werth von y aber aus dem von x abgeleitet werden.

Aufl. $x = \frac{mc + bd}{am + bn}$. Die gegebenen Gleichungen sind symmetrische, wenn man bei der Vertauschung von x und y zugleich a und b, so wie n und — m mit einander vertauscht; daher

$$y = \frac{(-n)c + ad}{b(-n) + a(-m)} = \frac{nc - ad}{bn + am}.$$

9) Gegeben: 1) $x + y + z = 1$
2) $ax + by + cz = d$
3) $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$;

es soll x entwickelt, die Werthe von y und z aber aus dem Werth von x abgeleitet werden.

Auflös. Eliminirt man zuerst z (am bequemsten nach §. 140. III. Anm. 1.) und dann y, so entsteht

$$x = \frac{(\gamma - \beta)(c - d) - (c - b)(\gamma - \delta)}{(\gamma - \beta)(c - a) - (c - b)(\gamma - \alpha)}.$$

Die gegebenen Gleichungen sind unter der Bedingung symmetrisch, daß man beim Vertauschen von x, y und z, entsprechend auch a, b und c, so wie α, β und γ mit einander vertauscht. Um nun y aus x zu finden, vertauscht man x mit y, so muß aber zugleich auch a und b, so wie α und β mit einander vertauschen. Um z aus x zu finden, vertauscht man x mit z, muß aber auch a und c, so wie α und γ mit einander vertauschen.

$$y = \frac{(\gamma - \alpha)(c - d) - (c - a)(\gamma - \delta)}{(\gamma - \alpha)(c - b) - (c - a)(\gamma - \beta)}$$

$$z = \frac{(\alpha - \beta)(a - d) - (a - b)(\alpha - \delta)}{(\alpha - \beta)(a - c) - (a - b)(\alpha - \gamma)}.$$

Die Nenner von y und z sind einander gleich, der Nenner von x hat den entgegengesetzten Werth; man überzeugt sich hiervon durch Auflösen der Klammern. — Bemerkt sei noch, daß man in dem Ausdruck für x noch b und c mit einander vertauschen kann, wenn man gleichzeitig β und γ mit einander vertauscht. In dem Ausdrucke für y kann man a und c, muß dann aber auch α und γ mit einander vertauschen; endlich in dem Ausdruck für z kann man a und b, muß dann aber auch α und β mit einander vertauschen. Der zweite Werth, den man auf diese Weise für y erhält (er ist natürlich dem ersten gleich), geht unmittelbar aus x hervor, wenn man in dem für x gefundenen Ausdruck a in b, b in c, c in a und zugleich α in β, β in γ, γ in α übergehen läßt; denn alsdann geht x in y, y in z und z in x über, also im vorliegenden Falle nur x in y, weil y und z in der Gleichung nicht enthalten sind. — Auf ähnliche Weise kann man auch den zweiten Ausdruck für z unmittelbar aus x ableiten (oder auch aus y).

10) Zwei Männer A und B machen zusammen eine Fußreise nach S, indem sie täglich gleichviel Meilen zurücklegen. Als der sechste Theil der zu ihrer Reise nöthigen Zeit verflossen ist, muß A Krankheits halber liegen bleiben. Da der Arzt ihn in 5 Tagen herzustellen hofft, sagt er zu B: „Gehe Du mit derselben Geschwindigkeit weiter; nach 5 Tagen breche ich auf, mache

täglich 3 Meilen mehr, als bisher, und werde so mit Dir zugleich in S ankommen." B reist hierauf weiter. A kann ihm aber erst nach 7 Tagen folgen; er nimmt Postpferde, macht täglich 10 Meilen und trifft mit B zugleich in S ein. Wie viel Tage waren A und B unterwegs und wie viel Meilen legte B täglich zurück?

Auflös. Sie waren entweder 14 Tage, oder 12 Tage unterwegs; B machte täglich im ersten Falle 4, im zweiten 3 Meilen. Der ganze Weg betrug 56, oder 36 Meilen.

11) $x^2 + xy - a = 0$ und $y^2 + xy - b = 0$.

Auflös. $x = \pm \frac{a}{\sqrt{a+b}}$, $y = \pm \frac{b}{\sqrt{a+b}}$, beide Werthe +, oder beide —.

12) Gegeben: 1) $x + y + z = 6$

2) $3x = 2yz$

3) $2x^2 = y^2 + z^2 - \frac{2}{3}yz$.

Auflös. $x = 2$ und entweder $y = 1$ und $z = 3$, oder $y = 3$ und $z = 1$; ferner

$x = -18$ und entweder $y = 25{,}076$ und $z = -1{,}076$,

oder $y = -1{,}076$ und $z = 25{,}076$.

13) Gegeben: 1) $3x^2 - 4z = 6y + 2$

2) $2z + x + 2x^2 = 3 + y$

3) $3y + 3z + 5 = 2x + x^2$.

Auflös. $x = 2$, $y = 3$, $z = -2$; oder $x = -40$, $y = 1389$, $z = -884$.

14) Gegeben: 1) $3x^2 + 2y^2 - 11 = 0$

2) $2x^2 + 2y^2 - 5xy = 0$.

Auflös. $x = \pm 1$ und $y = \pm 2$; oder $x = \pm 1{,}77281$ und $y = \pm 0{,}886405$; beide Werthe +, oder beide —.

15) Ein Kapital von 300 Thlr. ist durch die einfachen Zinsen in mehreren Jahren zu 408 Thlr. angewachsen. Hätte das Kapital 4 Jahre länger Zinsen getragen und 1 pCt. Zinsen (jährlich) mehr, so würden 498 Thlr. daraus geworden sein. Zu wie viel Procent und wie viel Jahre lang war das Kapital ausgeliehen?

Auflös. Entweder zu 2 pCt. 18 Jahr lang, oder zu $4\frac{1}{2}$ pCt. 8 Jahr lang.

16) Schließlich mag noch die ältere, anderweitig schon mitgetheilte Aufgabe vom Bacchus und Silen hier Platz finden. Bacchus findet den schlafenden Silen bei einem vollen Fasse. Bacchus trinkt hiervon während $\frac{3}{5}$ der Zeit, in welcher Silen dasselbe geleert haben würde; dann trinkt Silen den Rest. Hätten Beide zugleich getrunken, so würden sie 6 Stunden früher fertig geworden sein, und Bacchus hätte $\frac{2}{3}$ von dem bekommen, was er dem Silen übrig gelassen hatte. In wie viel Stunden würde hiernach jeder Einzelne das Faß leeren?

Auflös. Es möge Bacchus 5x, Silen 5y Stunden brauchen, das Faß aber a Quart enthalten. — Zuerst trinkt Bacchus in 3y Stunden $\frac{3ay}{5x}$ Quart; Silen trinkt den Rest $\left(a - \frac{3ay}{5x}\right)$ Quart in $\left(5y - \frac{3y^2}{x}\right)$ Stunden. Man findet diese Werthe leicht durch die Regel de tri. Beide zusammen leeren das Faß in $\frac{5xy}{x+y}$ Stunden, und Bacchus trinkt dann $\frac{ay}{x+y}$ Quart. Hieraus folgt der Ansatz:

$$1)\quad \frac{5xy}{x+y} = 3y + \left(5y - \frac{3y^2}{x}\right) - 6.$$

$$2)\quad \frac{ay}{x+y} = \frac{2}{3}\left(a - \frac{3ay}{5x}\right).$$

Die weitere Auflösung giebt: Bacchus leert das Faß allein in 15 Stunden, Silen in 10 Stunden.

§. 161.

Auflösung einiger transcendenten Gleichungen.

Im Allgemeinen sind transcendente Gleichungen durch die bisher entwickelten Lehren nicht auflösbar. Einzelne machen aber eine Ausnahme, indem sie sich mittelst der für Logarithmen bewiesenen Gesetze auf algebraische Gleichungen zurückführen lassen. Man pflegt sie daher auch häufig logarithmische Gleichungen zu nennen, unterscheidet aber auch zuweilen wieder Exponential-Gleichungen und logarithmische Gleichungen.

I. Exponential-Gleichungen enthalten die Unbekannte nur in einem Potenz- oder Wurzelexponenten. Der einfachste Fall ist:

$$a^x = b.$$

Diese Gleichung löst man auf, indem man von beiden Seiten den Logarithmus nimmt: $x \log a = \log b$, folglich $x = \frac{\log b}{\log a}$.

Kommt x in mehreren Exponenten vor, sind aber diese Potenzen (oder Wurzeln) mit einander oder mit bekannten Zahlen nur durch Multiplication oder Division verbunden, so führt dieselbe Behandlung immer zu einer algebraischen Gleichung. z. B. $a^x \cdot b^{x-1} = \frac{c}{d^x}$; man erhält:

$$x \cdot \log a + (x-1) \log b = \log c - x \log d,$$

folglich $$x = \frac{\log b + \log c}{\log a + \log b + \log d}.$$

Ferner sei gegeben $\sqrt[x]{a} = b \cdot c^{x-3}$, so folgt:

$$\frac{\log a}{x} = \log b + (x-3)\log c,$$

oder $$x^2 \log c - (3\log c - \log b)\,x - \log a = 0,$$

$$x^2 - \frac{3\log c - \log b}{\log c}\,x - \frac{\log a}{\log c} = 0.$$

z. B. 1) $2^x \cdot 3^{x-1} = 100$.

Auflös. Die gegebene Gleichung läßt sich umformen: $6^x = 300$; $x = 3{,}18334$.

2) A hatte dem B 580 Thlr. auf 1 Jahr geliehen. B gab ihm nach einem Jahre Kapital und Zinsen, zusammen 600 Thlr., zurück, wünschte aber jetzt von A eine größere Summe geliehen zu haben. Sie einigten sich dahin daß A dem B nicht nur die 600 Thlr. ließ, sondern ihm noch 2000 Thlr. unter der Bedingung zugab, daß die ganze Summe dem B zu eben so viel Procent, wie die erste Summe von 580 Thlr., zu Zinseszinsen überlassen bleiben solle. Als B das Kapital zurückzahlte, war es zu 3410 Thlr. angewachsen; nach wie viel Jahren geschah dies?

Auflös. Nach 8 Jahren, aus der Gleichung $\left(\frac{30}{29}\right)^x \cdot 2600 = 3410$.

3) $\frac{2^x}{\sqrt[x]{5}} = 10$; $x = \begin{cases} +3{,}915011. \\ -0{,}593083. \end{cases}$

4) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \sqrt[x]{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt[4]{3})^{3x-4}$.

Auflös. $x = +2$ und $x = -0{,}1294$.

Man erhält eine quadratische Gleichung und aus dieser

$$x = \frac{6\log 2}{8\log 2 - \log 3} \pm \frac{10\log 2 - 2\log 3}{8\log 2 - \log 3}, \text{ u. s. w.}$$

Zuweilen sind auch die Potenzen, welche x im Exponenten haben, durch + oder — verbunden, lassen sich aber so zusammenziehen, daß die Gleichung sich auf die eben betrachtete Form reducirt. z. B.

5) $2^{x-1} + 3^{x+1} = 3^{x-1} + 2^{x+2}$.

Auflös. $\frac{1}{2} \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x = \frac{1}{3} \cdot 3^x + 4 \cdot 2^x$; hieraus $16 \cdot 3^x = 21 \cdot 2^x$; $x = 0{,}67067$.

6) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$; $x = -\frac{1}{2}$.

Ist dies aber nicht der Fall, so kann es zuweilen gelingen, wenn man eine x im Exponenten enthaltende Potenz durch y bezeichnet, alle anderen durch y, y^2, y^3, u. s. w. auszudrücken. Die Gleichung wird dann in Beziehung auf y a l g e b r a i s c h. z. B.:

7) $0{,}25^{1-x} = 3 \cdot 2^x - 5$.

Auflös. Es ist $0,25^{1-x} = 4^{x-1}$, und setzt man $2^x = y$, so folgt $y^2 - 12y + 20 = 0$. Es entsteht $y = 2$ oder $y = 10$, folglich $x = 1$ oder $x = 3,3219$.

8) $4^{x+1} + 16^{x-1} = 1536$; $x = \frac{7}{2}$ und $x = \overset{4}{\log}(-192)$.

9) $101 \cdot 3^{2-x} - 90 = \frac{10}{9^{x-1}}$; $x = \pm 2,0959$.

Alle solche Gleichungen haben aber in Bezug auf praktische Anwendungen sehr geringen Werth; es kommt fast nur der einfachste Fall $a^x = b$ vor. Die transcendenten Gleichungen, auf welche man bei Anwendungen kommt, sind in der Regel nicht auf algebraische zurückzuführen. — Dasselbe gilt von den folgenden Gleichungen.

II. Logarithmische Gleichungen, d. h. Gleichungen, in welchen die Unbekannte in einem Logarithmand, oder in der Basis eines Logarithmus vorkommt. Bezeichnen y und z Ausdrücke, welche x enthalten, oder enthält wenigstens der eine x, so ist die Auflösung der hier gemeinten Gleichungen durch folgende Umformung angegeben:

Aus $\overset{z}{\log} y = a$ folgt $z^a = y$; ist aber $z = 10$, so folgt aus $\log y = a$ (wenn man zu a den Numerus sucht): $y = \text{Num}(a)$.

z. B. 1) $\overset{x^3+1}{\log} 200 = 160$.

Auflös. $(x^3+1)^{160} = 200$, $x^3 + 1 = \pm\sqrt[160]{200}$, u. s. w. $x = 0,322906$ oder $x = -1,26695$.

2) $\overset{2-x}{\log}(3 - \frac{2}{3}x) = 2$; $x = 3$ und $x = \frac{1}{3}$.

3) $\log\left(\frac{2-x}{2+x}\right) + 0,25 = 0$; $x = 0,56026$.

4) $\log\left(\frac{2,7}{5,1-x}\right) + 0,097 = 0$; $x = 1,7243$. Man setzt hier bequemer $\log \frac{2,7}{5,1-x} = \log 2,7 - \log(5,1-x)$.

5) $\log(x+1) - \frac{1}{2} = \log x - 0,3 - \log(x-1)$. Zieht man die Logarithmen in einen Logarithmus zusammen, so entsteht $\log\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = 0,2$ u. s. w. $x = 2,068366$ oder $x = -0,483474$.

6) $\overset{x+2}{\log} 9 = \log\left(\frac{200+100x}{3}\right)$.

Auflös. $\frac{\log 9}{\log(x+2)} = \log 100 - \log 3 + \log(x+2)$; folglich $[\log(x+2)]^2 - \log 0,03 \cdot \log(x+2) - \log 9 = 0$, u. s. w. Man erhält $x = +1$ und $x = -1,99$.

Uebungs-Aufgaben.

1) $4 \cdot 2^{x+1} = 8^{x-1}$; Auflös. $x = 3$.

2) $2^{x+1} \cdot \sqrt[x]{4} = \frac{30}{2^{2x-1}}$. Auflös. $x = \begin{cases} 0{,}864232 \\ 0{,}771388. \end{cases}$ oder

3) $2^x - 4 = 5 \cdot 2^{-x}$.

Auflös. $x = 2{,}321928$ oder $x = \overset{2}{\log}(-1)$.

4) $2 + \log(2 + x) = 3{,}5 + \log x$. Auflös. $x = 0{,}0653108$.

5) $4^{x-1} + 9^x = 4^{x+1} - 9^{x-1}$. Auflös. $x = 1{,}5$.

6) $7 + 2^{x+1} = 1 + 2^{2x-1}$.

Auflös. $x = 2{,}58496$ oder $x = \overset{2}{\log}(-2)$.

7) $3^{x+1} - 4^{x-1} = 4^x + 3^x$. Auflös. $x = 1{,}63376$.

8) $5^{x+2} + 400 \cdot 10^{2x-1} = 10^{2x+3} - 3 \cdot 5^{x+1}$.

Auflös. $x = -1{,}06086$.

9) $100 \cdot 3^x - 3^{2x+1} = 300$.

Auflös. $x = 3{,}095903$ oder $x = 1{,}095903$. Wenn der erste Werth von x berechnet ist, kann man aus ihm den zweiten ableiten.

10) $0{,}339 + 2\log x - \log(5 - x) = 0{,}4 + \log(5 + x)$.

Auflös. $x = 3{,}657378$.

11) $\frac{2 + 4^x}{3} = \frac{2^{2x+1} - 1}{4^x}$. Auflös. $x = 0{,}792481$ oder $x = 0$.

12) $36 + 4^{x-1} = 2^{2x+3} - 26$. Auflös. $x = 1{,}5$.

Drittes Kapitel.

Die diophantischen Gleichungen.

§. 162.

Jede Aufgabe ist eine **unbestimmte** oder **diophantische**, wenn sie mehr Unbekannte enthält, als Gleichungen liefert. Solche Aufgabe gestattet unendlich viele Auflösungen (§. 139.), **deren Anzahl aber durch Nebenbedingungen beschränkt werden kann**; z. B.: die Unbekannten sollen rationale, oder ganze, oder ganze positive Zahlen sein. Sollen z. B. x und y positive ganze Zahlen sein, so hat die Gleichung $x + y = 2$ nur **eine** Auflösung: $x = 1$ und $y = 1$; die Gleichung $3x + 5y = 9$ aber gar keine. Gerade diese Nebenbedingungen machen eine besondere Behandlung der diophantischen Gleichungen nöthig und ihre Auflösung oft schwer. **Bei den einfachen diophantischen Gleichungen sollen immer nur diejenigen Werthe der Unbekannten gesucht werden, welche positive ganze Zahlen sind** (auch nicht Null, wenn dieser Werth

nicht ausdrücklich zugelassen wird). Bei den übrigen Gleichungen sollen die Nebenbedingungen besonders angegeben werden. Da m Gleichungen mit $n + m$ Unbekannten auf eine Gleichung mit $n + 1$ Unbekannten zurückzuführen sind, so werden wir theoretisch nur den Fall behandeln: eine Gleichung mit mehr als einer Unbekannten. Suchen wir nur ganze Werthe der Unbekannten, so sollen die Coefficienten der Gleichung a, b, c, ... immer ganze Zahlen vorstellen; d. h. wir denken uns alle Nenner aus der Gleichung fortgeschafft.

§. 163.

Eine einfache Gleichung mit zwei Unbekannten.

Die einfachste Form ist die, in welcher eine Unbekannte den Coefficienten 1 hat: $x + ay = b.$
Hieraus folgt: $x = b - ay$, und wir können für y jetzt alle Zahlen 1, 2, 3, ... setzen, für welche x positiv wird. Je nachdem a positiv, oder negativ ist, hat also $x + ay = b$ eine beschränkte, oder unbeschränkte Anzahl von Auflösungen. z. B. $x + 4y = 19$. Hieraus: $x = 19 - 4y$, und man kann für y setzen: 1, 2, 3 und 4; x wird resp. 15, 11, 7 und 3.

Betrachten wir jetzt die Gleichung

$$ax + by = c.$$

Wir können a und b relativ prim annehmen; denn haben a und b den gemeinschaftlichen Factor α, und hat ihn c auch, so können wir durch α heben; hat ihn c nicht, so hat auch $ax + by = c$ keine Auflösung, weil für ganze Werthe von x und y die linke Seite immer eine durch α theilbare Zahl wird.

Behufs der Auflösung führen wir $ax + by = c$ auf den ersten Fall zurück, d. h. wir verwandeln die Gleichung in eine andere mit zwei Unbekannten, in welcher die eine Unbekannte den Coefficienten 1 hat. Der größeren Einfachheit wegen soll das Verfahren an einem Zahlen-Beispiele gezeigt werden; es kann dies um so mehr geschehen, weil der Grund und das Zweckmäßige des Verfahrens so in die Augen springen, daß man es unmittelbar auf jedes andere Beispiel übertragen kann. Es sei gegeben:

$$(1) \quad 15x - 11y = 53.$$

Man entwickele die Unbekannte, welche, wenn man vom Vorzeichen absieht, den kleinsten Coefficienten hat:

$$y = \frac{15x - 53}{11}$$

und suche nun zunächst die ganzen Werthe von x zu be-

stimmen, für welche $\frac{15x - 53}{11}$ eine ganze Zahl wird. Man sieht also vorläufig davon ab, daß x und y positiv werden sollen. Dividirt man aber mit 11 in jedes Glied des Zählers, so entsteht:

$$y = x - 4 + \frac{4x - 9}{11},$$

und die eben ausgesprochene Bedingung ist jetzt dahin vereinfacht, daß $\frac{4x - 9}{11}$ eine ganze Zahl werden soll; denn $x - 4$ ist für jeden ganzen Werth von x auch eine ganze Zahl. Man führt jetzt eine Hülfs-Unbekannte ein, indem man den ganzen Werth, welchen $\frac{4x - 9}{11}$ haben soll, etwa durch a bezeichnet; man setzt also $\frac{4x - 9}{11} = a$, so ist

$$(2) \quad 4x - 9 = 11a.$$

Vergleicht man (2) mit (1), so sieht man, daß man dem Ziele: eine Gleichung zwischen zwei Unbekannten zu erhalten, in welcher der Coefficient der einen Unbekannten 1 ist, sich bereits genähert hat; denn in (1) waren 15 und 11 die Coefficienten, in (2) sind es 4 und 11. In der weiteren Auflösung wird nun das eben gezeigte Verfahren so oft wiederholt, bis der erwähnte Zweck erreicht ist.

Aus (2) folgt $x = \frac{11a + 9}{4} = 2a + 2 + \frac{3a + 1}{4}$.

Setzt man $\frac{3a + 1}{4} = b$, so daß die Hülfs-Unbekannte b wieder eine ganze Zahl vorstellt, so ist

$$(3) \quad 3a + 1 = 4b.$$

Die Coefficienten sind wieder kleiner geworden; sie sind jetzt 3 und 4. Aus (3) folgt:

$$a = \frac{4b - 1}{3} = b + \frac{b - 1}{3}.$$

Setzt man $\frac{b - 1}{3} = c$, so folgt:

$$(4) \quad b = 3c + 1.$$

Wir haben jetzt unsern Zweck erreicht. In (4) hat die Unbekannte b den Coefficienten 1, d. h. b wird für jeden ganzen Werth von c, und auch für $c = 0$, eine ganze Zahl; folglich werden auch für jeden solchen Werth von c, wenn man die Rechnung rückwärts verfolgt, a, x und y ganze Zahlen. Nun sollen aber x und y auch *positive* Zahlen sein. Anstatt jetzt für c einen beliebigen Werth zu setzen und für diesen b, dann a, dann x und endlich y auszurech-

nen [mittelst der Gleichungen (4), (3), (2) und (1)], um zu erfahren, ob x und y auch positiv werden, ist es bequemer, x und y durch die letzte Hülfs-Unbekannte c selbst (als Buchstaben) auszudrücken, weil man dann leicht im Stande ist, die Werthe von c anzugeben, für welche x und y positiv werden. Setzt man also $b = 3c + 1$ in (3) ein, so erhält man a durch c ausgedrückt; diesen Werth von a setzt man in (2) ein, so findet man x, und seinen Werth setzt man in (1) ein, so findet man y. Es entsteht:

$$b = 3c + 1$$
$$a = 4c + 1$$
$$x = 11c + 5$$
$$y = 15c + 2.$$

Statt der Gleichungen (3), (2), (1) nimmt man besser noch die ihnen folgenden Gleichungen, in denen a, x, y schon entwickelt erscheinen. Aus $x = 11c + 5$ und $y = 15c + 2$ erkennt man nun, daß c nicht negativ sein kann; man hat also für c Null und alle positiven ganzen Zahlen zu setzen. Die Aufgabe hat unendlich viele Auflösungen:

c =	0	1	2	3	4	5	u. s. w.
x =	5	16	27	38	49	60	u. s. w.
y =	2	17	32	47	62	77	u. s. w.

Die Werthe von x steigen immer um 11, die von y um 15.

Die Auflösung wird bei dem angegebenen Verfahren um so kürzer, je schneller man zu kleinen Coefficienten gelangt. Diesen Zweck kann man auf zwei Arten zu erreichen suchen; nämlich

1) dadurch, daß man bei der Division auch negative Reste zuläßt. Erhält man z. B.

$$y = \frac{19x + 18}{11}, \text{ so giebt die Division:}$$

$$y = x + 1 + \frac{8x + 7}{11};$$

vortheilhafter aber ist es, zu sagen: 11 in 19x geht 2x mal, bleibt der Rest $-3x$. Dann entsteht:

$$y = 2x + 1 + \frac{7 - 3x}{11}.$$

Bei diesem Falle sei auch noch darauf aufmerksam gemacht, daß, wenn in dem Reste die Unbekannte das Vorzeichen — hat, die weitere

Rechnung, namentlich dem Anfänger, in der Regel etwas erleichtert wird, wenn man das Vorzeichen — vor den ganzen Bruch setzt. Man würde also lieber sagen:

$$y = 2x + 1 - \frac{3x - 7}{11}.$$

Auch bei der Division in das bekannte Glied (18) kann man auf diese Weise verfahren, also

$$y = 2x + 2 - \frac{3x + 4}{11}$$

setzen; der Einfluß auf die weitere Rechnung ist aber hier nur in einzelnen Fällen erfolgreich, namentlich in dem jetzt folgenden Falle.

2) Eine Abkürzung wird ferner erreicht, **wenn aus dem Zähler des Restes ein gemeinschaftlicher Factor sich absondern läßt.** Erhält man z. B.

$$y = \frac{22x - 19}{9},$$

so giebt das gewöhnliche Verfahren:

$$y = 2x - 2 + \frac{4x - 1}{9}.$$

Bequemer aber ist es hier, $19 = 27 - 8$ zu setzen, wodurch

$$y = 2x - 3 + \frac{4x + 8}{9} = 2x - 3 + 4 \cdot \frac{x + 2}{9}$$

entsteht. Setzt man jetzt $\frac{x + 2}{9} = a$, so hat man unmittelbar eine Gleichung, in welcher die eine Unbekannte (x) den Factor 1 hat.

Es soll jetzt gezeigt werden, wie diese beiden Abkürzungen in dem oben durchgeführten Beispiele 1. zur Anwendung kommen können.

Die erste Abkürzung läßt sich bei der Gleichung

$$(2) \quad 4x - 9 = 11a$$

anbringen. Entwickelt man x, so folgt $x = \frac{11a + 9}{4}$, und dividirt man nun, indem man 11a in $12a - a$ zerlegt, so entsteht:

$$x = 3a + 2 - \frac{a - 1}{4}.$$

Setzt man $\frac{a - 1}{4} = b$, so folgt $a = 4b + 1$, und man hat also nicht nöthig, noch die dritte Hülfs-Unbekannte c einzuführen.

Die zweite Abkürzung kann gleich am Anfange der Auflösung geschehen, wenn man 53 in $55 - 2$ zerlegt. Die vollständige Auflösung ist dann folgende:

$$15x - 11y = 53.$$

Auflösung.

$$y = \frac{15x - 53}{11} = x - 5 + \frac{4x + 2}{11} = x - 5 + 2 \cdot \frac{2x + 1}{11};$$

$\frac{2x + 1}{11} = a$ gesetzt, folgt $x = \frac{11a - 1}{2} = 5a + \frac{a - 1}{2}$;

$\frac{a - 1}{2} = b$ gesetzt, folgt $a = 2b + 1$; daher:

$$x = 11b + 5$$
$$y = 15b + 2.$$

Das Resultat ist das oben gefundene, man hat es aber, anstatt durch drei, durch nur zwei Hülfs-Unbekannte erlangt.

Beispiel 2. $9x + 25y = 122$.

Auflös. Die Aufgabe hat nur eine beschränkte Anzahl von Auflösungen, weil die beiden Glieder, welche x und y enthalten, durch + verbunden sind. Entwickelt man x, so folgt:

$$x = 14 - 3y + \frac{2y - 4}{9} = 14 - 3y + 2 \cdot \frac{y - 2}{9}.$$

Setzt man $\frac{y - 2}{9} = a$, so folgt $y = 9a + 2$; folglich

$$x = 8 - 25a.$$

Zur Bestimmung der hier zulässigen Werthe von a ergeben sich aus der Bedingung, daß x und y positiv sein sollen, zwei Grenzwerthe, zwischen denen a liegen muß.

Aus $9a + 2 > 0$ folgt $a > -\frac{2}{9}$.

Aus $8 - 25a > 0$ folgt $a < +\frac{8}{25}$.

Es kann also, was man auch aus den beiden letzten Gleichungen unmittelbar erkennt, a nur Null sein; folglich hat die Aufgabe eine einzige Auflösung: $x = 8$, $y = 2$.

Beispiel 3. $7x + 17y = 408$.

Auflös. Am kürzesten wird die Auflösung, wenn man $\frac{408}{7}$ in $57 + \frac{9}{7}$ zerlegt. Es entsteht:

$$x = \frac{408 - 17y}{7} = 57 - 2y - \frac{3y - 9}{7} = 57 - 2y - 3 \cdot \frac{y - 3}{7}.$$

Setzt man $\frac{y - 3}{7} = a$, so folgt $y = 7a + 3$; daher

$$x = 51 - 17a.$$

Zur Bestimmung der Grenzen, zwischen welchen a liegen muß, wenn x und y positive Zahlen sein sollen, hat man:

$$7a + 3 > 0; \text{ folglich } a > -\frac{3}{7}$$

$$51 - 17a > 0; \text{ folglich } a < +3.$$

Es kann also a nur die Werthe 0 und 1 und 2 haben, die Aufgabe selbst also drei Auflösungen. Man erhält:

a =	0	1	2
x =	51	34	17
y =	3	10	17

Läßt man bei dieser Aufgabe den Werth Null für x in y zu, so ändert sich nur die Bestimmung der Grenzen. Man hat dann:

$$7a + 3 > -1; \text{ folglich } a > -\frac{4}{7}$$

$$51 - 17a > -1; \text{ folglich } a < +3\tfrac{1}{17}.$$

Man erhält dann eine Auflösung mehr: $x = 0$, $y = 24$.

Beispiel 4. Jemand hat 10 Thlr. in zwei Geldsorten empfangen, in Preußischen Thalern und Oesterreichischen Gulden ($\frac{2}{3}$ Thlr.); wie viel Stücke jeder Art können es gewesen sein?

Auflös.

Thlr.	2	4	6	8
Guld.	12	9	6	3

Beispiel 5. Eine Anzahl Eier zählte Jemand nach Dutzenden, ein Anderer nach Mandeln, ein Dritter nach Viertel-Hunderten ab; dem Ersten blieben 5, dem Zweiten 8, dem Dritten 3 Eier übrig; wie viel Eier waren es?

Auflös. x Dtzd., y Mand., z Viertel-Hund.; dann ist die Anzahl der Eier gleich: $12x + 5 = 15y + 8 = 25z + 3$.

Aus $12x + 5 = 15y + 8$ folgt $x = y + \frac{y+1}{4}$.

$$\frac{y+1}{4} = a \text{ gesetzt, giebt } y = 4a - 1.$$

Daher die Anzahl der Eier, wenn sie nur nach Dutzenden und Mandeln abgezählt worden wären, gleich $15(4a - 1) + 8 = 60a - 7$.

Nun soll aber noch $60a - 7 = 25z + 3$ sein, folglich $z = 2a + 2 \cdot \frac{a-1}{5}$.

$$\frac{a-1}{5} = b \text{ gesetzt, folgt } a = 5b + 1.$$

Daher die Anzahl der Eier gleich $60(5b + 1) - 7 = 300b + 53$.

Setzt man b gleich 0, 1, 2, 3, 4, u. s. w., so folgt die Anzahl der Eier:

53, 353, 653, 953, 1253, u. s. w.

Beispiel 6. $12x + 17y = 214$.

Auflös. $x = \frac{214 - 17y}{12} = 17 - y - \frac{5y - 10}{12} = 17 - y - 5 \cdot \frac{y-2}{12}$.

Setzt man $\frac{y-2}{12} = a$, so folgt $y = 12a + 2$, und dann $x = 15 - 17a$.

Die Aufgabe hat nur eine Auflösung: $x = 15$, $y = 2$.

Beispiel 7. 276 Morgen Land so unter zwei Personen zu vertheilen, daß die eine lauter Stücke von 14 Morgen, die andere von 17 Morgen erhält.

Auflös. 10 Stücke zu 14 Morgen und 8 Stücke zu 17 Morgen.

Beispiel 8. Den Bruch $\frac{a}{bc}$ in die Summe zweier Brüche mit den Nennern b und c zu zerlegen.

Auflös. Aus $\frac{a}{bc} = \frac{x}{b} + \frac{y}{c}$ folgt: $cx + by = a$. Diese Gleichung zeigt: nur wenn b und c relativ prim sind, ist die Auflösung möglich (es sei denn, daß $\frac{a}{bc}$ sich heben ließe). Sollen x und y positiv sein, so ist die Auflösung nicht immer möglich; läßt man aber auch negative Werthe zu, so giebt es immer unendlich viele Auflösungen. z. B. Aus $\frac{7}{15} = \frac{x}{3} + \frac{y}{5}$ folgt $5x + 3y = 7$. Die weitere Auflösung führt zu den End-Gleichungen: $x = 3a - 1$ und $y = 4 - 5a$. Hieraus folgt, daß x und y nicht zugleich positiv sein können. Läßt man negative ganze Zahlen zu, so erhält man:

b =	0	1	−1	2	−2	u. s. w.
x =	−1	2	−4	5	−7	u. s. w.
y =	4	−1	9	−6	14	u. s. w.

Also $\frac{7}{15} = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{9}{5} - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} - \frac{6}{5} = \frac{14}{5} - \frac{7}{3} =$ ꝛc.

Beispiel 9. Jemand hat für 1750 Thlr. Pferde und Ochsen gekauft, jedes Pferd mit 100 Thlr. und jeden Ochsen mit 70 Thlr. bezahlt; wie viel Pferde und Ochsen waren es:

Auflös. Entweder 7 Pferde und 15 Ochsen, oder 14 Pferde und 5 Ochsen.

Beispiel 10. 1000 Thlr. wurden an Männer und Frauen vertheilt. Jeder Mann erhielt 23 Thlr., jede Frau 17 Thlr.; wie viel Männer und Frauen waren es?

Auflös. Entweder 8 Männer und 48 Frauen, oder 25 Männer und 25 Frauen, oder 42 Männer und 2 Frauen.

Beispiel 11. Jemand erhielt 91 Thlr. Gold ausgezahlt, und zwar in Frd'or. und Ducaten; jene wurden zu 5, diese zu 3 Thaler Gold gerechnet. Wie viel Stück von jeder Münze erhielt er?

Auflös. Die Auszahlung kann auf 6 verschiedene Arten geschehen sein.

Ducat.	27	22	17	12	7	2
Frd'or.	2	5	8	11	14	17

Beispiel 12. Eine Anzahl Eier zählte Jemand nach Dutzenden ab, da blieben ihm 3 übrig; ein Anderer zählte sie nach Mandeln ab, da blieben ihm 12 übrig; wie viel Eier waren es?

Auflös. $60 \cdot a - 33$ Eier, so daß nun für a jede positiv ganze Zahl gesetzt werden kann; z. B. 27, 87, 147, 207, ... Eier.

Beispiel 13. Wenn noch dieselben Eier ein Dritter nach Viertel-Hunderten abzählte und es blieben ihm 7 übrig, wie viel Eier waren es?

Auflös. $300b + 207$ Eier, also 207, 507, 807, 1107, ... Eier.

Beispiel 14. Welche Zahlen lassen, durch 9 und 7 dividirt, bezüglich die Reste 5 und 3?

Auflös. Alle Zahlen von der Form $63b - 4$; also, 59, 122, 185, 248, u. s. w.

Beispiel 15. Welche Zahlen (x) lassen, durch 4, 5 und 6 dividirt, bezüglich die Reste 1, 3 und 5?

Auflös. Aus 1) $x = 4y + 1$ und 2) $x = 5z + 3$ folgt zunächst, daß $x = 20a - 7$ ist. Setzt man 3) $20a - 7 = 6v + 5$, so folgt, daß alle Zahlen der verlangten Art die Form haben: $60b - 7$; also: 53, 113, 173, 233, u. s. w.

Beispiel 16. Jemand hat zwei Sorten Bleikugeln. Von der einen wiegt jede Kugel $1\frac{1}{3}$ Lth., und er besitzt über 50 Stück dieser Art; von der anderen wiegt jede Kugel $2\frac{1}{2}$ Lth., und von diesen besitzt er nur 25 Kugeln. Wie viel Kugeln muß er von jeder Sorte nehmen, um aus ihnen gerade 40 Kugeln, jede von $1\frac{3}{4}$ Lth. Gewicht, gießen zu können?

Auflös.

Kugeln zu $1\frac{1}{3}$ Lth.	45	30	15
Kugeln zu $2\frac{1}{2}$ Lth.	4	12	20

Beispiel 17. Drei ganze positive Zahlen geben addirt die Summe 20; multiplicirt man aber die erste Zahl mit 5, die zweite mit 8, die dritte mit 7, so ist die Summe gleich 141; welche Zahlen sind es?

Auflös.

x	1	2	3	4	5	6
y	3	5	7	9	11	13
z	16	13	10	7	4	1

Beispiel 18. Jemand hat 8löthiges, 12löthiges und 15löthiges Silber, jedes in Stücken von immer 1 Loth. Wie viele solcher Stücke muß er von jeder Sorte nehmen, um durch Schmelzen derselben 40 Loth 11löthiges Silber zu erhalten?

Auflös.

8 löth. Silb.	13	16	19	22 Stücke
12 " "	23	16	9	2 "
15 " "	4	8	12	16 "

Er kann aber auch nur 10 Lth. 8löthiges und 30 Lth. 12löthiges Silber nehmen.

Beispiel 19. $7x + 12y = 500$.

Auflös.

x	8	20	32	44	56	68
y	37	30	23	16	9	2

Man hat nur eine Hülfs-Unbekannte nöthig, wenn man $x = -y + 5 \cdot \frac{100 - y}{7}$ setzt.

Beispiel 20. Welcher Bruch ist, wenn man sowohl seinen Zähler, als auch seinen Nenner um 3 vermehrt, gleich $\frac{5}{8}$?

Auflös. Es giebt unendlich viele Brüche dieser Art:

$$\frac{2}{5}, \frac{7}{13}, \frac{12}{21}, \frac{17}{29}, \frac{22}{37}, \frac{27}{45}, \text{ u. s. w.}$$

Die Zähler steigen immer um 5, die Nenner um 8. (Man braucht nur eine Hülfs-Unbekannte.) — Diese Brüche ergeben sich ohne Hülfe der Algebra, wenn man Zähler und Nenner des Bruches $\frac{5}{8}$ nach einander mit 1, 2, 3, 4, u. s. w. multiplicirt und dann Zähler und Nenner jedes entstandenen Bruches um 3 vermindert.

Beispiel 21. Jemand will 50 Kugeln, jede $1\frac{1}{2}$ Lth. schwer, gießen. Er besitzt zwei Sorten Kugeln; von der einen wiegt jede Kugel $1\frac{1}{3}$ Lth., von der anderen $1\frac{3}{4}$ Lth; wie viel Kugeln jeder Art muß er nehmen?

Auflös.			
Kugeln zu $1\frac{1}{3}$ Lth.	51	30	9
Kugeln zu $1\frac{3}{4}$ Lth.	4	20	36

Beispiel 22. Jemand will 36 Kugeln von der Größe gießen, daß 16 auf ein Pfund gehen. Er hat zwei Sorten Kugeln; von der einen Sorte gehen 12, von der anderen 21 Kugeln auf das Pfund; wie viel Kugeln muß er von jeder Sorte nehmen?

Auflös.							
Kugeln, 12 auf's Pfd.	3	7	11	15	19	23	27
Kugeln, 21 auf's Pfd.	42	35	28	21	14	7	0

Anmerkung 1. Die Auflösung der Gleichung $ax + by = c$ kann auch mittelst der Kettenbrüche geschehen. Ist $\frac{\alpha}{\beta}$ der letzte Näherungswerth des Bruches $\frac{a}{b}$, so ist (§. 108. II.) $a \cdot \beta - b \cdot \alpha = \pm 1$. Multiplicirt man die Gleichung mit $\pm c$, so daß die rechte Seite c wird, und verbindet diese neue Gleichung noch mit $abp - bap = 0$ durch Addition oder Subtraction, wo p eine bestimmte, beliebig zu wählende ganze Zahl bezeichnet, so kann man immer die Form $ax + by = c$ erzeugen. Die entstandene Gleichung enthält a, b und c in derselben Stellung, wie die gegebene, und x und y sind durch p ausgedrückt. Beispiele werden das Verfahren noch deutlicher zeigen. Nehmen wir das Beispiel (1). (Seite 298): $15x - 11y = 53$.

Der letzte Näherungswerth von $\frac{11}{15}$ ist $\frac{3}{4}$; hieraus entnimmt man:

$15 \cdot 3 - 11 \cdot 4 = 1$; mit 53 multiplicirt:

$15 \cdot 159 - 11 \cdot 212 = 53$; addirt man jetzt

$15 \cdot 11p - 11 \cdot 15p = 0$, so folgt:

$15(11p + 159) - 11(15p + 212) = 53$; folglich ist:

$x = 11p + 159$; $y = 15p + 212$.

Damit x und y nicht negativ werden, muß $11p + 159 > 0$ und $15p + 212 > 0$ sein, also $p > -14\frac{5}{11}$ und $p > -14\frac{2}{15}$. Setzen wir daher $p = c - 14$, so können wir schließlich für c Null und alle positiven ganzen Zahlen wählen. Substituirt man aber $p = c - 14$ so entsteht:

$$x = 11(c - 14) + 159 = 11c + 5,$$
$$y = 15(c - 14) + 212 = 15c + 2.$$

Ganz dieselben Ausdrücke fanden wir in der ersten Auflösung dieser Aufgabe.

Nehmen wir noch Beispiel 2. (Seite 302):

$$9x + 25y = 122.$$

Der letzte Näherungswerth von $\frac{9}{25}$ ist $\frac{4}{11}$; hieraus:

$$9 \cdot 11 - 25 \cdot 4 = -1.$$

Multipliciren wir mit -122, so folgt:

$$-9 \cdot 1342 + 25 \cdot 488 = 122; \text{ hierzu addirt:}$$
$$9 \cdot 25p - 25 \cdot 9p = 0, \text{ so entsteht:}$$
$$9 \cdot (25p - 1342) + 25\,(488 - 9p) = 122; \text{ also ist:}$$
$$x = 25p - 1342 \text{ und } y = 488 - 9p.$$

Aus $25p - 1342 > 0$ folgt $p > 53\frac{17}{25}$.

Aus $488 - 9p > 0$ folgt $p < 54\frac{2}{9}$.

Es kann also nur $p = 54$ sein. Setzt man $p = 54 - c$, so folgt aber

$$x = 25 \cdot (54 - c) - 1342 = 8 - 25c,$$
$$y = 488 - 9 \cdot (54 - c) = 9c + 2.$$

Ganz dieselben Werthe fanden wir oben.

Man rechne nach dieser Methode noch das Beispiel: $2x + 3y = 17$.

Auflös.

$x =$	1	4	7
$y =$	5	3	1

Anmerkung 2. Läßt man für die Unbekannten auch negative ganze Werthe und Null zu, so fällt die Bestimmung der Grenzen fort; läßt man außer positiven ganzen Zahlen nur noch die Null zu, so muß man die Bestimmung der Grenzen ändern, wie im Beispiel 3. angegeben, oder man kann auch die Unbekannten mit $x - 1$ und $y - 1$ bezeichnen, statt mit x und y, so daß dann für x und y selbst nur positive ganze Werthe zulässig sind.

§. 164.

Eine einfache Gleichung mit mehr als zwei Unbekannten.

Die Auflösung ist zunächst gerade so, wie bei zwei Unbekannten; aber während zwei Unbekannte sich zuletzt durch einen Buchstaben ausdrücken ließen, der dann zwischen gewissen Grenzen zu wählen war, erhält man bei drei Unbekannten, diese durch zwei solche Buchstaben ausgedrückt; vier Unbekannte drücken sich durch drei solche Buchstaben aus, u. s. w. Diese Buchstaben können zum Theil auch die gesuchten Unbekannten selbst sein. Jetzt beginnt erst der schwierigere Theil der Auflösung; denn will man nicht probiren, also für diese Buchstaben beliebige Werthe setzen und es nun darauf ankommen lassen, ob x, y, ... positiv werden, sondern will man methodisch zu Werke gehen: so muß man die Grenzwerthe zu ermitteln suchen, zwischen welchen diese Buchstaben liegen müssen, um x, y, ... positiv zu machen. Die Grenzen-Bestimmung ist nicht immer leicht; wie man hierbei verfährt, soll für eine Gleichung mit drei Unbekannten erläutert werden; die Anwendung auf eine Gleichung mit noch mehr Unbekannten bietet keine besonderen Schwierigkeiten.

Sind x, y und z die drei Unbekannten, so entwickelt man zunächst die Unbekannte, welche den kleinsten Factor hat, dividirt wie bei einer Gleichung mit zwei Unbekannten, unter Beachtung der dort angegebenen Abkürzungen, setzt den Bruch-Rest gleich a und fährt so fort, bis alle Nenner fortgeschafft sind. Es mögen a und b die beiden Hülfs-Unbekannten sein, durch welche sich x, y und z ohne Nenner ausdrücken lassen; dann hat man drei Gleichungen von folgender Form:

$$1)\ x = \alpha + \beta a + \gamma b$$
$$2)\ y = \alpha' + \beta' a + \gamma' b$$
$$3)\ z = \alpha'' + \beta'' a + \gamma'' b.$$

In diesen Gleichungen sind die bekannten Zahlen α, β, γ, α' u. s. w. ganz, und zwar positiv oder negativ; zum Theil können sie auch Null sein. Jetzt geht man zur Bestimmung der Grenzen über, zwischen denen zunächst die eine der beiden Hülfs-Unbekannten a und b liegen muß, um x, y und z positiv zu machen, z. B. b. Hierzu braucht man die Abhängigkeit der Unbekannten x, y und z von b allein, und um diese zu erhalten, muß man a aus den Gleichungen oben eliminiren. Am bequemsten wendet man die englische Methode an; eliminirt man also a etwa aus 1) und 2), dann aus 1) und 3), so erhält man zwei Gleichungen von folgender Form:

$$4)\ nx + my = p + qb$$
$$5)\ n'x + m'z = p' + q'b.$$

Diese Gleichungen geben nun immer Grenzen für b, wenn die Factoren der linken Seite, also n, m, n' und m' positiv sind. Denn in diesem Falle ist der kleinste Werth, den die linke Seite in 4) annehmen kann, gleich $n + m$, in 5) gleich $n' + m'$ (für $x = y = z = 1$), und man hat daher die Bedingungen:

$$6)\ p + qb > n + m - 1$$
$$7)\ p' + q'b > n' + m' - 1.$$

Haben aber die beiden Glieder der linken Seite in 4) oder in 5) ungleiche Vorzeichen, so erhält man aus diesen Gleichungen keinen Grenzwerth für b. (Den Fall, in welchem beide Glieder negativ sind, kann man durch Multiplication mit -1 auf den ersten Fall zurückführen.) Hieraus ergiebt sich aber, daß es durchaus nicht gleichgültig ist, wie man die Gleichungen 1), 2) und 3), Behufs der Elimination von a, paarweise zusammen faßt. Einen Erfolg hat die Elimination nur, wenn sie durch Addition geschieht, also in beiden Gleichungen die Factoren von a ungleiche Vorzeichen haben. Haben also die Factoren von a in allen drei Gleichungen dasselbe Vor-

zeichen, so findet man keine Grenzen für b, und man kann dann durch Elimination von b die Grenzen für a zu finden suchen. Haben aber auch die Factoren von b in allen drei Gleichungen dasselbe Vorzeichen, so findet man auch für a keine Grenzwerthe. Uebrigens hat dann in beiden Fällen die Aufgabe unendlich viele Auflösungen, nur ist die Wahl von a und b durch die Bedingungen

$$8)\quad \alpha + \beta a + \gamma b > 0$$
$$9)\quad \alpha' + \beta' a + \gamma' b > 0$$
$$10)\quad \alpha'' + \beta'' a + \gamma'' b > 0$$

beschränkt.

Hat man nun die Grenzen für die eine Hülfs-Unbekannte b gefunden, z. B. $b > -1\frac{1}{2}$ und $b < 3\frac{3}{4}$, so daß b nur die Werthe -1, 0, $+1$, $+2$ und $+3$ haben kann, so geht man zur Bestimmung der Grenzen für die andere Hülfs-Unbekannte a über. Diese Grenzen sind immer leicht zu finden; sie ergeben sich unmittelbar aus den Ungleichungen 8), 9) und 10), und zwar muß man sie für jeden einzelnen Werth von b ermitteln. Hierbei erhält man aber im Allgemeinen drei verschiedene Grenzwerthe, und diese Grenzwerthe sagen entweder: a muß kleiner sein, als eine gewisse Zahl, oder: a muß größer sein, als eine solche Zahl. Bei drei Grenzwerthen muß aber der eine Fall zweimal vorkommen (z. B. $a > 1\frac{1}{3}$ und $a > 2\frac{1}{4}$), und dann muß man natürlich die engere Grenze ($a > 2\frac{1}{4}$) nehmen. Hält man nur die weitere Grenze inne so können von den Unbekannten x, y und z wohl zwei positiv werden, aber nicht alle drei. Der Fall, daß alle drei Grenzwerthe nach derselben Seite hin liegen (daß man z. B. erhält $a > -2$, $a > -1\frac{1}{3}$, $a > +1\frac{1}{4}$) kann hier nicht vorkommen, weil die Factoren von a nicht in allen drei Umgleichungen dasselbe Vorzeichen haben können; man würde sonst keine Grenzen für b gefunden haben.

Hervorzuheben ist noch der Fall, wenn in einer der Gleichungen 1) bis 3) die eine Hülfs-Unbekannte fehlt; die Gleichung giebt dann für die andere Hülfs-Unbekannte unmittelbar einen Grenzwerth. Heißt die Gleichung 1):

$$x = \alpha + \beta a$$

so folgt: $\alpha + \beta a > 0.$

Aus $x = 17 - 4a$ folgt z. B. $17 - 4a > 0$, also $a < 4\frac{1}{4}$. Aus $x = 17 + 4a$ folgt $17 + 4a > 0$, also $a > -4\frac{1}{4}$.

In Bezug auf das Operiren mit Ungleichungen sind die Regeln in §. 36. wohl zu beachten; namentlich sei auf folgenden Fall aufmerksam gemacht: Hat man

$$-33 - 5a > 0,$$

so folgt $$-5a > +33.$$
Schließt man jetzt: $$a > -\frac{33}{5},$$
so ist dieser Schluß falsch; es muß heißen $a < -\frac{33}{5}$. Denn jede Ungleichung bleibt nur richtig, wenn man beide Seiten durch dieselbe positive Zahl dividirt, aber nicht, wenn man durch eine negative dividirt (oder mit einer solchen multiplicirt). Am gerathensten ist es immer, das Glied, welches die Unbekannte enthält, wenn es positiv ist, auf seiner Seite zu lassen, wenn es aber negativ ist, es zunächst mit + auf die andere Seite zu setzen; also:

$$-33 - 5a > 0; \text{ folglich}$$
$$-33 > +5a; \text{ daher}$$
$$-\frac{33}{5} > a \text{ oder } a < -\frac{33}{5}.$$

Das Gesagte möge nun der Leser an den folgenden Beispielen 1. und 2. genau verfolgen; zunächst soll noch über einen besonderen, aber recht oft vorkommenden Fall gesprochen werden (vergl. Beisp. 3.).

Es ist möglich, daß man bei der Auflösung einer Gleichung mit drei Unbekannten nur eine Hülfs-Unbekannte braucht, und daß die andere durch eine der Unbekannten x, y und z selbst vertreten wird, z. B. durch z. In diesem Falle erhält man zwei Gleichungen von folgender Form:

$$x = \alpha + \beta a + \gamma z$$
$$y = \alpha' + \beta' a + \gamma' z.$$

Sind γ und γ' negativ, so erhält man für a unmittelbar Grenzwerthe, wenn man γz und $\gamma' z$ auf die linke Seite bringt und nun den kleinsten Werth sucht, den jetzt die linke Seite annehmen kann.

Hat man z. B.
$$x = 2 + 4a - 8z,$$
so folgt: $$8z + x = 2 + 4a; \text{ daher}$$
$$2 + 4a > 8, \text{ also } a > 1\tfrac{1}{2}.$$

Haben γ und γ' ungleiche Vorzeichen, so giebt die Gleichung, in welcher der Factor von z negativ ist, einen Grenzwerth für a; den anderen erhält man aus der Gleichung, welche durch Elimination von z aus beiden Gleichungen entsteht.

Sind aber beide Factoren von z positiv, so hat die Aufgabe immer unendlich viele Auflösungen, nur ist die Wahl von a und z durch die Bedingungen

$$\alpha + \beta a + \gamma z > 0$$
$$\alpha' + \beta' a + \gamma' z > 0,$$

so wie durch die Bedingung, daß $z > 0$ sein soll, beschränkt. Im Falle β und β' ungleiche Vorzeichen haben, kann man noch a eliminiren und erhält dann für z eine Grenze, nämlich z größer als eine gewisse Zahl, und diese Grenze gewinnt eine Bedeutung, wenn die Zahl gleich 1 oder größer als 1 ist.

Hat man z. B. die beiden Gleichungen:

$$x = -25 - 12a + 2z$$
$$y = 3 + 8a + 3z,$$

so folgt durch Elimination von a:

$$2x + 3y = -41 + 13z; \text{ daher:}$$
$$-41 + 13z > 4 \text{ oder}$$
$$z > 3\tfrac{6}{13}.$$

Es hat also z die Werthe 4, 5, 6, 7, u. s. w., und für jeden Werth von z hat man für a die Grenzen aus den Ungleichungen

$$-25 - 12a + 2z > 0 \text{ und } 3 + 8a + 3z > 0$$

zu entnehmen, wobei es sich dann nur fragt, ob diese Grenzen auch so weit aus einander liegen, daß ganze Werthe für a zwischen ihnen möglich sind. Dies ist hier für $z = 4$ nicht der Fall; denn aus

$$-25 - 12a + 8 > 0 \text{ folgt } a < -1\tfrac{5}{12} \text{ und aus}$$
$$3 + 8a + 12 > 0 \text{ folgt } a > -1\tfrac{7}{8};$$

zwischen $-1\frac{7}{8}$ und $-1\frac{5}{12}$ liegt aber keine ganze Zahl. Für $z = 5$ hingegen erhält man eine Auflösung; denn es folgt dann:

$$-25 - 12a + 10 > 0, \text{ daher } a < -1\tfrac{1}{4}, \text{ und}$$
$$3 + 8a + 15 > 0, \text{ daher } a > -2\tfrac{1}{4}.$$

Es liegt zwischen diesen Grenzen der Werth $a = -2$, für welchen dann $x = 9$ in $y = 2$ wird. — Für steigende Werthe von z rücken die Grenzen für a immer weiter aus einander; daher geben alle weiteren Werthe von z auch Auflösungen.

Endlich mag noch der Fall angeführt werden, wenn die eine Unbekannte in der gegebenen Gleichung den Factor 1 hat. Er bietet keine Schwierigkeiten und kann an einem Beispiele erläutert werden.

$$x + 7y + 3z = 40.$$

Hieraus folgt: $x = 40 - (7y + 3z)$,

und man kann nun y und z beliebig mit der Beschränkung wählen, daß $7y + 3z < 40$ sein muß, y und z selbst aber nicht kleiner als 1. Man kann also für y die Werthe 1, 2, 3, 4 und 5 setzen und für jeden Werth von y wieder z so wählen, daß die Grenzen $7y + 3z < 40$ inne gehalten wird. Für $y = 4$ muß z. B. $3z < 12$, also $z < 4$ sein; z kann also in diesem Falle nur die Werthe 1, 2 und 3 haben.

Will man für die Unbekannten den Werth Null zulassen, so kann man (wie schon in §. 163. Anm. 2. gesagt wurde) die Un-

bekannten mit $x-1$, $y-1$, $z-1$ bezeichnen; will man etwa noch den Werth -1 zulassen, so bezeichne man die Unbekannten mit $x-2$, $y-2$, $z-2$; sucht man etwa nur negative Werthe für die Unbekannten, so bezeichne man letztere mit $-x$, $-y$, $-z$; alle diese Fälle sind dann auf den zurückgeführt, in welchem x, y und z positiv sein sollen.

Beispiel 1. $11x+27y+15z = 277$.

Auflösung. Die Anzahl der Auflösungen ist eine beschränkte, weil die Glieder der linken Seite gleiche Vorzeichen haben. Entwickelt man x, so entsteht:

$$x = \frac{277-27y-15z}{11} = 25-2y-z-\frac{5y+4z-2}{11}.$$

Setzt man nun $\frac{5y+4z-2}{11} = a$, so folgt

$$z = \frac{11a-5y+2}{4} = 3a-y-\frac{a+y-2}{4}$$

$\frac{a+y-2}{4} = b$ gesetzt, folgt 1) $y = 4b-a+2$; daher:

2) $z = 4a-5b-2$

3) $x = 23-3a-3b$.

Um nun zunächst die Grenzen zu bestimmen, zwischen welchen b liegen muß, damit x, y und z positiv werden, muß man a aus diesen Gleichungen eliminiren, und zwar aus 1) und 2), sowie aus 2) und 3). Die Elimination aus 1) und 3) würde keinen Erfolg haben, weil die Factoren von a in diesen Gleichungen dasselbe Vorzeichen haben. Man erhält so die Gleichungen:

4) $4y+z = 11b+6$

5) $3z+4x = 86-27b$.

Aus 4) und 5) ergeben sich nun die Grenzen für b. Der kleinste Werth, den die linke Seite in 4) haben kann, ist 5; in 5) ist er 7; daher hat man

$11b+6 > 4$, folglich $b > -\frac{2}{11}$

$86-27b > 6$, folglich $b < +2\frac{26}{27}$.

Es kann also b nur die Werthe 0, +1 und +2 haben.

Die Grenzen für a ergeben sich nun aus den Gleichungen 1), 2) und 3); es muß:

$4b-a+2 > 0$ sein, folglich 6) $a < 4b+2$

$4a-5b-2 > 0$ „ „ 7) $a > \frac{5b+2}{4}$

$23-3a-3b > 0$ „ „ 8) $a < \frac{23-3b}{3}$

Von diesen Grenzwerthen beschränken zwei, nämlich 6) und 8), die Zahl a nach derselben Seite hin; man hat daher die engere Grenze zu nehmen. Nun kommt allerdings der Fall vor, daß die eine Grenze für jeden Werth von b die engere ist; in der Regel findet dieser Fall aber nicht Statt, namentlich hier nicht. Es ergiebt sich vielmehr für $b = 0$ und $b = +1$ aus 6), aber für $b = +2$ aus 8) die engere Grenze für a. Man erhält:

für $b = 0$ liegt a zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}$ und 2
" $b = 1$ " a " " " $1\frac{3}{4}$ und 6
" $b = 2$ " a " " " 3 und $5\frac{2}{3}$.

Im Ganzen erhält man sonach sieben Auflösungen:

b =	0	1				2	
a =	1	2	3	4	5	4	5
x =	20	14	11	8	5	5	2
y =	1	4	3	2	1	6	5
z =	2	1	5	9	13	4	8

Beispiel 2. $8x + 11y - 20z = 6$.

Auflösung. Da nicht alle Glieder der linken Seite dasselbe Vorzeichen haben, so muß die Aufgabe unendlich viele Auflösungen gestatten.

$$x = \frac{6 - 11y + 20z}{8} = -y + 2z - \frac{3y - 4z - 6}{8}$$

$$\frac{3y - 4z - 6}{8} = a; \quad y = \frac{8a + 4z + 6}{3} = 3a + z + 2 + \frac{z - a}{3}$$

$\frac{z - a}{3} = b$; so folgt 1) $z = 3b + a$
2) $y = 4a + 4b + 2$
3) $x = 2b - 3a - 2$.

In allen drei Gleichungen hat b einen positiven Factor, daher führt die Elimination von b zu keiner Grenze; man eliminirt also a, und zwar aus 1) und 3) und aus 2) und 3). So entsteht:

$$3z + x = 11b - 2$$
$$3y + 4x = 20b - 2.$$

Aus $11b - 2 > 3$ folgt $b > \frac{5}{11}$.

$$\text{Aus } 20b - 2 > 6 \text{ folgt } b > \frac{2}{5}.$$

Beide Grenzwerthe sagen, daß b nur eine positive (ganze) Zahl sein kann. Die Grenzen für a ergeben sich nun aus 1), 2) und 3):

$$3b + a > 0, \text{ folglich } a > -3b$$
$$4a + 4b + 2 > 0 \quad „ \quad a > -(b + \tfrac{1}{2})$$
$$2b - 3a - 2 > 0 \quad „ \quad a < \tfrac{2}{3}(b - 1).$$

Von den beiden ersten Grenzwerthen ist, weil b positiv sein muß, $-(b + \frac{1}{2})$ der engere; man hat daher den andern nicht zu berücksichtigen und erhält:

für $b = 1$ liegt a zwischen den Grenzen $-1\frac{1}{2}$ und 0
„ $b = 2$ „ a „ „ „ $-2\frac{1}{2}$ „ $+\frac{2}{3}$
„ $b = 3$ „ a „ „ „ $-3\frac{1}{2}$ „ $+1\frac{1}{3}$
„ $b = 4$ „ a „ „ „ $-4\frac{1}{2}$ „ $+2$

u. s. w.

b =	1	2			3					
a =	−1	−2	−1	0	−3	−2	−1	0	+1	
x =	3	8	5	2	13	10	7	4	1	u. s. w.
y =	2	2	6	10	2	6	10	14	18	
z =	2	4	5	6	6	7	8	9	10	

Beispiel 3. $11x + 15y + 14z = 190.$

Auflösung. Diese Aufgabe ist ein Beispiel zu dem Fall, in welchem man nur *eine* Hülfs-Unbekannte nöthig hat. Je weniger Hülfs-Unbekannte man braucht, desto kürzer wird natürlich die Auflösung; ein geschicktes Zerlegen der Glieder im Zähler des Bruches, den man erhält, wenn man die eine Unbekannte entwickelt hat, führt häufig zu dieser Abkürzung.

Entwickelt man x, so entsteht:

$$x = \frac{190 - 15y - 14z}{11}.$$

Zerlegt man nun bei der Division durch 11 die Zahl 190 in $198 - 8$ und 14z in $22z - 8z$, so entsteht:

$$x = 18 - y - 2z - \frac{8 + 4y - 8z}{11} = 18 - y - 2z - 4 \cdot \frac{2 + y - 2z}{11}$$

$\frac{2 + y - 2z}{11} = a$; so folgt 1) $y = 11a + 2z - 2$

2) $x = 20 - 4z - 15a$.

Die eine Grenze für a erhält man, wenn man z aus beiden Gleichungen eliminirt, die andere aus 2) allein, weil hier z einen negativen Factor hat. Es entsteht: 3) $2y + x = 7a + 16$

4) $4z + x = 20 - 15a$.

Aus 3) folgt $7a + 16 > 2$, daher $a > -2$

" 4) " $20 - 15a > 4$, " $a < +1\frac{1}{15}$.

Es hat sonach a die Werthe -1, 0 und $+1$.

Die Grenzen für z ergeben sich aus 1) und 2); zu ihnen tritt $z > 0$ hinzu, in so fern diese Grenze eine engere ist. Man erhält:

$11a + 2z - 2 > 0$, folglich $z > \frac{2 - 11a}{2}$

$20 - 4z - 15a > 0$, " $z < \frac{20 - 15a}{4}$; also:

für $a = -1$ liegt z zwischen den Grenzen $6\frac{1}{2}$ und $8\frac{3}{4}$

" $a = 0$ " z " " " 1 " 5

" $a = +1$ " z " " " $-4\frac{1}{2}$ " $1\frac{1}{4}$.

Für $a = +1$ ist $z > 0$ eine engere Grenze; daher giebt es für diesen Fall nur die eine Auflösung $z = 1$. Man erhält:

a =	−1		0		+1
z =	7	8	2	3	4	1
y =	1	3	2	4	6	11
x =	7	3	12	8	4	1

Anmerkung. Durch zweckmäßiges Zerlegen kann auch das Beispiel 1. (Seite 313) mit einer Hülfs-Unbekannten gerechnet werden. Aus $11x + 27y + 15z = 277$ folgt:

$$x = \frac{277 - 27y - 15z}{11} = 22 - 2y + \frac{35 - 5y - 15z}{11}$$

$$= 22 - 2y - 5 \cdot \frac{y + 3z - 7}{11}.$$

Man setze jetzt $\frac{y + 3z - 7}{11} = a$, u. s. w.

Beispiel 4. $11x + 14y + 16z = 135$.

Auflös. $x = 12 - y - 2z - 3 \cdot \frac{y - 2z - 1}{11}$, u. s. w. Man erhält: $x = 1$, $y = 2$, $z = 6$ oder $x = 7$, $y = 3$, $z = 1$ oder $x = 3$, $y = 5$, $z = 2$.

Beispiel 5. $5x + 8y + 12z = 43$.

Auflös. Man hat nur eine Hülfs-Unbekannte nöthig und erhält nur eine Auflösung: $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$.

Beispiel 6. Die Zahl 100 so in drei ganze positive Summanden zu zerlegen, daß der eine durch 5, der zweite durch 7 und der dritte durch 11 theilbar ist.

Auflös. Man erhält 11 Zerlegungen der Zahl 100:

$$\begin{aligned} 100 &= 60 + 7 + 33 \\ &= 75 + 14 + 11 \\ &= 5 + 7 + 88 \\ &= 20 + 14 + 66 \\ &= 35 + 21 + 44 \\ &= 50 + 28 + 22 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} 100 &= 10 + 35 + 55 \\ &= 25 + 42 + 33 \\ &= 40 + 49 + 11 \\ &= 15 + 63 + 22 \\ &= 5 + 84 + 11. \end{aligned}$$

Beispiel 7. $5x + 3y + 7z = 36$.

Auflös.

x =	1	1	2	4
y =	8	1	4	3
z =	1	4	2	1

Beispiel 8. $3x + 5y + 7z = 35$.

Auflös.

x =	3	6	2	1
y =	1	2	3	5
z =	3	1	2	1

Beispiel 9. $5x + 6y + 9z = 84$.

Auflösung.

z =	1	2	1	2	3	3	4	5	7
y =	5	1	10	6	2	7	3	4	1
x =	9	12	3	6	9	3	6	3	3

Beispiel 10. $5x + 8y + 13z = 78$.

Auflös.

$z =$	1	2	3	4	5
$y =$	5	4	3	2	1
$x =$	5	4	3	2	1

Beispiel 11. 42 Thlr. wurden vertheilt, und es erhielt jeder Mann 8, jede Frau 7, jedes Kind 3 Thlr. Wie viel Männer, Frauen und Kinder waren es?

Auflös.

Männer	1	1	2	4
Frauen	1	4	2	1
Kinder	9	2	4	1

Beispiel 12. $3x + 5y + 7z + 8w = 49.$

Auflös. Da 7 ein Theiler von 49 ist, so erscheint es bequem, zuerst z zu entwickeln.

$$z = 7 - w - \frac{3x + 5y + w}{7}.$$

Setzt man $\frac{3x + 5y + w}{7} = a$, so folgt:

1) $w = 7a - (3x + 5y)$
2) $z = (3x + 5y) - 8a + 7.$

Grenzen-Bestimmung. Addirt man 1) und 2), so folgt $w + z = 7 - a$, und hieraus $a < 6$. Aus 1) folgt $a > 1$, folglich hat a nur die Werthe 2, 3, 4 und 5. Dann ist aus 1) und 2) noch $3x + 5y \left\{ \begin{matrix} < 7a \\ > 8a - 7 \end{matrix} \right\}$.

Setzt man zuerst $a = 2$, so folgt:

1) $w = 14 - (3x + 5y)$
2) $z = (3x + 5y) - 9$

und $3x + 5y \left\{ \begin{matrix} < 14 \\ > 9 \end{matrix} \right\}$. Es kann also $3x + 5y$ nur die Werthe 10, 11, 12, 13 haben. Das würden vier diophantische Gleichungen sein, aus denen x und y zu finden sind. Kürzer aber schließt man so: Da 3x eine durch 3 theilbare Zahl und 5y eine durch 5 theilbare Zahl ist, so können von den Werthen 10, 11, 12, 13 nur diejenigen

hier eine Auflösung geben, welche um eine durch 3 theilbare Zahl vermindert, eine durch 5 theilbare Zahl geben, also nur

$$11 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \text{ und } 13 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2.$$

Man hat also zwei Auflösungen:

$$x = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad y = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad z = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix}, \quad w = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Ganz eben so verfährt man, wenn a gleich 3, 4 und 5 ist, und erhält im Ganzen 10 Auflösungen:

x =	2	1	1	3	5	2	7	4	3	8
y =	1	2	3	2	1	4	1	3	5	2
z =	2	4	1	2	3	1	1	2	1	1
w =	3	1	3	2	1	2	2	1	1	1

Beispiel 13. Jemand hatte in einer Droschke einen werthvollen Gegenstand liegen lassen und konnte über die Nummer der Droschke nur die Angabe machen: sie war eine durch 13 theilbare dreiziffrige Zahl, ihre mittelste Ziffer aber das arithmetische Mittel der beiden andern. Hierdurch wurde die Droschke ermittelt, weil nur wenig Nummern diese Eigenschaften haben; welche sind es?

Auflös. 1) $100x + 10y + z = 13v$

2) $2y = x + z$.

Setzt man z aus 2) in 1) und entwickelt y, so folgt:

$y = v - 8x + \frac{v - 3x}{12}$. Setzt man $\frac{v - 3x}{12} = a$, so folgt:

$v = 12a + 3x$, daher noch:

3) $y = 13a - 5x$,

4) $z = 26a - 11x$.

Grenzen-Bestimmung. Addirt man 3) und 4), so folgt: $y + z + 16x = 39a$. Nun sind x, y, z höchstens 9, mindestens 1; folglich ergiebt sich (auch dann noch, wenn man für z den Werth 0 zuläßt): $39a > 17$ und $39a < 163$; folglich kann a nur die Werthe 1, 2, 3 und 4 haben. Ferner folgt aus 4), weil $z \overset{=}{>} 0$, und $z < 10$ sein muß, daß $x < \frac{26a}{11}$ und $x > \frac{26a - 10}{11}$ ist. Zu jedem

Werthe von a gehört hiernach nur ein Werth von x, und man erhält schließlich die gesuchten Nummern, deren es nur vier giebt:

234, 468, 741 und 975.

Beispiel 14. A hatte sein Lotterie-Loos verloren. Er hatte sich zwar die Nummer selbst nicht gemerkt, aber folgende Eigenschaften derselben: sie war eine durch 13 theilbare dreiziffrige Zahl, und die Summe ihrer Ziffern war auch durch 13 theilbar. Da alle Nummern mit diesen Eigenschaften in der Ziehung durchfielen, so erhielt A wenigstens die Gewißheit, daß der Verlust des Looses ihm nicht den Verlust eines Gewinnes zugezogen hatte; welche Nummern haben die angegebenen Eigenschaften?

Auflös. Die Summe der Ziffern kann nur 13 oder 26 sein. Es giebt aber nur 3 dreiziffrige Zahlen mit der Ziffern-Summe 26, und keine derselben ist durch 13 theilbar; daher der Ansatz:

$$1)\quad x + y + z = 13.$$
$$2)\quad x + 10y + 100z = 13v.$$

Hieraus durch Subtraction: $y + 11z = 13 \cdot \frac{v-1}{9}$, und bezeichnet man $\frac{v-1}{9}$ durch a, so folgt:

$$3)\quad y = 13a - 11z$$
$$4)\quad x = 13 - 13a + 10z.$$

Eliminirt man z, so folgt

$$5)\quad 10y + 11x = 143 - 13a.$$

Der niedrigste Werth der linken Seite ist 40, der höchste 129 (aus 1), folglich $143 - 13a \begin{Bmatrix} > 39 \\ < 130 \end{Bmatrix}$. Hieraus folgt, daß a nur die Werthe 2, 3, 4, 5, 6, 7 haben kann. Ferner folgt aus 4) und 3): $z \begin{Bmatrix} > \frac{13}{10}(a-1) \\ < \frac{13}{11}a \end{Bmatrix}$, woraus endlich hervorgeht, daß es fünf Zahlen mit den erwähnten Eigenschaften giebt:

247, 364, 481, 715 und 832.

Beispiel 15. $4x + 7y + 11z = 50$.

Auflös. $x = 8$, $y = 1$, $z = 1$; oder $x = 1$, $y = 5$, $z = 1$.

Beispiel 16. Jemand braucht 5 Kugeln, jede von $1\frac{2}{3}$ Loth Gewicht. Er besitzt drei Sorten Kugeln; von der ersten wiegt jede Kugel $2\frac{1}{2}$ Loth, von der zweiten $1\frac{1}{4}$ Loth, von der dritten $\frac{5}{6}$ Loth. Wie viel Kugeln muß er von jeder Sorte einschmelzen, um die gewünschten 5 Kugeln gießen zu können?

Auflös. Unter der der Aufgabe entsprechenden Voraussetzung, daß auch der Werth Null für jede Unbekannte zulässig ist, erhält man:

Kugeln von $2\frac{1}{2}$ Loth	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0
Kugeln von $1\frac{1}{4}$ Loth	0	0	0	0	2	2	2	4	4	6
Kugeln von $\frac{5}{6}$ Loth	10	7	4	1	7	4	1	4	1	1

Beispiel 17. Das Dortmunder Unterhaltungsblatt (No. 22. vom 3. Juni 1865) enthielt die folgende Aufgabe als „Preis-Räthsel" mit dem Versprechen, den drei ersten Lösern eine gemeinschaftliche „Mai-Bowle" zu geben, dem ersten Löser aber noch „Byron's Don Juan" zu überreichen.

Vier Reißfässer, von denen die beiden ersten gleich viel, die beiden letzten auch gleich viel, aber das Doppelte der ersten, enthielten, wurden von Dieben zum Theil geleert. Man wußte nicht, wie viel Reiß im Ganzen sich in den Fässern befand (jedoch in jedem weniger als 100 Pfund); aber es ergab sich, daß in dem ersten Fasse noch 12 Pfund übrig gelassen waren, in dem zweiten Fasse noch 2 Pfund, in dem dritten noch 28 Pfund und in dem vierten noch 10 Pfund. Als man der Diebe habhaft wurde, gestand A, daß er in der Eile einen hölzernen Schuh ergriffen und diesen mehrere Mal aus dem ersten Fasse gefüllt und in einen Sack ausgeschüttet; B, daß er eine Schüssel mehrere Mal aus dem zweiten Fasse gefüllt; C, daß er mit einer Schaufel mehrere Mal aus dem dritten Fasse geschöpft, und D, daß er einen Topf mehrere Mal aus dem vierten Fasse gefüllt habe. Durch ein Geräusch erschreckt, seien sie davon gelaufen; später aber seien A und B zurückgekehrt, und A habe nun mit seinem Schuh aus dem dritten Fasse dreimal weniger oft, als im Anfange, und nachher noch einmal geschöpft, während B mit seiner Schüssel aus dem vierten Fasse gerade zweimal weniger oft, als zuerst, geschöpft habe. Nun waren die vier Gefäße, deren sich die Diebe bedient hatten, zur Stelle, und es zeigte sich, daß der Schuh 2 Pfund, die Schüssel 4 Pfund, die Schaufel 3 Pfund und der Topf 5 Pfund Reiß faßte. Wie viel Reiß befand sich demnach in jedem Fasse?

Auflös. Enthielt jedes der beiden ersten Fässer x Pfund, jedes der beiden andern also 2x Pfund, schöpfte A aus dem ersten Fasse n mal, B aus dem zweiten m mal, C aus dem dritten p mal und D aus dem vierten q mal, so folgt:

$$1)\quad x - 2n = 12 \qquad\qquad 3)\quad 2x - 3p - 2n = 24$$
$$2)\quad x - 4m = 2 \qquad\qquad 4)\quad 2x - 5q - 4m = 2.$$

Eliminirt man n aus 1) und 3) und m aus 2) und 4), so erhält man:

$$x - 3p = 12 \quad \text{und} \quad x - 5q = 0; \text{ hieraus aber:}$$

$$5q - 3p = 12, \text{ folglich } p = 2q - 4 - \frac{q}{3}.$$

Setzt man $\frac{q}{3} = a$, so folgt:

$$q = 3a$$
$$p = 5a - 4$$
$$x = 15a$$
$$n = \frac{15a - 12}{2}$$
$$m = \frac{15a - 2}{4}$$

Damit aber auch n und m ganze Zahlen werden, und weil $\frac{15a-2}{4} = 4a - \frac{a+2}{4}$ ist, so setzt man noch $\frac{a+2}{4} = b$, woraus folgt:

$$a = 4b - 2.$$

Drückt man nun die Unbekannten durch b aus, so ergiebt sich:

$q = 12b - 6 \qquad n = 30b - 21$

$p = 20b - 14 \qquad m = 15b - 8.$

$x = 60b - 30$

Da in jedem Fasse weniger als 100 Pfund waren, so kann nur $b = 1$ sein; daher die Auflösung: In jedem der beiden ersten Fässer waren 30 Pfund, in jedem der beiden anderen 60 Pfund; A schöpfte aus dem ersten Fasse 9 mal, B aus dem zweiten 7 mal, C aus dem dritten 6 mal, D aus dem vierten auch 6 mal.

§. 165.

Die quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten, wenn die eine Unbekannte nur in der ersten Potenz vorkommt und nur ganze positive Werthe der Unbekannten gesucht werden.

Es sei y die Unbekannte, welche nur in der ersten Potenz vorkommt; dann hat die Gleichung zwischen x und y die Form:

$$ax^2 + bxy + cx + dy + f = 0.$$

Die Coefficienten sind als ganze Zahlen anzunehmen, da man vorhandene Nenner fortschaffen kann. (Haben a, b, c, d einen gemeinschaftlichen Theiler, und hat ihn f nicht, so hat die Aufgabe keine Auflösung.) Entwickelt man y, so folgt:

$$(1) \quad y = \frac{-ax^2 - cx - f}{bx + d}.$$

Zunächst kann man untersuchen, welche positiven ganzen Werthe von x Zähler und Nenner positiv, oder beide negativ machen (§. 157.); nur für diese Werthe wird y positiv. Dividirt man nun mit dem Nenner in den Zähler auf gewöhnliche Weise, bis der Rest kein x mehr enthält, so erhält man die Form:

$$(2) \quad y = nx + m + \frac{p}{bx + d}.$$

Sind n, m, p gebrochene Zahlen, so multiplicire man noch mit dem General-Nenner, dann erhält man die Form:

$$(3) \quad \alpha y = \beta x + \gamma + \frac{\delta}{bx + d}.$$

Von den vorhin ermittelten (ganzen und positiven) Werthen von x, welche y positiv machen, lösen nun diejenigen die Aufgabe, für welche $bx + d$ ein Theiler von δ ist.

Man kann aber auch die Untersuchung, für welche Werthe von x y positiv wird, bis zuletzt verschieben; also zuerst die ganzen positiven Werthe von x suchen, für welche $bx + d$ in δ aufgeht [indem man $bx + d$ jedem Theiler von δ (auch 1 und δ selbst) gleichsetzt],

und dann durch Substitution dieser Werthe in (3) ermitteln, welche von ihnen y positiv machen.

Beispiel 1. $x^2 + 3xy - 2x + 2y - 8 = 0$.

Auflös. $y = \frac{-x^2 + 2x + 8}{3x + 2}$.

Der Nenner ist für jeden positiven Werth von x auch positiv; der Zähler wird positiv für alle Werthe zwischen den Grenzen $+4$ und -2; folglich kann x nur die Werthe 1, 2 und 3 haben. Dividirt man nun, so entsteht:

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{9} + \frac{\frac{56}{9}}{3x+2} \text{ oder}$$

$$9y = -3x + 8 + \frac{56}{3x+2}.$$

Es muß $3x + 2$ ein Theiler von 56 sein; von den Werthen 1, 2 und 3 paßt daher nur 2, und die Aufgabe hat nur eine Auflösung: $x = 2$ und $y = 1$.

Beispiel 2. $3xy - x^2 - 10y + 4x + 12 = 0$.

Auflös. $y = \frac{x^2 - 4x - 12}{3x - 10}$.

Der Zähler wird positiv für jeden Werth von x über 6, und negativ für jeden positiven Werth von x unter 6; der Nenner ist positiv, wenn $x > 3\frac{1}{3}$, und negativ, wenn $x < 3\frac{1}{3}$ ist. Es kann sonach x nur die Werthe 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, ... haben. Dividirt man nun, wie im Beispiel 1., so folgt:

$$9y = 3x - 2 - \frac{128}{3x - 10}.$$

Es muß also $3x - 10$ ein Theiler von 128 sein, d. h. $3x - 10$ gleich 1 oder 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128; dann auch noch gleich -1, -2, -4 und -8. Von diesen Werthen (für $3x - 10$) machen aber x zu einer ganzen Zahl nur: -4, -1, $+2$, $+8$, $+32$, $+128$, und x hat dann resp. die Werthe: 2, 3, 4, 6, 14, 46. Oben fanden wir aber, daß kein Werth von x zwischen 3 und 7 y positiv macht; folglich hat die Aufgabe nur vier Auflösungen:

x =	2	3	14	46
y =	4	15	4	15

Beispiel 3. $2x^2 + 3xy - 4x - 2y = 20$.

Auflös. $y = \frac{-2x^2 + 4x + 20}{3x - 2}$ und $9y = -6x + 8 + \frac{196}{3x - 2}$.

Es wird y positiv für jeden Werth von x zwischen $-2,3$ und $+4,3$. Man findet drei Auflösungen: $x = 1;\ 2;\ 3$ und resp. $y = 22;\ 5;\ 2$.

Beispiel 4. $x^2 - 2xy + y = 4$.

Auflös. $x = 3$ und 8, und resp. $y = 1$ und 4.

Beispiel 5. $3x^2 - 4xy + x + y = 7$.

Auflös. $x = 2;\ 4;\ 9$ und resp. $y = 1;\ 3;\ 7$.

Beispiel 6. $3x^2 - 2xy + 9y - 6x - 21 = 0$.

Auflös.

x	3	5	6	13	30
y	4	24	17	24	49

Beispiel 7. $2x^2 - 3xy + 5x + 7y - 11 = 0$.

Auflös.

x	1	3	5	11	37
y	1	11	8	11	28

Beispiel 8. Zwei positive ganze Zahlen zu finden, deren Product um 3 größer ist, als ihre Summe.

Auflös. 2 und 5; oder 3 und 3.

Beispiel 9. Zwei positive ganze Zahlen zu bestimmen, deren Summe um 21 größer ist, als ihr Quotient.

Auflös.

x	38	27	20	18	11
y	2	3	5	6	11

Beispiel 10. Zwei positive ganze Zahlen zu finden, deren Summe zu ihrem Product addirt, 71 giebt.

Auflös. 1 und 35; 2 und 23; 3 und 17; 5 und 11; 7 und 8.

Beispiel 11. Giebt es zwei positive ganze Zahlen, deren Product die kleinere um 10 übertrifft?

Auflös. 11 und 1, so wie auch 6 und 2.

Beispiel 12. Zwei positive ganze Zahlen zu finden, deren Product viermal so groß ist, als ihre Summe.

Auflös. 20 und 5; 12 und 6; 8 und 8.

Beispiel 13. $4xy - 3x^2 + 2x - 7y - 5 = 0$.

Auflös. $x = 2;\ 4;\ 16$ und resp. $y = 13;\ 5;\ 13$.

Beispiel 14. Zwei ganze positive Zahlen von folgender Eigenschaft zu bestimmen: Zieht man die kleinere von der größeren ab und addirt die Differenz zu dem Quotienten beider Zahlen, so erhält man 43.

Auflös.							
	x	22	30	40	42	52	60	82
	y	1	2	5	6	13	20	41

Beispiel 15. Zwei ganze positive Zahlen zu bestimmen, deren Quotient, zu ihrer Summe addirt, 35 giebt.

Auflös.								
	x	17	22	24	25	24	22	17
	y	1	2	3	5	8	11	17

Die beiden folgenden Aufgaben führen zwar auf eine Gleichung, welche x^2 und y^2 enthält; ihre Auflösung gehört aber hierher, wenn man x und y nicht unmittelbar sucht, sondern in 16) $\frac{x+y}{2}$ und $\frac{x-y}{4}$, in 17) $x+y$ und $\frac{x-y}{2}$ als die Unbekannten betrachtet.

Beispiel 16. Alle die zwei ganzen positiven Zahlen zu finden, deren arithmetisches Mittel um 2 größer ist, als ihre mittlere geometrische Proportionale.

Auflös. $\frac{x+y}{2} = 2 + \sqrt{xy}$; hieraus:

$x + y - 4 = 2\sqrt{xy}$; $x^2 + 2xy + y^2 - 8(x+y) + 16 = 4xy$;

$(x-y)^2 + 16 = 16 \cdot \frac{x+y}{2}$; endlich hieraus:

$$\frac{x+y}{2} = 1 + \left(\frac{x-y}{4}\right)^2.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, daß $\frac{x+y}{2}$ eine ganze positive Zahl sein muß; aus der letzten, daß $\frac{x-y}{4}$ eine ganze Zahl sein muß. Setzt man nun etwa $\frac{x-y}{4} = 3$, so ist $\frac{x-y}{2} = 6$, $\frac{x+y}{2} = 10$, folglich $x = 16$, $y = 4$; hätte man aber $\frac{x-y}{4} = -3$ gesetzt, so würde man umgekehrt $y = 16$ und $x = 4$ erhalten haben. Man braucht daher für $\frac{x-y}{4}$ nur positive Zahlen zu setzen, weil man dadurch doch alle Auflösungen der Wort-Aufgabe erhält. $\frac{x-y}{4} = 1$ muß ausgeschlossen werden, weil dann $y = 0$ wird.

$\frac{x-y}{4} =$	2	3	4	5	6	7	u. s. w.
$\frac{x+y}{2} =$	5	10	17	26	37	50	u. s. w.
$\frac{x-y}{2} =$	4	6	8	10	12	14	u. s. w.
$x =$	9	16	25	36	49	64	u. s. w.
$y =$	1	4	9	16	25	36	u. s. w.

Setzt man allgemein $\frac{x-y}{4} = a$, so folgt:

$$\frac{x+y}{2} = a^2+1$$

$$\frac{x-y}{2} = 2a,$$ folglich durch Addition und Subtraction:

$$x = (a+1)^2$$

$$y = (a-1)^2.$$

Beispiel 17. Alle positiven ganzen Zahlen zu finden, deren arithmetisches Mittel um 1 größer ist, als ihre mittlere geometrische Proportionale.

Auflös. Aus $\frac{x+y}{2} = 1 + \sqrt{xy}$ folgt, (wie im Beispiel 16):

$$x+y = 1 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

Hieraus (und weil $\frac{x+y}{2}$ ganz sein muß) folgt, daß $\frac{x-y}{2}$ eine ungerade Zahl sein muß; setzt man also $\frac{x-y}{2} = 2a+1$, so folgt $x+y = 4a^2+4a+2$, also $\frac{x+y}{2} = 2a^2+2a+1$; und hieraus $x = 2(a+1)^2$ und $y = 2 \cdot a^2$.

$x =$	8	18	32	50	72	u s. w.
$y =$	2	8	18	32	50	u. s. w.

§. 166.

Die vollständige quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten, wenn alle rationalen Werthe der Unbekannten gesucht werden.

Die allgemeine Form ist:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Entwickelt man eine Unbekannte, etwa y, so ist

$$y^2 + \frac{Bx + D}{A} \cdot y + \frac{Cx^2 + Ex + F}{A} = 0, \text{ folglich}$$

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{Bx + D}{2A}\right)^2 - \frac{Cx^2 + Ex + F}{A}}.$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen läßt sich auf die Form $a + bx + cx^2$ bringen; folglich reducirt sich die vorliegende Aufgabe auf die einfachere: alle rationalen Werthe von x zu finden, für welche $a + bx + cx^2$ das Quadrat einer rationalen Zahl wird, oder: alle rationalen Werthe von x und y zu finden, für welche

$$y^2 = a + bx + cx^2$$

ist. Um diese Aufgabe aufzulösen, sucht man für y einen solchen Ausdruck zu setzen, daß die vorstehende Gleichung in Beziehung auf x eine einfache wird. Man merke folgende Fälle:

I. Ist a ein Quadrat, z. B. $a = \alpha^2$, so setze man

$$y = \alpha + z \cdot x.$$

II. Ist c ein Quadrat, etwa $c = \beta^2$, so setze man

$$y = z + \beta \cdot x.$$

III. Kann man $a + bx + cx^2$ in rationale Factoren zerlegen, etwa $a + bx + cx^2 = (p + qx)(p_1 + q_1x)$, so setze man

$$y = (p + qx) \cdot z.$$

IV. Kann man $a + bx + cx^2$ auf die Form

$$(d + ex)^2 + (f + gx)(h + kx)$$

bringen, vorausgesetzt, daß d, e, f, g, h, k rational sind, so setze man

$$y = d + ex + z(f + gx).$$

V. Kann man, etwa durch Probiren, einen rationalen Werth von x finden, für welchen auch y rational wird, sind z. B. $x = n$ und $y = m$ zwei zusammengehörige rationale Werthe, für welche die Gleichung $y^2 = a + bx + cx^2$ eine identische ist, so setze man:

$$x = n + z \text{ und } y = m + p \cdot z.$$

Die neue Gleichung enthält dann die Unbekannten z und p, wird aber in Beziehung auf z vom ersten Grade.

Die nächsten fünf Beispiele entsprechen in derselben Ordnung diesen fünf Fällen.

Beispiel 1. $y^2 = 4 + x + 2x^2.$

Auflös. Man setzt $y = 2 + zx$, so folgt

$$4 + 4zx + z^2x^2 = 4 + x + 2x^2 \text{ oder}$$

$$4z + z^2x = 1 + 2x, \text{ daher}$$

$$x = \frac{1 - 4z}{z^2 - 2} \text{ und } y = \frac{-4 + z - 2z^2}{z^2 - 2}.$$

Für z kann man nun beliebige reelle Werthe setzen.

z	0	+1	−1	u. s. w.
x	$-\frac{1}{2}$	3	−5	u. s. w.
y	2	5	7	u. s. w.

y ist hier und in den folgenden Beispielen beliebig + oder — zu nehmen.

Beispiel 2. $y^2 = 3 - x + 4x^2$.

Auflös. Man setzt $y = z + 2x$, so ist

$$z^2 + 4zx + 4x^2 = 3 - x + 4x^2, \text{ und hieraus:}$$

$$x = \frac{3 - z^2}{1 + 4z} \text{ und } y = \frac{6 + z + 2z^2}{1 + 4z}$$

z	0	1	−1	u. s. w.
x	3	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{3}$	u. s. w.
y	6	$\frac{9}{5}$	$\frac{7}{3}$	u. s. w.

Beispiel 3. $y^2 = 6 + 5x - 6x^2$.

Auflös. Es ist $y^2 = (2 + 3x) \cdot (3 - 2x)$; setzt man nun etwa $y = (2 + 3x) \cdot z$, so folgt:

$$x = \frac{3 - 2z^2}{2 + 3z^2} \text{ und } y = \frac{13z}{2 + 3z^2}.$$

z	0	1	2	u. s. w.
x	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{5}{14}$	u. s. w.
y	0	$\frac{13}{5}$	$\frac{13}{7}$	u. s. w.

Beispiel 4. $y^2 = 2 + 4x + 3x^2$.

Auflös. 1. Es ist $2 + 4x + 3x^2 = 1 + 4x + 4x^2 + 1 - x^2$

$$= (1 + 2x)^2 + (1 + x)(1 - x).$$

Setzt man nun $y = 1 + 2x + z(1 + x)$, so folgt:

$$x = \frac{1 - 2z - z^2}{1 + 4z + z^2} \text{ und } y = \frac{3 + 2z + z^2}{1 + 4z + z^2}.$$

z	0	1	—1	u. s. w.
x	1	$-\frac{1}{3}$	—1	u. s. w.
y	3	1	1	u. s. w.

Auflös. 2. Es ist $2 + 4x + 3x^2 = x^2 + 2(1 + 2x + x^2)$
$= x^2 + 2(1 + x)(1 + x)$

Setzt man nun $y = x + z(1 + x)$, so folgt:

$$x = \frac{2 - z^2}{z^2 + 2z - 2} \text{ und } y = \frac{2 + z^2}{z^2 + 2z - 2}.$$

z	0	1	—1	u. s. w.
x	—1	1	$-\frac{1}{3}$	u. s. w.
y	1	3	1	u. s. w.

Beispiel 5. $y^2 = 7 - 3x + 2x^2$.

Auflös. Hat man ermittelt: für $x = 2$ ist $y = 3$, so setze man $x = 2 + z$ und $y = 3 + pz$; dann folgt:

$$z = \frac{5 - 6p}{p^2 - 2},\ x = \frac{1 - 6p + 2p^2}{p^2 - 2},\ y = \frac{-6 + 5p - 3p^2}{p^2 - 2}.$$

p	0	1	—1	u. s. w.
x	$-\frac{1}{2}$	3	—9	u. s. w.
y	3	4	14	u. s. w.

Beispiel 6. $y^2 = 6x - x^2 - 9$.

Auflös. $y^2 = -(x-3)^2$, folglich nur eine Auflösung:
$x = 3,\ y = 0$.

Beispiel 7. $y^2 = 6x - x^2 - 10$.

Auflös. Die rechte Seite wird für jeden reellen Werth von x negativ; folglich hat die Aufgabe keine Auflösung.

§. 167.

Zur Uebung.

I. Alle die drei positiven ganzen Zahlen zu finden, von welchen das Quadrat der einen der Summe der Quadrate der

beiden anderen gleich ist. (Diese Aufgabe findet in der Geometrie eine Anwendung auf das rechtwinklige Dreieck.)

Auflös. Betrachtet man die eine der kleineren Zahlen als bekannt, setzt sie etwa $= a$, so hat man $x^2 + a^2 = y^2$. Setzt man nun $y = x + b$, so folgt $x^2 + a^2 = x^2 + 2bx + b^2$, daher $x = \frac{a^2 - b^2}{2b}$ und $y = \frac{a^2 + b^2}{2b}$. Man erhält also die Gleichung:

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{2b}\right)^2 + a^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{2b}\right)^2.$$

Multiplicirt man, um die Nenner fortzuschaffen, mit $4b^2$, so folgt:

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

Für a und b sind beliebige ganze, aber ungleiche, Werthe zu setzen. z. B. $a = 2$, $b = 1$, so ist $3^2 + 4^2 = 5^2$; $a = 3$, $b = 2$, so ist $5^2 + 12^2 = 13^2$, u. s. w.

Anmerkung. Interessant ist folgende Auflösung: Man suche x, y, z so zu bestimmen, daß

$$(x + y)^2 + (x + z)^2 = (x + y + z)^2$$

wird. Löst man die Klammern auf, so folgt:

$$x^2 = 2yz \text{ oder } \frac{x^2}{2} = y \cdot z,$$

d. h. man nimmt eine beliebige gerade Zahl (x) und zerlegt die Hälfte ihres Quadrats in das Product zweier ganzen Zahlen (y und z). z. B. Es sei $x = 2$, so ist $\frac{2^2}{2} = 1 \cdot 2$, folglich $(2 + 1)^2 + (2 + 2)^2 = (2 + 1 + 2)^2$ oder $3^2 + 4^2 = 5^2$; ferner $x = 4$, so ist $\frac{4^2}{2} = 1 \cdot 8$, folglich

$$(4 + 1)^2 + (4 + 8)^2 = (4 + 1 + 8)^2 \text{ oder } 5^2 + 12^2 = 13^2.$$

Man hätte auch zerlegen können $\frac{4^2}{2} = 2 \cdot 4$, so folgt:

$$(4 + 2)^2 + (4 + 4)^2 = (4 + 2 + 4)^2, \text{ d. h. } 6^2 + 8^2 = 10^2.$$

II. Alle die vier positiven ganzen Zahlen zu finden, von welchen das Quadrat der einen der Summe der Quadrate der drei anderen gleich ist. (Die Aufgabe findet in der Stereometrie auf das rechtwinklige Parallelepipedum Anwendung.)

Auflös. Betrachtet man zwei der kleineren Zahlen als bekannt, setzt sie etwa gleich a und b, so hat man:

$$x^2 + a^2 + b^2 = y^2.$$

$y = x + c$ gesetzt, so folgt: $x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2c}$, $y = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2c}$, daher

$$\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2c}\right)^2 + a^2 + b^2 = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2c}\right)^2.$$

Multiplicirt man mit $4c^2$, so folgt:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

z. B. $a = b = c = 1$, so folgt: $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$; ferner: $a = b = 2$, $c = 1$, so folgt: $7^2 + 4^2 + 4^2 = 9^2$. Aus $a = 4$, $b = 1$, $c = 2$, folgt: $13^2 + 16^2 + 4^2 = 21^2$.

Hat man vier Zahlen der verlangten Art gefunden, so kann man dadurch zu einem anderen Beispiele gelangen, daß man für diese vier Zahlen vier andere, ihnen proportionale setzt, d. h. man kann alle vier Zahlen mit derselben Zahl multipliciren, oder durch dieselbe Zahl dividiren. So ergeben sich häufig Beispiele, welche unmittelbar aus der hergeleiteten Formel nur entspringen, wenn man für a, b und c gebrochene oder irrationale Zahlen setzt. Setzt man z. B. $a = 3$, $b = 5$, $c = 2$, so folgt: $30^2 + 12^2 + 20^2 = 38^2$, und dividirt man nun jede Zahl durch 2, so entsteht:

$$15^2 + 6^2 + 10^2 = 19^2.$$

Diesen Fall kann man aber aus der oben entwickelten Form nicht dadurch herleiten, daß man für a, b und c ganze Zahlen setzt, obwohl sich 19 in die Summe der Quadrate dreier ganzen Zahlen zerlegen läßt ($19 = 3^2 + 3^2 + 1^2$, woraus die beiden Fälle hervorgehen: $17^2 + 6^2 + 6^2 = 19^2$ und $1^2 + 18^2 + 6^2 = 19^2$); denn setzt man, um einen der hier möglichen drei Fälle durchzuführen, $a^2 + b^2 - c^2 = 15$, $2ac = 6$ und $2bc = 10$, so folgt $a = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{5}{\sqrt{2}}$ und $c = \sqrt{2}$, und für diese Werthe von a, b und c geht die Formel oben in die Gleichung $15^2 + 6^2 + 10^2 = 19^2$ über.

Anmerkung. Sucht man x, y und z so zu bestimmen, daß

$$x^2 + (x + y)^2 + (x + z)^2 = (x + y + z)^2$$

ist, so findet man zwischen x, y und z den einfachen Zusammenhang:

$$x^2 = y \cdot z.$$

Zerlegt man also das Quadrat einer beliebigen Zahl x in ein Product $y \cdot z$, so sind x, $x + y$ und $x + z$ drei Zahlen, welche, quadrirt und addirt, wieder eine Quadratzahl geben, nämlich das Quadrat von $x + y + z$; z. B.

1) $1^2 = 1 \cdot 1$, folglich $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$.
2) $2^2 = 1 \cdot 4$, folglich $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$.
3) $4^2 = (-1) \cdot (-16)$, folglich $4^2 + 3^2 + 12^2 = 13^2$.
4) $6^2 = 4 \cdot 9$, folglich $6^2 + 10^2 + 15^2 = 19^2$

u. s. w.

Daß man aber durch dieses Verfahren nicht alle möglichen Fälle erhält, hat seinen Grund darin, daß x, y, z nicht von einander unabhängig sind. So kann man z. B. den Fall $7^2 + 4^2 + 4^2 = 9^2$ auf diesem Wege nicht erzeugen. Uebrigens kann man von jedem Beispiele zu beliebig vielen neuen übergehen, weil aus der Gleichung

$$u^2 + v^2 + w^2 = t^2$$

wieder folgt:

$$(t + u + v)^2 + (t + u + w)^2 + (t + v + w)^2 = (2t + u + v + w)^2,$$

(Die Reduction dieser Gleichung giebt die vorhergehende.) So folgt z. B. aus:

$$6^2 + 10^2 + 15^2 = 19^2:$$

$$(19+6+10)^2 + (19+6+15)^2 + (19+10+15)^2 = (38+6+10+15)^2$$

oder: $$35^2 + 40^2 + 44^2 = 69^2.$$

Weil aber $(-a)^2 = +a^2$ ist, so kann auch jede beliebige der Zahlen 6, 10, 15, 19 negativ genommen werden, so daß also aus

$$6^2 + 10^2 + 15^2 = 19^2$$

auch folgt:

$$(19+6+10)^2 + (19+6-15)^2 + (19+10-15)^2$$
$$= (38+6+10-15)^2,$$

d. h. $$35^2 + 10^2 + 14^2 = 39^2;$$ oder auch:

$$(19-6-10)^2 + (19-6+15)^2 + (19-10+15)^2$$
$$= (38-6-10+15)^2,$$

d. h. $$3^2 + 28^2 + 24^2 = 37^2.$$

Aus dieser letzten Gleichung kann man wieder folgern:

$$(37+3-28)^2 + (37+3-24)^2 + (37-28-24)^2$$
$$= (74+3-28-24)^2,$$

d. h. $$12^2 + 16^2 + 15^2 = 25^2;$$ u. s. w.

III. Für welche ganzen positiven Werthe von x ist $\sqrt{x^2 - 4x - 3}$ rational?

Auflös. Es sei $x^2 - 4x - 3 = y^2$. Setzt man $y = x - p$, so folgt:

$$x = \frac{p^2+3}{2p-4} = \frac{p}{2} + 1 + \frac{7}{2p-4};$$

oder:

$$2x = p + 2 + \frac{7}{p-2};$$

$p-2$ muß ein Theiler von 7 sein, folglich $p-2=1$ oder $p-2=7$. Man erhält die eine Auflösung: $x = 6$.

VI. Für welche Werthe von x sind die Ausdrücke $\sqrt{1+x^2}$, $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{x^2-1}$ rational?

Auflösung. Je nachdem man (§. 166. I. bis III.)

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + xz \quad \text{oder} \quad \sqrt{1+x^2} = x + z,$$
$$\sqrt{1-x^2} = 1 - xz \quad \text{oder} \quad \sqrt{1-x^2} = (1+x)z,$$
$$\sqrt{x^2-1} = x - z \quad \text{oder} \quad \sqrt{x^2-1} = (x+1)z$$

setzt, erhält man:

$$\sqrt{1+x^2} \text{ wird rational für } x = \frac{2z}{1-z^2} \text{ oder } \frac{1-z^2}{2z}$$

$$\sqrt{1-x^2} \quad . \quad . \quad . \quad x = \frac{2z}{1+z^2} \text{ oder } \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$\sqrt{x^2-1} \quad . \quad . \quad x = \frac{1+z^2}{2z} \text{ oder } \frac{1+z^2}{1-z^2}.$$

V. Alle Werthe von a und b zu bestimmen, für welche die Wurzeln sowohl der Gleichung

$x^2 + ax + b = 0$, als auch der Gleichung

$x^2 + bx + a = 0$

rational werden.

Auflösung. Setzt man $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = \left(\frac{a}{2} - y\right)^2$ und

$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a = \left(\frac{b}{2} - z\right)^2$,

so erhält man:

$$1)\ b = ay - y^2$$
$$2)\ a = bz - z^2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen sind a und b zu entwickeln. Man erhält:

$$a = \frac{y^2 + z}{yz - 1} \cdot z \text{ und } b = \frac{z^2 + y}{yz - 1} \cdot y.$$

Daß aber bei diesen Werthen von a und b die beiden gegebenen Gleichungen rationale Wurzeln haben, erkennt man am einfachsten daran: es ist a die Summe der beiden Factoren, aus denen b besteht, und b ist die Summe der beiden Factoren, aus denen a besteht. (Vergl. §. 89. V. und §. 157. I.) Daher sind die Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ die entgegengesetzten Factoren von b, und die Wurzeln der Gleichung $x^2 + bx + a = 0$ sind die entgegengesetzten Factoren von a. Setzt man z. B. $y = 3$ und $z = 2$, so folgt:

$$a = \frac{11}{5} \cdot 2 \text{ und } b = \frac{7}{5} \cdot 3.$$

Die Gleichung $x^2 + \frac{11}{5} \cdot 2 \cdot x + \frac{7}{5} \cdot 3 = 0$ läßt sich also schreiben:

$$x^2 + \left(\frac{7}{5} + 3\right)x + \frac{7}{5} \cdot 3 = 0;$$

sie hat die Wurzeln $x = -\frac{7}{5}$ und $x = -3$.

Die Gleichung $x^2 + \frac{7}{5} \cdot 3 \cdot x + \frac{11}{5} \cdot 2 = 0$ läßt sich schreiben:

$$x^2 + \left(\frac{11}{5} + 2\right)x + \frac{11}{5} \cdot 2 = 0;$$

sie hat die Wurzeln $x = -\frac{11}{5}$ und $x = -2$.

VI. Für welche Werthe von a ist $\sqrt{a^2 - 4}$ rational? (Vergl. §. 160. Aufg. 7.)

Auflösung. Setzt man $a^2 - 4 = y^2$ und $y = a - p$, so folgt:

$$a = \frac{2}{p} + \frac{p}{2} \text{ und } y = \frac{2}{p} - \frac{p}{2}.$$

Es ist also $\sqrt{a^2 - 4}$ rational, wenn a die Summe einer rationalen Zahl und ihrer Reciproken ist, und y ist dann die Differenz jener Zahl und ihrer Reciproken.

VII. Zwei rationale Zahlen zu bestimmen, deren Product um ihre Summe kleiner ist, als die Summe ihrer Quadrate.

Auflösung. Bezeichnen x und y diese Zahlen, so hat man die symmetrische Gleichung:

$$xy = x^2 + y^2 - (x + y);$$

aus ihr folgt

$$y = \frac{x+1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 + 6x - 3x^2}}{2}.$$

Setzt man $\sqrt{1 + 6x - 3x^2} = 1 + ax$, so folgt

$$x = 2 \cdot \frac{3 - a}{3 + a^2}$$

und für diesen Werth von x ergeben sich für y die zwei Werthe

$$y = 2 \cdot \frac{3 + a}{3 + a^2} \text{ und } y = \frac{3 - 4a + a^2}{3 + a^2}.$$

Wir haben sonach zwei Zahlenpaare gefunden, welche der Aufgabe genügen:

$$1)\ 2 \cdot \frac{3 - a}{3 + a^2} \text{ und } 2 \cdot \frac{3 + a}{3 + a^2}$$

$$2)\ 2 \cdot \frac{3 - a}{3 + a^2} \text{ und } \frac{3 - 4a + a^2}{3 + a^2},$$

und es fragt sich nun, ob ein Paar allein, wenn man für a alle rationalen Zahlen setzt, alle möglichen Auflösungen giebt, oder ob sich die beiden Zahlenpaare so gegenseitig ergänzen, daß das eine Paar einen Theil der Auflösungen, das zweite Paar aber die andern Auflösungen giebt. Diese Frage läßt sich dahin präcisiren: giebt es einen rationalen Ausdruck, welcher, statt a in das eine Zahlenpaar eingesetzt, es in das andere übergehen läßt? Am einfachsten erscheint es im vorliegenden Falle, einen Ausdruck für a zu suchen, für welchen die erste Zahl der ersten Auflösung in die erste Zahl der zweiten Auflösung übergeht, und die zweite Zahl der ersten Auflösung in die zweite Zahl der zweiten Auflösung. Man hat sonach zu untersuchen, für welchen Werth von a der Ausdruck $2 \cdot \frac{3 - a}{3 + a^2}$ unverändert bleibt. Aus $\frac{3 - z}{3 + z^2} = \frac{3 - a}{3 + a^2}$ findet man aber außer $z = a$ noch $z = 3 \cdot \frac{a + 1}{a - 3}$, und wenn man diesen Werth statt a in die beiden Ausdrücke der ersten Auflösung setzt, so erhält man die entsprechenden Zahlen der zweiten Auflösung. — Da aber aus der gegebenen Gleichung für jeden Werth der einen Unbekannten sich zwei Werthe der andern ergeben, so muß man zu der zweiten Zahl jeder beiden Auflösungen noch eine andere erste finden können, und wenn diese neuen ersten Zahlen nicht einander gleich sind, kann man von ihnen wieder zu einem neuen Zahlenpaar gelangen. Man erhält so im Ganzen sechs verschiedene Zahlenpaare:

$$1)\ 2 \cdot \frac{3 - a}{3 + a^2} \text{ und } 2 \cdot \frac{3 + a}{3 + a^2}$$

$$2)\ 2 \cdot \frac{3 - a}{3 + a^2} \text{ und } \frac{(3 - a)(1 - a)}{3 + a^2}.$$

3) $2 \cdot \frac{a(a-1)}{3+a^2}$ und $2 \cdot \frac{a(a+1)}{3+a^2}$

4) $2 \cdot \frac{a(a-1)}{3+a^2}$ und $\frac{(3-a)(1-a)}{3+a^2}$

5) $\frac{(3+a)(1+a)}{3+a^2}$ und $2 \cdot \frac{3+a}{3+a^2}$

6) $\frac{(3+a)(1+a)}{3+a^2}$ und $2 \cdot \frac{a(a+1)}{3+a^2}$.

Jedes Paar giebt alle Auflösungen der gegebenen Aufgabe, weil man von jedem Paare zu jedem andern durch Substitution eines rationalen Ausdrucks, statt a, gelangen kann. So geht z. B.:

1) in 2) über, wenn man $3 \cdot \frac{a+1}{a-3}$ statt a setzt,

1) „ 3) „ „ „ $\frac{3}{a}$ „ a „

1) „ 4) „ „ „ $\frac{3+a}{1-a}$ „ a „

1) „ 5) „ „ „ $3 \cdot \frac{a-1}{a+3}$ „ a „

1) „ 6) „ „ „ $\frac{a-3}{a+1}$ „ a „ .

Natürlich kann man jeden Uebergang noch durch einen zweiten Ausdruck ausführen; es geht z. B. auch 1) in 5) über, wenn man $3 \cdot \frac{1-a}{a+3}$ statt a setzt. — Aus der ersten Auflösung ergeben sich folgende Werthe der gesuchten Zahlen:

a	0	1	2	3	4	5	u. s. w.
die eine Zahl	2	1	$\frac{2}{7}$	0	$-\frac{2}{19}$	$-\frac{1}{7}$	u. s. w.
die andere Zahl	2	2	$\frac{10}{7}$	1	$\frac{14}{19}$	$\frac{4}{7}$	u. s. w.

Dritter Abschnitt.

Die Analysis.

Einleitung.

§. 168.

Erklärung.

Legt man einer Zahl x die Eigenschaft der stetigen Veränderlichkeit (S. 156) bei, d. h. bezeichnet x eine Zahl, welche beliebig stetig wachsen und abnehmen kann, so wird jeder Ausdruck, der x enthält, z. B. $a + bx$, x^n, 4^x, $\log x$, u. s. w., die Eigenschaft der Veränderlichkeit auch haben; nur findet der Unterschied Statt, daß, während x beliebig sich ändern kann, die Aenderung des Ausdruckes keine beliebige, sondern eine durch seine Form bedingte ist. Nimmt z. B. x nach und nach alle stetig auf einander folgenden Werthe der reellen Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ an, so wird $3 + 4x^2$ keineswegs auch alle diese Zahlenwerthe erhalten, weil für einen reellen Werth von x dieser Ausdruck nie negativ, überhaupt nie kleiner als 3 werden kann. Man nennt daher x eine unabhängig veränderliche Zahl (Größe) oder auch nur die Veränderliche (Ur-Variable), hingegen den Ausdruck, welcher x enthält: die abhängig Veränderliche oder gewöhnlicher nach Johann Bernoulli (1718) eine Function von x. Man bezeichnet eine Function von x entweder durch einen andern Buchstaben, z. B. y (auch y_x), oder häufiger durch $\varphi(x)$, $f(x)$, $F(x)$, u. s. w., auch ohne Klammern: φx, fx, Fx. Die Zahlen, mit welchen x in einer Function verbunden ist, oder auch die Buchstaben, insofern sie bestimmte, unveränderliche, wenn auch beliebig zu wählende Zahlen bedeuten,

heißen die Constanten. Ueberhaupt wird jeder Ausdruck, der x nicht enthält, also von x unabhängig ist, ein nach x constanter Ausdruck genannt. So sind z. B. in $\varphi x = a + bx + cx^2$, a, b und c die Constanten; ferner sind die beiden letzten Glieder auch Functionen von x, das erste aber ist nach x constant.

Das, was aus einer Function von x, etwa φx, wird, wenn man a statt x setzt, bezeichnet man durch $\varphi(a)$. Ist z. B. $\varphi x = 2x^3 - 1$, so ist $\varphi(0) = -1$, $\varphi(3) = 53$, $\varphi(-1) = -3$, auch $\varphi(x+k) = 2(x+k)^3 - 1$.

Man nennt φx eine stetige Function von x, wenn eine unendlich kleine Aenderung von x auch eine unendlich kleine Aenderung von φx zur Folge hat, und wenn dies überall Statt findet, welchen Werth der reellen Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ auch x haben oder annehmen mag. Beide, x und φx, ändern sich dann zugleich stetig. Geschieht aber die Aenderung der Function φx, während x sich stetig ändert, irgend einmal nicht stetig, sondern sprungweise, so sagt man, die Function erleide an dieser Stelle eine Unterbrechung ihrer Stetigkeit; sie ist dann keine stetige Function. So z. B. die Function $\varphi x = \frac{4+x^2}{4-x^2}$. Es ist $\varphi(1) = \frac{5}{3}$, $\varphi(3) = -\frac{13}{5}$. Wäre nun φx eine stetige Function von x, so müßte, während x stetig aus 1 in 3 übergeht, φx ebenfalls stetig aus $\frac{5}{3}$ in $-\frac{13}{5}$ übergehen, also nothwendig mindestens einmal den Werth 0 annehmen. Aber $\frac{4+x^2}{4-x^2}$ wird für keinen reellen Werth von x zu Null; folglich muß zwischen $x = 1$ und $x = 3$ eine Unterbrechung ihrer Stetigkeit Statt gefunden haben. Dies ist in der That bei $x = 2$ der Fall; denn während x aus 1 in 3 stetig übergeht, springt φx bei $x = 2$ aus $+\infty$ in $-\infty$ über. Eine zweite Unterbrechung ihrer Stetigkeit erleidet sie bei $x = -2$. Ein anderes Beispiel ist $fx = +\sqrt{x^2 - 7x + 12}$. Auch diese Function ist keine stetige. Sie ändert sich allerdings mit x stetig, wenn x stetig von $-\infty$ bis $+3$ und dann von $+4$ bis $+\infty$ wächst, erleidet aber an den Grenzen $x = 3$ und $x = 4$ eine Unterbrechung ihrer Stetigkeit, weil sie für alle Werthe von x zwischen diesen Grenzen imaginär wird. Man erkennt dies recht klar, wenn man $3+k$ statt x setzt; es wird dann $f(3+k) = +\sqrt{-k(1-k)}$.

Man sagt ferner: eine Function φx wächst mit x, wenn eine positive unendlich kleine Zunahme von x auch eine positive un-

endlich kleine Zunahme von φx zur Folge hat; hingegen sagt man: φx fällt, während x wächst, wenn eine positive unendlich kleine Zunahme von x eine unendlich kleine Abnahme (negative Zunahme) von φx erzeugt. z. B. $\varphi x = 3 + 2x^3$ wächst mit x zwischen den Grenzen $x = -\infty$ und $x = +\infty$. Ferner $fx = 4 - x - 2x^3$ fällt, während x wächst, auch zwischen den Grenzen $x = -\infty$ und $x = +\infty$. Endlich: $Fx = 6 + 9x^2 + 2x^3$ wächst mit x von $x = -\infty$ bis $x = -3$ und auch von $x = 0$ bis $x = +\infty$, hingegen fällt diese Function, während x wächst, von $x = -3$ bis $x = 0$. Von der Richtigkeit dieser Beispiele kann man sich jetzt nur dadurch überzeugen, daß man entsprechende Werthe statt x in die Functionen einsetzt; später folgen hierüber die nöthigen Gesetze.

Die Analysis (als wissenschaftliches System, nicht als Methode) beschäftigt sich mit der Untersuchung, welchen Einfluß die Aenderung einer Veränderlichen x auf eine Function derselben ausübt, so wie mit den zu dieser Untersuchung nöthigen Eigenschaften und Umformungen der Functionen. Sie zerfällt in die niedere und höhere Analysis. Erstere, welche den Inhalt dieses Abschnittes bildet, bedient sich bei ihren Untersuchungen nur der bisher erlangten Hülfsmittel der Arithmetik, zu welchen dann ihre eigenen Gesetze hinzukommen. Sie hat ein beschränktes Feld, betrachtet mehr einzelne Functionen, zeigt deren Eigenschaften und Umformungen und trägt endlich zur Erweiterung und Vervollständigung der Buchstabenrechnung und Algebra bei. Die höhere Analysis hat zu ihren Untersuchungen einen ihr eigenthümlichen Algorithmus, durch den sie in den Stand gesetzt wird, nicht nur allgemeinere und umfassendere Untersuchungen über die Functionen anzustellen, sondern auch bequemere und fruchtbarere Anwendungen auf die Geometrie und Mechanik zu machen. Sie zerfällt in die beiden Haupt-Theile: die Differenzial- und Integral-Rechnung.

Anmerkung. Zuweilen nimmt man die Analysis in einem weiteren Sinne und versteht darunter die ganze Zahlenlehre oder Arithmetik. Sie umfaßt dann auch die Buchstabenrechnung und Algebra. Versteht man aber auch Analysis im engeren Sinne, der obigen Erklärung gemäß, so findet doch eine strenge Sonderung der drei Abschnitte Buchstaben-Rechnung, Algebra und Analysis schon deshalb nicht Statt, weil jeder derselben durch die Lehren der anderen gefördert wird. So finden wir in einzelnen Abschnitten der Analysis zugleich eine Fortsetzung der Buchstaben-Rechnung und Algebra, und es mag noch bemerkt werden, daß einzelne der folgenden Kapitel ganz oder zum Theil auch in die beiden ersten Abschnitte der Arithmetik

gelegt werden können. Umgekehrt werden häufig die diophantischen Gleichungen in der niederen Analysis vorgetragen.

§. 169.
Eintheilung der Functionen.

Man theilt die Functionen in algebraische und transcendente Functionen ein. Diese Eintheilung entspricht der Eintheilung der Bestimmungs-Gleichungen in algebraische und transcendente. Setzt man nämlich eine Function von x, etwa φx, einer beliebigen bekannten Zahl p gleich und betrachtet x als die Unbekannte dieser Gleichung, so heißt φx eine algebraische, oder transcendente Function, je nachdem diese Gleichung eine algebraische, oder transcendente ist. So sind z. B. $\sqrt{1+x}$, $\frac{3-x}{1+x}$, $ax^n - bx^m$ algebraische, aber $2^x - 3$, $\log x$ transcendente Functionen von x. — Die algebraischen Functionen zerfallen in rationale und irrationale. Die ersteren enthalten x nicht unter einem Wurzelzeichen, also auch nicht mit gebrochenem Exponenten. Kommt x so vor, so ist die Function eine irrationale. So sind z. B. $x^3 - 3x$, $1 - x^{-4}$, $\frac{3+x}{4-x}$ rationale, aber $2x^{\frac{1}{2}} + 1$, $\sqrt{a + bx + cx^2}$ irrationale Functionen von x. — Bei den rationalen Functionen unterscheidet man die ganzen von den gebrochenen. Eine rationale Function von x heißt eine gebrochene, wenn x im Nenner (oder mit negativem Exponenten) vorkommt. Die anderen sind ganze Functionen. z. B. x^{-1}, $\frac{2+x^2}{1+x^2}$, $\frac{3}{1-x^4}$ sind gebrochene Functionen, aber $2 + x$, $1 - \frac{1}{2}x^2 + x^4$ sind ganze. Eine gebrochene Function von x heißt echt, oder unecht gebrochen, je nachdem der Nenner x in einer höheren Potenz enthält, als der Zähler, oder nicht. Negative Exponenten denkt man sich hierbei fortgeschafft. So sind z. B. $\frac{2+x}{2+x^2}$, $\frac{1}{3+x^3}$ echt gebrochene Functionen, aber $\frac{1+x^3}{1+x^2}$, $\frac{3-x}{1-x}$ sind unecht gebrochene.

Die unecht gebrochene Function von x läßt sich immer durch gewöhnliche Division in eine ganze und eine echt gebrochene Function zerlegen; man muß nur Zähler und Nenner nach fallenden Potenzen von x ordnen und so lange dividiren, bis die höchste Potenz von x im Reste wenigstens um einen Grad niedriger ist, als die höchste Potenz des Nenners. z. B.

1) $\varphi x = \frac{3 - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x - 2x^2}$.

$$-2x^2 + 3x + 2 \mid 5x^4 - 2x^2 + 3 \mid -\frac{5}{2}x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{57}{8}$$

$$5x^4 - 5x^2 \quad -\frac{15}{2}x^3$$

$$\frac{15}{2}x^3 + 3x^2 + 3$$

$$\frac{15}{2}x^3 - \frac{45}{4}x^2 \quad -\frac{15}{2}x$$

$$\frac{57}{4}x^2 + \frac{15}{2}x + 3$$

$$\frac{57}{4}x^2 - \frac{171}{8}x - \frac{57}{4}$$

$$\frac{231}{8}x + \frac{69}{4}$$

Es ist also $\varphi x = -\frac{5}{2}x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{57}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{138 + 231x}{2 + 3x - 2x^2}$.

2) $fx = \frac{1 + x}{1 - x} = -1 + \frac{2}{1 - x}$.

3) $Fx = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 2x - 1} = 2x^2 + 4x + 9 + \frac{22x + 10}{x^2 - 2x - 1}$.

Hauptsächlich kommen in diesem Abschnitte die ganzen (rationalen) Functionen von x in Betracht. Jede solche Function hat, wenn n eine positive ganze Zahl bezeichnet, die Form

$$\varphi(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + px^2 + qx + r$$

und wird nach dem höchsten Exponenten n eine (ganze) Function vom $n$ten Grade genannt.

So ist z. B. $2x^4 - 3x^3 + x - 1$ eine Function vom vierten Grade; $x^2 - \frac{1}{2}x + 1$ ist eine Function des zweiten Grades (auch eine quadratische Function); die Function des ersten Grades $a + bx$ wird auch eine lineare Function genannt.

Hervorzuheben ist noch der Unterschied zwischen einförmigen Functionen von x, d. h. solchen, welche für jeden bestimmten Werth von x auch nur einen bestimmten Werth annehmen, und zwei- oder mehrförmigen Functionen von x, welche für einen bestimmten Werth von x zwei oder mehr Werthe annehmen können. Alle rationalen Functionen (gleichviel, ob ganze oder gebrochene) sind einförmige; ein Beispiel einer zweiförmigen Function ist $\sqrt{ax}$.

Anmerkung. Enthält ein Ausdruck zwei und mehr Veränderliche $x, y, z, \ldots$, so heißt er eine Function aller dieser Veränderlichen, und man bezeichnet ihn durch $\varphi(x, y, z, \ldots)$.

Erstes Kapitel.
Die Factoriellen, Facultäten und Binomial-Coefficienten.

§. 170.
Erklärung der Factoriellen.

Das Product von n Factoren

$$a(a+d)(a+2d)(a+3d)\ldots[a+(n-2)d][a+(n-1)d],$$

in welchem jeder Factor um die beliebig positive oder negative Zahl d größer ist, als der vorhergehende, soll $a^{n|d}$ geschrieben, eine Factorielle genannt und „a hoch n mit der Differenz d" ausgesprochen werden. a heißt der Dignand (Basis), n der Exponent und d die Differenz der Factoriellen. Der Exponent n ist hiernach eine ganze positive Zahl und >1. Wenn $d=0$ ist, gehen die Factoriellen in Potenzen, ihre Sätze in die Potenz-Sätze über.

Hiernach ist $3^{7|2} = 3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15$;

$$1^{4|-2} = 1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot(-5);\ \left(\frac{3}{4}\right)^{3|1} = \frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{11}{4}.$$

Zunächst merke man drei Umformungen:

1) das Umkehren der Factoriellen oder die Verwandlung der Differenz in die entgegengesetzte,

2) die Trennung des letzten Factors,

3) die Trennung des ersten Factors.

Diesen drei Umformungen entsprechen die folgenden drei Formeln, deren Beweis unmittelbar aus der Erklärung der Factoriellen folgt.

1) $a^{n|d} = [a+(n-1)d]^{n|-d}$.

2) $a^{n|d} = a^{n-1|d}\cdot[a+(n-1)d]$.

3) $a^{n|d} = a\cdot(a+d)^{n-1|d}$.

z. B. $3^{5|2} = 11^{5|-2} = 3^{4|2}\cdot11 = 3\cdot5^{4|2} = 3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11$.

$a^{7|d} = (a+6d)^{7|-d} = a^{6|d}\cdot(a+6d) = a(a+d)^{6|d}$.

$a^{5|d} = (a+4d)^{5|-d} = (a+4d)\cdot(a+3d)^{4|-d}$.

Besonders halte man fest, daß der pte Factor der Factoriellen $a^{n|d}$ gleich $a+(p-1)d$ ist.

Zu diesen Formeln tritt noch hinzu:

4) $0^{n|d} = 0$.

§. 171.
Gesetze über Factoriellen.

Man kann von einer Factoriellen auch mehr als einen Factor trennen und sie so in das Product zweier Factoriellen zerlegen. Bezeichnet $n+m$ den Exponenten, so ist

$$a^{n+m|d} = a(a+d)\,(a+2d)\ldots.\,[a+(n-1)d]$$
$$\times\,(a+nd)\ldots.\,[a+(n+m-1)d].$$

Hieraus entspringt die Formel:

$$\text{I.}\quad a^{n+m|d} = a^{n|d}\cdot(a+nd)^{m|d}.$$

z. B. $3^{7|2} = 3^{3|2}\cdot 9^{4|2}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{5|-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2|-1}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^{3|-1}$.

Aus I. folgt auch $a^{(n-m)+m|d} = a^{n-m|d}\cdot[a+(n-m)d]^{m|d}$, folglich:

$$\text{II.}\quad a^{n-m|d} = \frac{a^{n|d}}{[a+(n-m)d]^{m|d}}.$$

Beispiele. $a^{3|2} = \frac{a^{10|2}}{(a+6)^{7|2}}$; $5^{4|1} = \frac{5^{9|1}}{9^{5|1}}$;

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{2|\frac{1}{8}} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{6|\frac{1}{8}}}{1^{4|\frac{1}{8}}};\quad 2^{5|-3} = \frac{2^{7|-3}}{(-13)^{2|-3}};$$

$$\frac{a^{3|d}\cdot(a+3d)^{5|d}}{a^{5|d}} = (a+5d)^{3|d} = (a+7d)^{3|-d};$$

$$\frac{a^{7|d}\cdot(a+7d)^{12|d}}{a^{11|d}\cdot(a+12d)^{4|2d}} = (a+11d)^{4|2d} = (a+17d)^{4|-2d}.$$

Die Formel II. giebt Veranlassung, den Begriff der Factoriellen dahin zu erweitern, daß auch diejenigen Ausdrücke darunter verstanden werden sollen, welche aus II. entspringen, wenn man für n und m beliebige ganze Zahlen setzt, so daß $n \gtreqless m$ sein kann (vgl. §. 59, 1.).

Setzt man $m = n - 1$, so folgt:

$$a^{1|d} = \frac{a^{n|d}}{(a+d)^{n-1|d}} = \frac{a\cdot(a+d)^{n-1|d}}{(a+d)^{n-1|d}}\ (\text{§. 170., 3.}) = a.$$

$$\text{III.}\quad a^{1|d} = a.$$

Setzt man $n = m$, so folgt:

$$a^{0|d} = \frac{a^{n|d}}{a^{n|d}} = 1.$$

$$\text{IV.}\quad a^{0|d} = 1.$$

Setzt man endlich $m + n$ statt m, so folgt:

$$a^{-m|d} = \frac{a^{n|d}}{(a-md)^{m+n|d}} = \frac{a^{n|d}}{(a-md)^{m|d}\cdot a^{n|d}}\ (\text{aus I.}),$$

folglich:

$$\text{V.}\quad a^{-m|d} = \frac{1}{(a-md)^{m|d}} = \frac{1}{(a-d)^{m|-d}}.$$

Aus V. folgt noch, wenn man $m = 1$ setzt:

$$\text{VI.} \quad a^{-1|d} = \frac{1}{a-d}.$$

Anmerk. Die Formeln V. und VI. sind nicht anwendbar, wenn sie auf die Form $\frac{1}{0}$ führen (§. 31., 3.).

§. 172.
Die Facultäten.

Die Factorielle $1^{n|1}$ oder $n^{n|-1}$ soll die Facultät n (auch n te Facultät) genannt und $n!$ geschrieben werden; n heißt die Basis der Facultät. Aus §. 171. Anmerk. folgt, daß n nicht negativ sein kann; aus §. 170. folgt, daß n nicht gebrochen sein kann.

Aus dieser Erklärung folgt:

1) $1! = 1^{1|1} = 1.$

2) $0! = 1^{0|1} = 1.$

3) Ist n größer als 1, so ist

$n! = 1^{n|1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n;$

d. h. $n!$ stellt das Product der natürlichen, auf einander folgenden Zahlen von 1 bis n vor. z. B.

$2! = 1 \cdot 2 = 2; \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6; \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24;$
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120,$ u. s. w.

Endlich merke man noch:

4) $n! = (n-1)!\, n = (n-2)!\,(n-1)\,n =$ u. s. w.

z. B. $8!\,9 = 9!; \; 7 \cdot 6! = 7!; \; (a-n-1)!\,(a-n) = (a-n)!$

§. 173.
Erklärung des Binomial-Coefficienten.

Der Quotient $\frac{a^{n|-1}}{n!}$ oder $\frac{a^{n|-1}}{1^{n|1}}$ oder $\frac{a^{n|-1}}{n^{n|-1}}$ soll durch a_n bezeichnet, „a mit dem Zeiger n" ausgesprochen und ein Binomial-Coefficient genannt werden. Man nennt a die Basis und n den Zeiger (Index) des Binomial-Coefficienten. a kann jede beliebige Zahl sein, n aber weder gebrochen, noch negativ. Aus dieser Erklärung folgt:

1) $a_a = 1;$ weil $a_a = \frac{a^{a|-1}}{a^{a|-1}}$ ist.

2) $a_1 = a;$ weil $a_1 = \frac{a^{1|-1}}{1!}$ ist.

3) $a_0 = 1;$ weil $a_0 = \frac{a^{0|-1}}{0!} = \frac{1}{1}$ ist.

Die übrigen Binomial-Coefficienten sind in folgender Form enthalten:

$$4)\quad a_n = \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)\ldots(a-n+3)(a-n+2)(a-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ \ldots\ (n-2)\cdot(n-1)\cdot n}.$$

Zähler und Nenner dieses Quotienten haben n Factoren. Der Zähler beginnt mit der Basis a, und jeder folgende Factor ist um 1 kleiner, als sein vorhergehender; der Nenner ist das Product der natürlichen Zahlen von 1 bis n. z. B.

$$3_2 = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3;\quad 5_3 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10;\quad 10_2 = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2} = 45;$$

$$(-2)_4 = \frac{(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 5;\ (-12)_3 = \frac{(-12)\cdot(-13)\cdot(-14)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$= -364;\ (-1)_n = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\ldots\ldots(-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ldots\ n} = \pm 1,$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist;

$$\left(\frac{2}{3}\right)_2 = \frac{\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{3})}{1\cdot 2} = -\frac{1}{9};\ \left(\frac{3}{4}\right)_3 = +\frac{5}{128};\ \left(-\frac{1}{2}\right)_5 = -\frac{63}{256};$$

$$\left(\frac{10}{7}\right)_3 = \left(\frac{12}{7}\right)_3 = \left(-\frac{1}{7}\right)_3 = -\frac{20}{343};$$

$$\left(\frac{20}{13}\right)_3 = \left(\frac{21}{13}\right)_3 = \left(-\frac{2}{13}\right)_3 = -\frac{140}{2197}.$$

Ferner folgt aus 4):

$$5)\quad a_n = a_{n-1}\cdot\frac{a-n+1}{n}.$$

$$6)\quad a_n = \frac{a}{n}\cdot(a-1)_{n-1}.$$

Anmerkung. Man halte besonders fest, daß in a_n der pte Factor im Zähler $= a - p + 1$, im Nenner $= p$ ist.

§. 174.

Gesetze über Binomial-Coefficienten.

1) Jeder Binomial-Coefficient, dessen Basis ganz und positiv und kleiner als der Zeiger ist, ist gleich Null (z. B. $4_5 = 0$; $3_9 = 0$) oder:

I. $a_n = 0$, wenn $a < n$, und a ganz und positiv.

Beweis. Der Zähler von a_n enthält mehr als a Factoren (weil $n > a$), folglich einen aten, und dieser ist $= a - a + 1 = 1$, der folgende also $= 0$, daher das Product $= 0$; und weil der Nenner nicht $= 0$ ist, so ist der Bruch gleich Null. Oder:

$$a_n = \frac{a^{n|-1}}{n!} = \frac{a^{a|-1} \cdot (a-a)^{n-a|-1}}{n!} \text{ (§. 171., I.)} = 0 \text{ (§. 170., 4.)}.$$

2) Dividirt man die Facultät einer Summe durch das Product der Facultäten der Summanden, so erhält man einen Binomial-Coefficienten, dessen Basis die Summe, dessen Zeiger einer der beiden Summanden ist; z. B. $\frac{8!}{5!\,3!} = 8_5 = 8_3$; $\frac{15!}{5!\,10!} = 15_5 = 15_{10}$; allgemein:

$$\text{II.} \quad \frac{(n+m)!}{n!\,m!} = (n+m)_n = (n+m)_m.$$

Beweis. $\frac{(n+m)!}{n!\,m!} = \frac{(n+m)^{n+m|-1}}{n!\,m!} = \frac{(n+m)^{n|-1} \cdot m^{m|-1}}{n! \cdot m!}$ (§. 171., I.) $= \frac{(n+m)^{n|-1}}{n!}$ (§. 172.) $= (n+m)_n$. Den anderen Binomial-Coefficienten $(n+m)_m$ erhält man ebenso; man braucht nur n und m mit einander zu vertauschen.

3) Zwei derselben Basis zugehörige Binomial-Coefficienten sind einander gleich, wenn die Summe ihrer Zeiger der Basis gleich ist; z. B. $10_3 = 10_7$, $9_7 = 9_2$; $13_{13} = 13_0$; $8_5 = 8_3$; allgemein:

$$\text{III.} \quad a_n = a_{a-n} \left(= \frac{a!}{n!\,(a-n)!}\right).$$

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus II., wenn man

$n + m = a$, also $m = a - n$ setzt.

4) Zwei derselben Basis zugehörige Binomial-Coefficienten, deren Zeiger um 1 verschieden sind, werden addirt, wenn man die Basis um 1 vergrößert und ihr dann den größeren der beiden Zeiger giebt; z. B.

$$6_3 + 6_4 = 7_4; \; 5_4 + 5_5 = 6_5; \; \left(\frac{1}{2}\right)_3 + \left(\frac{1}{2}\right)_4 = \left(\frac{3}{2}\right)_4;$$

$12_7 + 12_6 = 13_7$; allgemein:

$$\text{IV.} \quad a_{n-1} + a_n = (a+1)_n.$$

Beweis. $a_{n-1} + a_n = a_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{a - n + 1}{n}\right)$, (§. 173., 5.)

$$= \frac{a+1}{n} \cdot a_{n-1}$$

$$= (a+1)_n \text{ (§. 173., 6.)}.$$

5) Die Summe beliebig vieler Binomial-Coefficienten, von denen jeder folgende eine um 1 größere Basis hat, als der vorhergehende, die aber alle die Basis des ersten zum Zeiger haben, ist wieder ein Binomial-Coefficient, den man erhält, wenn man Basis und Zeiger des letzten der addirten Binomial-Coefficienten um 1 vergrößert; oder

V. $a_a + (a+1)_a + (a+2)_a + (a+3)_a + \ldots + (a+n-1)_a$
$= (a+n)_{a+1}$.

Beweis. Es ist $a_a = (a+1)_{a+1}$, folglich nach IV.:
$a_a + (a+1)_a = (a+2)_{a+1}$, daher
$a_a + (a+1)_a + (a+2)_a = (a+3)_{a+1}$, folglich
$a_a + (a+1)_a + (a+2)_a + (a+3)_a = (a+4)_{a+1}$, also auch
$a_a + (a+1)_a + (a+2)_a + (a+3)_a + (a+4)_a = (a+5)_{a+1}$,
u. s. w. z. B.

1) $1_1 + 2_1 + 3_1 + 4_1 + \ldots + n_1 = (n+1)_2$.

2) $2_2 + 3_2 + 4_2 + 5_2 + \ldots + (n+1)_2 = (n+2)_3$.

3) $3_3 + 4_3 + 5_3 + 6_3 + \ldots + (n+2)_3 = (n+3)_4$.

4) Die Summe S aller Factoren einer Factoriellen $a^{n|d}$ findet man so:
$S = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \ldots + [a + (n-1)d]$.
$S = na + d[1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1)]$, folglich
$S = na + n_2 d$.

z. B. $3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27 + 31 + 35 = 9 \cdot 3 + 9_2 \cdot 4$
$= 27 + 9 \cdot 4 \cdot 4 = 171$.

5) $n_0 + (n+1)_1 + (n+2)_2 + (n+3)_3 + (n+4)_4 + \ldots$
$+ (2n)_n = (2n+1)_{n+1}$.

§. 175.

Der binomische Lehrsatz für Binomial-Coefficienten.

Dieser Satz lehrt, wie man den Binomial-Coefficienten einer Summe, z. B. $(a+b)_n$, durch die Binomial-Coefficienten der Sum-

manden ausdrücken kann. Um ihn herzuleiten, wollen wir $(a+b)_1$, $(a+b)_2$, $(a+b)_3$, u. s. w. entwickeln:

1) $(a+b)_1 = a_1 + b_1$.

2) $$(a+b)_2 = \frac{(a+b)(a+b-1)}{2} = \frac{a(a-1)+ab+b(b-1)+ba}{2}$$

$$= \frac{a(a-1)}{2} + a \cdot b + \frac{b(b-1)}{2}, \text{ folglich}$$

$$(a+b)_2 = a_2 + a_1 b_1 + b_2.$$

3) Um hieraus $(a+b)_3$ abzuleiten, müssen wir beide Seiten mit $\frac{a+b-2}{3}$ multipliciren; wir thuen dies, indem wir $\frac{a+b-2}{3}$, Behufs der Multiplication rechts, für jedes Glied besonders umformen:

$$\frac{a+b-2}{3} = \frac{a-2}{3} + \frac{b}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a-1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{b-1}{2} = \frac{a}{3} + \frac{b-2}{3}.$$

So entsteht dann:

$$\left\{\begin{aligned} (a+b)_2 &= a_2 \qquad\qquad + \quad a_1 \cdot b_1 \qquad\qquad + \quad b_2 \\ \frac{a+b-2}{3} &= \frac{a-2}{3} + \frac{b}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a-1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{b-1}{2} = \frac{a}{3} + \frac{b-2}{3} \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} (a+b)_3 = a_3 &+ \frac{1}{3} a_2 b_1 \\ &+ \frac{2}{3} a_2 b_1 + \frac{2}{3} a_1 b_2 \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{3} a_1 b_2 \qquad + b_3 \end{aligned}$$

$$(a+b)_3 = a_3 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + b_3.$$

4) Auf ganz ähnliche Weise leiten wir hieraus $(a+b)_4$ ab, indem wir links mit $\frac{a+b-3}{4}$, rechts mit zweckmäßigen Umformungen dieses Ausdrucks multipliciren. Es entsteht:

$$\begin{cases}(a+b)_3 = a_3 \quad + a_2 \cdot b_1 \quad + a_1 \cdot b_2 \quad + b_3 \\ \frac{a+b-3}{4} = \frac{a-3}{4} + \frac{b}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a-2}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{b-1}{2} = \frac{2}{4} \cdot \frac{a-1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{b-2}{3} = \frac{a}{4} + \frac{b-3}{4}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}(a+b)_4 = a_4 &+ \frac{1}{4} a_3 b_1 \\ &+ \frac{3}{4} a_3 b_1 + \frac{2}{4} a_2 b_2 \\ &\qquad + \frac{2}{4} a_2 b_2 + \frac{3}{4} a_1 b_3 \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{4} a_1 b_3 + b_4\end{aligned}$$

$$(a+b)_4 = a_4 + \quad a_3 b_1 + \quad a_2 b_2 + \quad a_1 b_3 + b_4.$$

Aus den bisher entwickelten Formeln ist schon ein Schluß auf das allgemeine Gesetz zu machen, dessen Beweis durch Induction erfolgen kann (vergl. §. 106.).

$$\text{VI.} \quad (a+b)_n = a_n + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + a_{n-3} b_3 + \ldots$$
$$\ldots + a_3 b_{n-3} + a_2 b_{n-2} + a_1 b_{n-1} + b_n.$$

Können wir nun beweisen, daß dies allgemeine Gesetz auch für $(a+b)_{n+1}$ gilt, wenn es für $(a+b)_n$ als wahr angenommen wird, so ist es zunächst für $(a+b)_5$ richtig, weil es für $(a+b)_4$ bewiesen worden ist; folglich gilt es dann auch für $(a+b)_6$, also auch für $(a+b)_7$, u. s. w. für jeden Zeiger.

Um $(a+b)_{n+1}$ aus $(a+b)_n$ abzuleiten, multipliciren wir VI. mit $\frac{a+b-n}{n+1}$, indem wir diesen Ausdruck, Behufs der Multiplication rechts, vorher für jedes einzelne Glied besonders umformen. Diese Umformungen sind aber in der den Gliedern rechts entsprechenden Ordnung folgende:

$$\begin{aligned}\frac{a+b-n}{n+1} &= \frac{a-n}{n+1} + \frac{b}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{a-n+1}{n} + \frac{2}{n+1} \cdot \frac{b-1}{2} \\ &= \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{a-n+2}{n-1} + \frac{3}{n+1} \cdot \frac{b-2}{3} = \frac{n-2}{n+1} \cdot \frac{a-n+3}{n-2} + \frac{4}{n+1} \cdot \frac{b-3}{4} \\ &= \frac{n-3}{n+1} \cdot \frac{a-n+4}{n-3} + \frac{5}{n+1} \cdot \frac{b-4}{5} = \text{u. s. w.} \\ &= \text{u. s. w.} \\ &= \text{u. s. w.} \qquad = \frac{5}{n+1} \cdot \frac{a-4}{5} + \frac{n-3}{n+1} \cdot \frac{b-n+4}{n-3} \\ &= \frac{4}{n+1} \cdot \frac{a-3}{4} + \frac{n-2}{n+1} \cdot \frac{b-n+3}{n-2} = \frac{3}{n+1} \cdot \frac{a-2}{3} + \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{b-n+2}{n-1} \\ &= \frac{2}{n+1} \cdot \frac{a-1}{2} + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{b-n+1}{n} = \frac{a}{n+1} + \frac{b-n}{n+1}.\end{aligned}$$

Durch die Multiplication entsteht nun:

$$\begin{aligned}(a+b)_{n+1} = a_{n+1} &+ \frac{1}{n+1}a_n b_1 \\ &+ \frac{n}{n+1}a_n b_1 + \frac{2}{n+1}a_{n-1}b_2 \\ &\qquad + \frac{n-1}{n+1}a_{n-1}b_2 + \frac{3}{n+1}a_{n-2}b_3 \\ &\qquad\qquad + \frac{n-2}{n+1}a_{n-2}b_3 + \ldots \\ &\qquad\qquad\qquad + \ldots + \\ &\qquad\qquad\qquad\vdots \\ &\qquad\qquad\qquad + \ldots + \frac{n-2}{n+1}a_3 b_{n-2} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{3}{n+1}a_3 b_{n-2} + \frac{n-1}{n+1}a_2 b_{n-1} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{2}{n+1}a_2 b_{n-1} + \frac{n}{n+1}a_1 b_n \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{n+1}a_1 b_n + b_{n+1}.\end{aligned}$$

$$(a+b)_{n+1} = a_{n+1} + a_n b_1 + a_{n-1}b_2 + a_{n-2}b_3 + \ldots\ldots\ldots + a_3 b_{n-2} + a_2 b_{n-1} + a_1 b_n + b_{n+1}.$$

Dies Gesetz für $(a+b)_{n+1}$ stimmt aber mit dem für $(a+b)_n$ in VI. vollständig überein. Man kann sich hiervon dadurch überzeugen, daß man in VI. überall, wo n steht, $n+1$ setzt.

Anmerkung. Es muß ausdrücklich hervorgehoben werden, daß das Gesetz VI. für jeden beliebigen Werth von a und b bewiesen worden ist, weil es in dieser Allgemeinheit später gebraucht werden wird. Ist b eine ganze positive Zahl, so ist die Entwicklung bedeutend einfacher aus dem Gesetz IV. (§. 174.) zu entnehmen. Es ist $(a+1)_n = a_n + a_{n-1}$, hieraus $(a+2)_n = (a+1)_n + (a+1)_{n-1} = a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2}$, hieraus $(a+3)_n$, dann $(a+4)_n$, u. s. w. Der Uebergang zu $(a+b)_n$ ist dann jetzt um so leichter, weil man im Gesetze VI. eine Leitung bei der Entwicklung hat.

§. 176.

Darstellung einer Reihe durch ihr allgemeines Glied.

Das Gesetz VI. giebt Veranlassung zur Mittheilung einer Schreibart, von welcher häufig Gebrauch gemacht werden wird. In der Gleichung

$$(a+b)_n = a_n + a_{n-1}b_1 + a_{n-2}b_2 + a_{n-3}b_3 + a_{n-4}b_4 + \ldots$$
$$\ldots + a_1 b_{n-1} + b_n$$

kann jedes Glied rechts als Product zweier Binomial-Coefficienten betrachtet werden; denn das erste kann $a_n b_0$, das letzte $a_0 b_n$ geschrieben werden. Ferner ist die Summe der Zeiger in jedem Gliede $= n$; bezeichnet man also den Binomial-Coefficienten zur Basis b in irgend einem Gliede durch $b_\mathfrak{a}$, so ist das zugehörige Glied: $a_{n-\mathfrak{a}} \cdot b_\mathfrak{a}$. Dieses Glied $a_{n-\mathfrak{a}} \cdot b_\mathfrak{a}$ stellt nun aber jedes Glied der Reihe vor und wird deshalb das allgemeine Glied derselben genannt. Aus ihm ergeben sich das 1te, 2te, 3te, u. s. w. Glied, wenn man statt $\mathfrak{a}$ nach der Reihe die Werthe 0, 1, 2, ... setzt. Diese Absicht deutet man durch den deutschen Buchstaben ($\mathfrak{a}$) an und setzt also fest, daß für einen deutschen Buchstaben, der in einem Ausdrucke vorkommt, nach der Reihe die Werthe 0 und die absoluten ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... gesetzt werden sollen. Um ferner anzudeuten, daß nachher alle Glieder, welche entstehen, addirt werden sollen, klammert man das allgemeine Glied ein und setzt das Summen-Zeichen Σ (oder auch S) vor die Klammer. So entsteht: $(a+b)_n = \Sigma[a_{n-\mathfrak{a}} \cdot b_\mathfrak{a}]$.

Will man noch besonders hervorheben, daß für $\mathfrak{a}$ die Werthe 0, 1, 2, ... bis n, keine größeren, gesetzt werden sollen, so fügt man die Grenzen „0 bis n" hinzu:

$$(a+b)_n = \sum_{\mathfrak{a}=0 \div n} [a_{n-\mathfrak{a}} \cdot b_\mathfrak{a}] \text{ oder } = \Sigma_0^n [a_{n-\mathfrak{a}} \cdot b_\mathfrak{a}].$$

Man kann auch beide Zeiger, von a und von b, durch deutsche

Buchstaben ausdrücken, muß dann aber die beschränkende Bedingung $a + b = n$ hinzufügen: $(a+b)_n = \sum\limits_{a+b=n} [a_a \cdot b_b]$.

Das Gesetz V. (§. 174.) kann man jetzt so schreiben:

$$\Sigma_0^{n-1}[(a+\alpha)_\alpha] = (a+n)_{\alpha+1}.$$

Anmerk. 1. Für die weiteren Untersuchungen ist es nöthig, daß man sich die Binomial-Coefficienten wenigstens der ersten Zahlen 1, 2, 3, 4, ... merkt, um sie in vorkommenden Fällen erkennen und gebrauchen zu können. Sie lassen sich in folgender Form darstellen:

$$\Sigma(1_\alpha) = 1 + 1,$$
$$\Sigma(2_\alpha) = 1 + 2 + 1,$$
$$\Sigma(3_\alpha) = 1 + 3 + 3 + 1,$$
$$\Sigma(4_\alpha) = 1 + 4 + 6 + 4 + 1,$$
$$\Sigma(5_\alpha) = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1,$$
$$\Sigma(6_\alpha) = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1,$$

u. s. w.

Anmerk. 2. Man bedient sich häufig in der Mathematik der Bezeichnung $a_0\ a_1\ a_2\ a_3 \ldots$, ohne hierbei an Binomial-Coefficienten zu denken, sondern nur, um anzudeuten, daß $a_0\ a_1\ a_2\ a_3 \ldots$ verschiedene Zahlen sein sollen oder können. Namentlich geschieht dies bei Reihen, z. B. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$, wobei man den Vortheil hat, daß man immer weiß, zu welcher Potenz von x ein Coefficient a_n gehört. Dem Anfänger mag es schwer erscheinen, hier eine Verwechselung zu vermeiden; wer aber nur erst ein wenig mit den mathematischen Gesetzen vertraut ist, wird hierbei eben so wenig unsicher sein, als im Leben bei Begriffen, welche durch dasselbe Wort bezeichnet werden, z. B. Schloß, Feder u. s. w. In diesem Lehrbuche ist übrigens dem Leser die Sache dadurch erleichtert, daß weiterhin Binomial-Coefficienten nur mit der Basis n und m vorkommen, und andererseits n und m mit irgend einem Zeiger immer Binomial-Coefficienten sind.

Uebungs-Aufgaben zum ersten Kapitel.

1) $2^{3|2} \cdot 1^{3|2} = 6!$

2) $a^{2|d} = (-a-d)^{2|d}$.

3) $a^{3|d} = a^{3|-\frac{3a+2d}{2}}$.

4) $\frac{3}{5} \cdot 7_3 = 7_5$.

5) $\dfrac{\left(-\frac{5}{2}\right)^{5|2} \cdot 4!}{12_4} = \dfrac{7}{4}$.

6) $\dfrac{3!\,5!}{6!} = 1$.

7) $1^{n|1} = 2^{n-1|1}$.

8) $5_0 + 6_1 + 7_2 + 8_3 + 9_4 = 10_4$.

9) $12_3 + 12_4 + 13_5 = 14_5$.

10) $(a+b)_{a-b} = (a+b)_{2b}$.

11) $\dfrac{a_n + (a-1)_n}{a_n - (a-1)_n} = \dfrac{2a-n}{n}$.

12) $\dfrac{a-2}{b-2} \cdot a_2 b_3 = a_3 b_2$.

13) $\dfrac{9!}{6 \cdot 6!} = 9_3$.

14) $a^{2n|d} = (-a)^{2n|-d}$.

15) $(1-a)_2 = a_2$. 16) $(-1)_{2n} + (-1)_{2n+1} = 0$.

17) $1^{2n+1|-2} = 1^{2n|2}$. 18) $3^{3|2} \cdot 9^{4|2} \cdot 17^{3|2} = 3^{10|2}$.

19) $\dfrac{a^{9|1} \times (a+9)^{10|1}}{4! \times (a+18)^{15|-1}} = (a+3)_4$. 20) $\dfrac{6!\,9!}{2!\,4!\,4!\,5!} = 6_2 \cdot 9_4$.

21) $(-a)_{12} = (a+11)_{12}$. 22) $(-a)_{2n} = (a+2n-1)_{2n}$.

23) $(a+b)_b + (a+b)_{a+1} = (a+b+1)_b$ (§. 174., III. und IV.).

24) $45^{1|-4} \cdot 11^{4|-4} = (-1)^{7|2}$. 25) $a^{n|0} \cdot 1^{n|\frac{1}{a}} = a^{n|1}$.

26) $(a+b)_2 + (a-b)_2 = 2a_2 + b^2$.

27) $(a+b)_2 - (a-b)_2 = (2a-1)b$.

28) Es soll untersucht werden, ob a_n für steigende Werthe von n größer oder kleiner wird.

Auflösung. Es ist $a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{a-n}{n+1}$; es fragt sich also, wenn man vom Vorzeichen absieht, ob $\dfrac{a-n}{n+1}$ ein unechter, oder ein echter Bruch ist.

I. Wenn a positiv ist. Aus $a - n \gtreqless n+1$ folgt $n \lesseqgtr \dfrac{a-1}{2}$. Hieraus ergiebt sich: Ist a positiv, so nimmt a_n für steigende Werthe von n nur zu, so lange $n < \dfrac{a-1}{2}$ ist; wird $n = \dfrac{a-1}{2}$, so ist der auf a_n folgende Binomial-Coefficient a_{n+1} gleich a_n (z. B. $11_5 = 11_6$); wird $n > \dfrac{a-1}{2}$, so nehmen die auf a_n folgenden Binomial-Coefficienten fortwährend ab, ist also a ein echter Bruch, schon von a_0 an. Das Gesagte gilt von den absoluten Werthen der Binomial-Coefficienten, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, und nur so lange, als nicht ein Binomial-Coefficient zu Null wird, in welchem Falle dann jeder folgende auch Null ist. Was das Vorzeichen betrifft, so ist a_0 immer und a_1 im vorliegenden Falle positiv; daher ist der auf a_n folgende Binomial-Coefficient erst dann negativ, wenn $n > a$ wird (und a nicht eine positive ganze Zahl ist), und für steigende Werthe von n wechseln dann die Vorzeichen ab, weil immer mit einer negativen Zahl multiplicirt wird $\left(\dfrac{a-n}{n+1}\right)$. Ist z. B. $a = \dfrac{15}{2}$, so wächst $\left(\dfrac{15}{2}\right)_n$ von $n = 0$ bis $n > 3\frac{1}{4}$ d. h. bis $n = 4$; es ist also noch $\left(\dfrac{15}{2}\right)_4 > \left(\dfrac{15}{2}\right)_3$, aber $\left(\dfrac{15}{2}\right)_5 < \left(\dfrac{15}{2}\right)_4$. Ferner bleibt $\left(\dfrac{15}{2}\right)_n$ positiv, bis $n > \dfrac{15}{2}$, d. h. bis $n = 8$ ist; es ist also $\left(\dfrac{15}{2}\right)_8$ noch positiv, aber $\left(\dfrac{15}{2}\right)_9$ negativ, und von jetzt an wechseln bei steigenden Werthen des Zeigers die Vorzeichen ab.

II. Wenn a negativ ist. Wird $a = -a'$ gesetzt, so ist $\frac{a-n}{n+1} = -\frac{a'+n}{n+1}$, und es fragt sich nun, wenn man vom Vorzeichen absieht, ob $\frac{a'+n}{n+1}$ ein unechter, oder echter Bruch ist. Aus $\frac{a'+n}{n+1} \gtreqless 1$ folgt aber $a' \gtreqless 1$. Die Vorzeichen von a_n wechseln bei steigenden Werthen von n hier fortwährend, weil immer mit einer negativen Zahl multiplicirt wird. Es folgt nun:

1) Ist $a = -1$, so sind die absoluten Werthe aller Binomial-Coefficienten einander gleich (während das Vorzeichen fortwährend wechselt).

2) Ist a negativ, aber $a' > 1$, so nimmt der absolute Werth von a_n für steigende Werthe von n fortwährend zu (während das Vorzeichen wieder wechselt).

3) Ist a ein negativer echter Bruch, so wird der absolute Werth von a_n für steigende Werthe von n immer kleiner (während das Vorzeichen wechselt); z. B. $(-\frac{1}{2})_2 = +\frac{3}{8}$, $(-\frac{1}{2})_3 = -\frac{5}{16}$.

29) Die Beantwortung der Frage, für welche Werthe von a der Binomial-Coefficient a_3 unverändert bleibt, führt (§. 152. Anm. 1.) zu der Gleichung $x_3 = a_3$. Hebt man diese Gleichung durch $x - a$, so erhält man eine quadratische Gleichung, aus welcher x entwickelt werden kann. Bestimmt man endlich a nach §. 166. I. so, daß die Werthe von x rational werden, so erhält man drei Binomial-Coefficienten mit dem Zeiger 3, welche für jeden Werth von p einander gleich sind, nämlich:

$$\left(\frac{6+2p}{3+p^2}\right)_3 = \left(\frac{3-4p+p^2}{3+p^2}\right)_3 = \left(\frac{2p+2p^2}{3+p^2}\right)_3.$$

Setzt man z. B. $p = \frac{1}{3}$, so entsteht $\left(\frac{15}{7}\right)_3 = \left(\frac{4}{7}\right)_3 = \left(\frac{2}{7}\right)_3$.

Zweites Kapitel.

Die Combinations-Lehre. Der binomische und polynomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten.

§. 177.

Die Combinations-Lehre unterscheidet sich dadurch von allen andern Theilen der Mathematik, daß sie bei Betrachtung gegebener Größen weder ihre Quantität, noch ihre Benennung, noch andere Eigenschaften derselben berücksichtigt. Sie beschäftigt sich nur mit der Untersuchung, auf wie viele Arten gegebene Dinge, hier Elemente genannt, neben einander gestellt werden können, wenn entweder:

1) jedesmal alle Elemente in allen möglichen Anordnungen (also mit allen möglichen Versetzungen der Elemente) hingestellt werden sollen, oder
2) wenn eine bestimmte Anzahl aus den gegebenen Elementen, z. B. immer drei, oder immer vier, u. s. w., herausgenommen und diese Elemente dann mit allen ihren Versetzungen neben einander gestellt werden sollen, oder endlich
3) wenn wieder eine bestimmte Anzahl aus den gegebenen Elementen herausgenommen werden soll, wenn aber dann nur diejenigen Zusammenstellungen der vorgeschriebenen Anzahl von Elementen als verschiedene gelten sollen, welche sich durch die Elemente selbst von einander unterscheiden, nicht aber durch die Stellung dieser Elemente, so daß also alle Verbindungen derselben Elemente, in welcher Ordnung diese Elemente auch auf einander folgen, immer nur als eine Verbindung gelten.

Diesen drei Fällen entsprechend zerfällt die Combinations-Lehre in drei Abschnitte: die Lehre von den Permutationen, Variationen und Combinationen. Je nachdem in jeder Verbindung jedes Element nur einmal, oder mehrmal vorkommen kann, heißt die Verbindung ohne, oder mit Wiederholung.

z. B. Jemand hat vier Metalle: Gold, Kupfer, Silber und Zink; wie viel verschiedene Compositionen kann er durch Zusammenschmelzen zweier dieser Metalle erzeugen, wenn die Quantität nicht berücksichtigt wird? Bezeichnen wir die Metalle in der angegebenen Ordnung mit G, K, S und Z, so ist die Frage: wie viele Verbindungen zu immer zwei gestatten diese vier Elemente? Weil nun hier die Verbindung GK offenbar dieselbe ist, wie KG, so haben wir die Anzahl der Combinationen, nicht die der Variationen, zu suchen, und erhalten:

GK, GS, GZ,
KS, KZ,
SZ,

also sechs Compositionen.

§. 178.

Die Permutationen.

Jede Zusammenstellung (Anordnung) aller gegebenen Elemente nennt man eine Permutation (Versetzung) dieser Elemente, und zwar ohne, oder mit Wiederholung, je nachdem alle gegebenen Elemente ungleich sind, oder auch gleiche vorkommen. Den Inbegriff aller Permutationen gegebener Elemente a, b, c, ... ohne Wiederholung bezeichnen wir durch P, mit Wiederholung durch P'; die Elemente selbst setzen wir entweder in Klammern hinter P und P', oder

wir schreiben ihre Anzahl als Index unter P und P′. Kommt ein Element (z. B. a) mehr als einmal vor (z. B. α-mal), so setzen wir α als Wiederholungs-Exponent über a $\left(\overset{\alpha}{a}\right)$. So bezeichnet z. B. $\underset{(n)}{P}$ alle Permutationen von n ungleichen Elementen; $\underset{(4)}{P}(a, b, c, d)$ alle Permutationen (ohne Wiederholung), welche die Elemente a, b, c, d zulassen; $\underset{(8)}{P'}(\overset{4}{a}, \overset{3}{b}, c)$ alle Permutationen, welche die acht Elemente a, a, a, a, b, b, b, c gestatten; $\underset{(n)}{P'}(\overset{\alpha}{a}, \overset{\beta}{b}, \overset{\gamma}{c}, \ldots)$ alle Permutationen (mit Wiederholung), welche n Elemente gestatten, wenn unter diesen a α-mal, b β-mal, c γ-mal, u. s. w. vorkommt. Die Anzahl der Permutationen bezeichnen wir durch ein dem P oder P′ vorgesetztes N. (numerus).

1. Permutationen ohne Wiederholung.

Ein Element a hat nur eine Permutation: a. Zwei Elemente a, b haben zwei Permutationen: ab und ba.

Drei Elemente a, b, c haben sechs Permutationen:

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Vier Elemente haben 24 Permutationen, u. s. w.

Gesucht wird nun $N.\underset{(n)}{P}(a, b, c, d, \ldots.)$. Man kann die Permutationen nach dem Anfangs-Element in n Abtheilungen ordnen, so daß alle Permutationen in der ersten Abtheilung mit a anfangen, in der zweiten mit b, in der dritten mit c, u. s. w. Jede Abtheilung enthält dann gleich viel Permutationen, nämlich so viele, als die nachfolgenden n — 1 Elemente Permutationen gestatten; folglich ist die Anzahl der Permutationen bei n Elementen nmal so groß, als bei n — 1 Elementen, und dies Gesetz läßt sich durch die Formel ausdrücken:

$$N.\underset{(n)}{P} = n \cdot N.\underset{(n-1)}{P}.$$

Nun war aber:

$$N.\underset{(1)}{P} = 1, \text{ folglich}$$

$$N.\underset{(2)}{P} = 2 \cdot 1 = 2!, \text{ folglich}$$

$$N.\underset{(3)}{P} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!, \text{ folglich}$$

$$N.\underset{(4)}{P} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!, \text{ u. s. w.; daher allgemein:}$$

$$\text{I. } N.\underset{(n)}{P} = n!$$

z. B. 1) Das Kartenspiel Sechsundsechzig wird mit 24 Karten gespielt; wie viel verschiedene Lagen können diese Karten annehmen?

Auflös. Die Anzahl ist 24!, d. h. größer als 620440 Trillionen. Die Anzahl aller möglichen Spiele ist hierdurch aber nicht gefunden.

2) Wie viel fünfziffrige Zahlen giebt es, von denen jede die Ziffern 3, 4, 6, 7, 9 enthält? — Auflös. 120.

3) Wie viel vierziffrige Zahlen giebt es, von denen jede die Ziffern 2, 3, 0, 8 enthält? — Antw. 18.

2. Permutationen mit Wiederholung.

Gesucht wird $N.\,\underset{(n)}{P'}(\overset{\alpha}{a}, \overset{\beta}{b}, \overset{\gamma}{c}, \ldots.)$.

Sind unter den Elementen gleiche, so ist die Anzahl der Permutationen geringer, weil die Vertauschung gleicher Elemente zu keiner neuen Permutation führt. Es sei:

$$N.\,\underset{(n)}{P'}(\overset{\alpha}{a}, \overset{\beta}{b}, \overset{\gamma}{c}, \ldots) = x.$$

Denkt man sich alle x Permutationen hingeschrieben und nimmt nun an, daß die α gleichen Elemente a ungleich wären, bezeichnet sie etwa durch a', a'', a''', u. s. w., so kann man in jeder Permutation noch diese jetzt ungleichen Elemente unter einander permutiren, während man die anderen Elemente in ihren Stellen läßt. Die Anzahl dieser jetzt ungleichen Elemente ist aber α, folglich gehen aus jeder der x Permutationen $\alpha!$ verschiedene Permutationen hervor; im Ganzen giebt es also jetzt $x \cdot \alpha!$ Permutationen (d. h. $x \cdot \alpha!$ würde die Anzahl der Permutationen bei n Elementen sein, wenn unter diesen zunächst α ungleiche Elemente a', a'', a''', u. s. w. wären, dann aber noch das Element b βmal, das Element c γmal, u. s. w. vorkäme). Nimmt man weiter an, daß auch alle Elemente b, deren Anzahl β ist, ungleich wären, so würde man, um alle nun möglichen Permutationen zu erzeugen, in jeder der vorhandenen $x \cdot \alpha!$ Permutationen noch die jetzt ungleichen Elemente b so oft als möglich, also $\beta!$ mal, zu permutiren haben, während jedes andere Element in seiner Stelle bleibt. Dadurch entstehen $x \cdot \alpha!\,\beta!$ Permutationen. Nimmt man weiter auch alle gleichen Elemente c, deren Anzahl γ ist, als ungleich an, so muß man, um alle jetzt möglichen Permutationen zu erzeugen, wieder in jeder der vorhandenen $x \cdot \alpha! \cdot \beta!$ Permutationen die nunmehr ungleichen Elemente c so oft als möglich, also $\gamma!$ mal, versetzen, und erhält $x \cdot \alpha!\ \beta!\ \gamma!$ Permutationen. So kann man fortfahren, bis alle n Elemente ungleich sind. Man hat dann $x \cdot \alpha!\,\beta!\,\gamma! \ldots..$ Permutationen, und diese Anzahl muß mit der schon in I. entwickelten Anzahl $n!$ für die Permutationen ohne Wiederholung bei n ungleichen Elementen übereinstimmen. Es ist also $\quad x \cdot \alpha!\,\beta!\,\gamma! \ldots = n!$, folglich

$$\text{II.}\quad N.\,P'_{(n)}(\overset{\alpha}{a},\ \overset{\beta}{b},\ \overset{\gamma}{c}\ldots) = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}.$$

z. B. 1) Wie viel fünfziffrige Zahlen enthalten die 5 einmal, die 7 dreimal und die 9 einmal?

Auflös. $N.\,P'_{(5)}(5,\ \overset{3}{7},\ 9) = \frac{5!}{3!} = 20.$

2) $N.\,P'_{(6)}(\overset{3}{a}\,\overset{1}{b}\,\overset{2}{c}) = \frac{6!}{3!\ 1!\ 2!} = 60.$

3) $N.\,P'_{(11)}\ \overset{2}{a},\ \overset{1}{b},\ \overset{4}{c},\ \overset{3}{d},\ \overset{1}{e}) = \frac{11!}{2!\,4!\,3!} = 138600.$

4) Wie viel fünfziffrige Zahlen enthalten die 3 zweimal, die 6 zweimal und die 0 einmal?

Auflös. Da 0 nicht die erste Ziffer links sein kann, so ist die Anzahl

$$= N.\,P'_{(5)}(\overset{2}{3},\ \overset{2}{6},\ 0) - N.\,P'_{(4)}(\overset{2}{3},\ \overset{2}{6}) = \frac{5!}{2!\,2!} - \frac{4!}{2!\,2!} = 24.$$

5) Wie viel siebenziffrige Zahlen enthalten die 0 dreimal, die 5 dreimal und die 9 einmal?

Auflös. Es giebt 80 Zahlen dieser Art.

6) Wie viel zehnziffrige Zahlen enthalten die 1 zweimal und die 0 achtmal? Auflös. 9 Zahlen.

3. Die Aufstellung der Permutationen.

Man muß sich die Elemente in bestimmter Ordnung gegeben denken, um keine Permutation auszulassen, z. B. alphabetisch, wenn die Elemente durch Buchstaben bezeichnet werden. Man halte bei dem Hinschreiben die oben angegebenen Abtheilungen fest, schreibe also zuerst alle Permutationen hin, welche mit a anfangen, dann diejenigen, welche mit b anfangen u. s. w. In jeder Abtheilung beobachte man in Beziehung auf die dem ersten Element folgenden Elemente dieselbe Regel, u. s. w. Sind die Permutationen mit Wiederholung, so verfährt man so, als wenn alle Elemente ungleich wären, und läßt nur jede Permutation fort, welche schon vorgekommen ist. In den folgenden Beispielen trennen die Haken die Permutationen für ein, zwei, drei, u. s. w. Elemente von einander.

1) P (a, b, c, d).

a	b	c	d	b	a	c	d	c	a	b	d	d	a	b	c
a	b	d	c	b	a	d	c	c	a	d	b	d	a	c	b
a	c	b	d	b	c	a	d	c	b	a	d	d	b	a	c
a	c	d	b	b	c	d	a	c	b	d	a	d	b	c	a
a	d	b	c	b	d	a	c	c	d	a	b	d	c	a	b
a	d	c	b	b	d	c	a	c	d	b	a	d	c	b	a

2) $\underset{(5)}{P'}(\overset{2}{a}, b, \overset{2}{c})$

a	a	b	c	c	b	a	a	c	c	c	a	a	b	c
a	a	c	b	c	b	a	c	a	c	c	a	a	c	b
a	a	c	c	b	b	a	c	c	a	c	a	b	a	c
a	b	a	c	c	b	c	a	a	c	c	a	b	c	a
a	b	c	a	c	b	c	a	c	a	c	a	c	a	b
a	b	c	c	a	b	c	c	a	a	c	a	c	b	a
a	c	a	b	c						c	b	a	a	c
a	c	a	c	b						c	b	a	c	a
a	c	b	a	c						c	b	c	a	a
a	c	b	c	a						c	c	a	a	b
a	c	c	a	b						c	c	a	b	a
a	c	c	b	a						c	c	b	a	a

3) Alle vierziffrigen Zahlen zu bilden, welche die Ziffern 0, 1, 2, 2 enthalten.

Auflös.

1022.	2012.
1202.	2021.
1220.	2102.
	2120.
	2201.
	2210.

§. 179.

Die Variationen.

Die Variationen zerfallen in Klassen. Nimmt man von n gegebenen Elementen zuerst jedes einzelne Element, so hat man die Variationen der ersten Klasse (Unionen); nimmt man die Verbindung je zweier Elemente, dann die von je 3, 4, 5, ... Elementen in jeder möglichen Ordnung, so hat man die Variationen resp. der 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, u. s. w. Klasse (Binionen oder Amben, Ternionen, Quaternionen, Quinionen, u. s. w.), und zwar ohne, oder mit Wiederholung, je nachdem jedes Element in jeder Variation nur einmal, oder mehrmal vorkommen darf. Den Inbegriff aller Variationen der mten Klasse bei n Elementen ohne und mit Wiederholung bezeichnen wir resp. durch $\overset{m}{\underset{(n)}{V}}$ und $\overset{m}{\underset{(n)}{V}}'$, ihre Anzahl durch N. $\overset{m}{\underset{(n)}{V}}$ und N. $\overset{m}{\underset{(n)}{V}}'$; auch kann man die Elemente selbst in Klammern daneben setzen. z. B. N. $\overset{3}{\underset{(4)}{V}}$ (a, b, c, d) bezeichnet die Anzahl der Variationen

ohne Wiederholung in der 3ten Klasse aus den vier Elementen a, b, c und d. $N.\overset{5}{\underset{(3)}{V'}}(a, b, c)$ bedeutet die Anzahl der Variationen mit Wiederholung in der 5ten Klasse aus den drei Elementen a, b und c.

Bei n Elementen haben die Variationen ohne Wiederholung nur n Klassen, und die letzte enthält alle Permutationen der n Elemente; hingegen haben die Variationen mit Wiederholung eine unbeschränkte Anzahl von Klassen. z. B. Sind drei Elemente a, b, c gegeben, so hat man die Variationen ohne Wiederholung:

$\overset{1}{\underset{(3)}{V}}$. a, b, c

$\overset{2}{\underset{(3)}{V}}$. ab, ac, ba, bc, ca, cb

$\overset{3}{\underset{(3)}{V}}$. abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Mehr Klassen giebt es hier nicht.

Die Variationen mit Wiederholung sind:

$\overset{1}{\underset{(3)}{V'}}$. a, b, c.

$\overset{2}{\underset{(3)}{V'}}$. aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc.

$\overset{3}{\underset{(3)}{V'}}$. aaa, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, acc,
baa, bab, bac, bba, bbb, bbc, bca, bcb, bcc,
caa, cab, cac, cba, cbb, cbc, cca, ccb, ccc.

u. s. w.

1. Variationen ohne Wiederholung.

Gesucht wird $N.\overset{m}{\underset{(n)}{V}}(a, b, c, d, \ldots)$.

Denkt man sich die Variationen der mten Klasse in Abtheilungen geordnet, so daß alle, welche mit a anfangen, die erste Abtheilung bilden, die, welche mit b anfangen, die 2te, u. s. w., so giebt es n Abtheilungen. Wie viel Variationen sind nun in jeder Abtheilung? Nehmen wir die erste. Hier fängt jede Variation mit a an, und hinter a folgen noch $m - 1$ der übrigen Elemente b, c, d, ..., deren Anzahl $n - 1$ ist. Offenbar folgen also dem ersten Element a alle Variationen ohne Wiederholung, welche $n-1$ Elemente in der $m-1$ten Klasse haben. Deren Anzahl bezeichnen wir aber mit $N.\overset{m-1}{\underset{(n-1)}{V}}$, und weil

von jeder Abtheilung dasselbe gilt und n Abtheilungen sind, so ist:

$$N.\overset{m}{\underset{(n)}{V}} = n \cdot N.\overset{m-1}{\underset{(n-1)}{V}}$$

Nun ist aber:

$N.\overset{1}{\underset{(n)}{V}} = n$, folglich auch $N.\overset{1}{\underset{(n-1)}{V}} = n - 1$;

daher: $N.\overset{2}{\underset{(n)}{V}} = n(n-1)$, " " $N.\overset{2}{\underset{(n-1)}{V}} = (n-1)(n-2)$

" $N.\overset{3}{\underset{(n)}{V}} = n(n-1)(n-2)$ " " $N.\overset{3}{\underset{(n-1)}{V}} = (n-1)(n-2(n-3)$

" $N.\overset{4}{\underset{(n)}{V}} = n(n-1)(n-2)(n-3)$; u. s. w.

Aus $N.\overset{1}{\underset{(n)}{V}} = n$, $N.\overset{2}{\underset{(n)}{V}} = n^{2|-1}$, $N.\overset{3}{\underset{(n)}{V}} = n^{3|-1}$,

$N.\overset{4}{\underset{(n)}{V}} = n^{4|-1}$, u. s. w. folgt aber allgemein:

$$\text{III.} \quad N.\overset{m}{\underset{(n)}{V}} = n^{m|-1}.$$

z. B. 1) Wie groß $N.\overset{3}{\underset{(5)}{V}}$? Antw. $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

2) Wie groß $N.\overset{3}{V}(a, b, c, d, e, f)$? Antw. 120.

3) Wie groß $N.\overset{p}{\underset{(p)}{V}}$? Antw. $p!$

4) Wie viel dreiziffrige Zahlen giebt es, die ungleiche Ziffern haben?

Auflös. Wir haben 9 Ziffern und die 0, folglich 10 Elemente, und suchen zunächst $N.\overset{3}{\underset{(10)}{V}} = 10^{3|-1}$. Abzurechnen sind die Variationen, welche mit 0 anfangen, d. h. 012, 013, . . . bis 098. Die Anzahl dieser Variationen ist $= N.\overset{2}{\underset{(9)}{V}} = 9^{2|-1}$, folglich die gesuchte Anzahl = 648.

5) Wie viel 4ziffrige Zahlen mit ungleichen Ziffern giebt es? Antw. 4536.

2. Variationen mit Wiederholung.

Gesucht $N.\overset{m}{\underset{(n)}{V'}}(a, b, c, d, ..)$.

Bildet man dieselben Abtheilungen, wie in 1., so sind jetzt in jeder Abtheilung so viel Variationen, als alle n Elemente in der m—1ten Klasse haben; daher:

$$N.\overset{m}{\underset{(n)}{V'}} = n \cdot N.\overset{m-1}{\underset{(n)}{V'}}.$$

In der ersten Klasse ist jedes Element eine Variation, daher:

$N.\overset{1}{\underset{(n)}{V'}} = n$, folglich

$$\text{N.} \overset{2}{\underset{(n)}{V'}} = n \cdot n = n^2, \text{ folglich}$$

$$\text{N.} \overset{3}{\underset{(n)}{V'}} = n \cdot n^2 = n^3, \text{ folglich}$$

$$\text{N.} \overset{4}{\underset{(n)}{V'}} = n \cdot n^3 = n^4, \text{ u. s. w.; also allgemein:}$$

$$\text{IV. N.} \overset{m}{\underset{(n)}{V'}} = n^m.$$

z. B. 1) Wie viel Variationen mit Wiederholung haben die Elemente a, b, c, d, e, f in der dritten Klasse? Antw. 216.

2) Wie kann man die Anzahl aller 4ziffrigen Zahlen mittelst der Variationen finden? Auflös. Sie ist $= 10^4 - 10^3 = 9000$.

3) Wie viel 4 ziffrige Zahlen sind mittelst der Ziffern 1, 2, 0 darstellbar? Antw. 54.

3. Die Aufstellung der Variationen.

Man ordne die Elemente, z. B. alphabetisch bei Buchstaben, und bilde in jeder Klasse die Abtheilungen, welche bei der Entwicklung der Formeln III. und IV. gemacht wurden. Hierbei halte man das Gesetz fest: Man erhält alle Variationen jeder Klasse, wenn man allen Variationen der vorhergehenden Klasse bei Variationen ohne Wiederholung jedes Element vorsetzt, welches noch nicht in der Variation ist, bei Variationen mit Wiederholung aber überhaupt jedes Element. Sind z. B. vier Elemente a, b, c, d gegeben, so sind die Variationen ohne Wiederholung in der 2ten Klasse:

ab, ac, ad
ba, bc, bd
ca, cb, cd
da, db, dc;

folglich in der 3ten Klasse:

abc, abd, acb, acd, adb, adc
bac, bad, bca, bcd, bda, bdc
cab, cad, cba, cbd, cda, cdb
dab, dac, dba, dbc, dca, dcb.

Sind zwei Elemente a, b gegeben, so sind die Variationen mit Wiederholung in der 2ten Klasse:

aa, ab, ba, bb;

folglich in der 3ten Klasse:

aaa, aab, aba, abb
baa, bab, bba, bbb.

§. 180.
Die Combinationen.

Unter einer Combination versteht man jede Auswahl und Zusammenstellung (Verbindung) einer bestimmten Anzahl von Elementen aus gegebenen Elementen, wenn jede Rücksichtnahme auf die Folge, in welcher die Elemente genannt oder hingeschrieben werden, ausgeschlossen bleibt. Hieraus folgt, daß durch Versetzung der Elemente einer Combination keine neue Combination entsteht, daß vielmehr die Verschiedenheit der Combinationen nur in der Verschiedenheit der ausgewählten Elemente liegt. Die Anzahl der Elemente einer Combination bestimmt ihre Klasse, so daß die Combinationen dieselben Klassen haben, wie die Variationen; auch sind sie, wie diese, mit und ohne Wiederholung. Die Bezeichnung ist ebenfalls, wie bei den Variationen, nur schreibt man C statt V.

Am Schlusse des vorhergehenden §. sind die Variationen ohne Wiederholung für die vier Elemente a, b, c, d aufgestellt worden. Will man von diesen Variationen zu den Combinationen derselben Klasse übergehen, so setze man alle Variationen, welche aus denselben Elementen bestehen, in eine Abtheilung zusammen; man erhält dann vier Abtheilungen:

1te Abth. abc, acb, bac, bca, cab, cba
2te Abth. abd, adb, bad, bda, dab, dba
3te Abth. acd, adc, cad, cda, dac, dca
4te Abth. bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb.

Die Variationen in jeder Abtheilung sind nun als Combinationen einander gleich, denn sie zeigen aus den gegebenen Elementen immer nur dieselbe Auswahl dreier Elemente. Jede Abtheilung giebt also nur eine Combination, so daß vier Elemente in der dritten Klasse nur vier Combinationen ohne Wiederholung haben. Welche Variation jeder Abtheilung als Combination aufgestellt wird, ist zwar an sich gleichgültig; indeß leuchtet ein, daß man sowohl bei der Aufstellung der Combinationen, als auch, wenn man sie nur zählen will, eine bestimmte Ordnung wird beobachten müssen, um Verwirrung zu vermeiden, um namentlich keine Combination auszulassen oder doppelt zu zählen. Zu diesem Zwecke ordnet man zunächst die gegebenen Elemente auf eine bestimmte Art, Buchstaben nach dem Alphabet, Zahlen steigend oder fallend, und ordnet nun auch die Elemente jeder Combination in derselben Art, so daß niemals ein früheres Element einem späteren folgen darf. Man nennt dann die Combination geordnet, und nur auf diese Weise soll künftig

jede Combination aufgestellt werden. Bei dieser Bestimmung hat man das Gesetz: Aus den Variationen einer beliebigen Klasse erhält man die Combinationen derselben Klasse, wenn man nur die geordneten Variationen hervorhebt. — In Bezug auf das Beispiel oben haben wir also die vier Combinationen:

abc, abd, acd, bcd;

von ihnen können wir zu den Variationen zurückkehren, wenn wir jede Combination so oft wie möglich permutiren; es ist also die Anzahl der Variationen gleich $4 \cdot 3! = 24$. — Sind drei Elemente a, b, c gegeben, so hat man ohne Wiederholung:

$\overset{1}{\underset{(3)}{C}}$ a, b, c.

$\overset{2}{\underset{(3)}{C}}$ ab, ac, bc

$\overset{3}{\underset{(3)}{C}}$ abc.

Mehr Klassen giebt es hier nicht. — Ferner mit Wiederholung:

$\overset{1}{\underset{(3)}{C'}}$ a, b, c

$\overset{2}{\underset{(3)}{C'}}$ aa, ab, ac
bb, bc
cc

$\overset{3}{\underset{(3)}{C'}}$ aaa, aab, aac, abb, abc, acc
bbb, bbc, bcc
ccc

u. s. w. Die Anzahl der Klassen ist hier unbegrenzt.

1. Combinationen ohne Wiederholung.

Gesucht wird N. $\overset{m}{\underset{(n)}{C}}$ (a, b, c, d, ...).

In jeder einzelnen Klasse unterscheiden sich die Combinationen von einander dadurch, daß jede wenigstens *ein* anderes Element, als jede andere enthält. Wenn man nun die gesuchte Anzahl N. $\overset{m}{\underset{(n)}{C}}$ mit x bezeichnet und jede Combination so oft als möglich permutirt, so geht jede Combination, weil sie m verschiedene Elemente enthält, in m! Variationen über. Man erhält im Ganzen also $x \cdot m!$ Variationen, und alle sind einander ungleich. Denn zuerst sind diejenigen ungleich, welche aus derselben Combination entspringen, weil sie verschiedene Permutationen sind; dann aber sind auch je zwei aus ver-

schiedenen Combinationen entspringende ungleich, weil sie nicht ganz dieselben Elemente enthalten. Man hat also offenbar auf diese Weise alle Variationen der mten Klasse aus den gegebenen n Elementen erhalten; denn jede Variation muß aus einer Combination sich durch Versetzen der Elemente bilden lassen, wenn sie nicht selbst eine Combination ist. Die Anzahl der Variationen ist aber bereits gefunden: $= n^{m|-1}$ (Formel III. in §. 179); folglich ist

$$x \cdot m! = n^{m|-1}; \text{ hieraus:}$$

$$\text{V.} \quad \text{N.} \overset{m}{\underset{(n)}{C}} = \frac{n^{m|-1}}{m!} = n_m.$$

z. B. 1) Gesucht N. $\overset{3}{C}$(a, b, c, d, e). Auflös. $5_3 = 10$.

2) Wie viel Combinationen ohne Wiederholung haben 12 Elemente in der 9ten Klasse? Antw. 220.

3) Warum haben 11 Elemente in der 4ten Klasse eben so viel Combinationen ohne Wiederholung, als in der 7ten? und in der 3ten so viel, als in der 8ten? Warum ist allgemein N. $\overset{m}{\underset{(n)}{C}} =$ N. $\overset{n-m}{\underset{(n)}{C}}$? Antw. §. 174. III.

4) Wie viel Theiler hat die Zahl 2310?

Auflös. Es ist $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$; folglich hat diese Zahl

$$5 + 5_2 + 5_3 + 5_4 + 5_5 = 31 \text{ Theiler,}$$

wenn man 2310 selbst als Theiler gelten läßt, sonst 30.

2. Combinationen mit Wiederholung.

Gesucht wird N. $\overset{m}{\underset{(n)}{C'}}$ (a, b, c, d, ... x, y, z).

Auflös. Erste Klasse. Jedes Element ist eine Combination, folglich

$$\text{N.} \overset{1}{\underset{(n)}{C'}} = n.$$

Zweite Klasse. a kann man jedem der n Elemente vorsetzen, b nur $n-1$ Elementen, nämlich dem Element a nicht, c nur $n-2$ Elementen (a und b nicht), u. s. w., x kann man nur drei Elementen vorsetzen (x, y, z), y nur zweien (y, z) und z nur dem Element z. Man hat also die gesuchte Anzahl

$= n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 = (n+1)_2$ (§. 174, V.), also:

$$\text{N.} \overset{2}{\underset{(n)}{C'}} = (n+1)_2.$$

Dritte Klasse. In dieser und jeder folgenden Klasse wird die Anzahl der Combinationen mit Hülfe der in der vorhergehenden Klasse gefundenen Formel entwickelt. Man untersucht immer, wie viel Combinationen mit a, mit b, ..., mit z anfangen und addirt alle diese

Zahlen. In der dritten Klasse folgen dem Element a noch zwei Elemente, die also eine Combination der zweiten Klasse bilden, und weil hinter a alle Elemente, auch a selbst, folgen können, so fangen so viel Combinationen mit a an, als alle n Elemente in der zweiten Klasse Combinationen haben, d. h. $(n+1)_2$. Mit b fangen so viel Combinationen an, als $n-1$ Elemente b, c, ... y, z in der zweiten Klasse Combinationen haben, weil a auf b nicht folgen darf, also n_2. Eben so findet man, daß $(n-1)_2$ Combinationen mit c anfangen, $(n-2)_2$ mit d, u. s. w., endlich 3_2 mit y, und nur eine oder 2_2 mit z. Die Summe aller ist:

$(n+1)_2 + n_2 + (n-1)_2 + (n-2)_2 + \ldots + 3_2 + 2_2 = (n+2)_3$

(§. 174., V.);

folglich: $$N. \overset{3}{\underset{(n)}{C'}} = (n+2)_3.$$

Vierte Klasse. Mit a, b, c, ..., y, z fangen resp. $(n+2)_3$, $(n+1)_3$, n_3, ..., 4_3, 3_3 Combinationen an; denn jedem Elemente kann jede Combination der dritten Klasse folgen, welche aus diesem und allen nachfolgenden Elementen gebildet ist. Die Summa aller ist also:

$$(n+2)_3 + (n+1)_3 + n_3 + \ldots + 4_3 + 3_3 = (n+3)_4$$

folglich: $$N. \overset{4}{\underset{(n)}{C'}} = (n+3)_4.$$

Fünfte Klasse. Man erhält die Summe aller Combinationen:

$$(n+3)_4 + (n+2)_4 + (n+1)_4 + \ldots + 5_4 + 4_4 = (n+4)_5$$

folglich: $$N. \overset{5}{\underset{(n)}{C'}} = (n+4)_5.$$

Nichts hindert, so weiter zu schließen; folglich ist allgemein:

$$\text{VI.} \quad N. \overset{m}{\underset{(n)}{C'}} = (n+m-1)_m = \frac{n^{m|1}}{m!}.$$

Die letzte Umformung folgt aus §. 173. und §. 170., 1.

z. B. 1) Wie viel Combinationen mit Wiederholung haben die Elemente a, b, c in der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten und 5ten Klasse?

Antw. Resp. 3, 6, 10, 15, 21 Comb.

2) Wie viel Würfe kann man mit 3 Würfeln machen?

Auflös. Die Augen 1, 2, 3, 4, 5, 6 sind hier die Elemente, welche zu dreien bei jedem Wurf erscheinen. Unterscheidet man nun, wenn A, B, C die Würfel sind, den Fall, wenn A 3, B 2, C 5 Augen zeigt, von dem, wenn A 2, B 5, C 3, oder A 3, B 5, C 2 Augen zeigt, u. s. w., als besondere Würfe, so ist die gesuchte Anzahl $= N. \overset{3}{\underset{(6)}{V'}} = 6^3 = 216$. Läßt

man aber die Würfe 3, 2, 5 und 3, 5, 2 und 5, 2, 3 u. s. w. nur als einen besondern Fall gelten, so ist die Anzahl

$$= N. \overset{3}{\underset{(6)}{C'}} = \frac{6^{3|1}}{3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Fragt man endlich nur nach den verschiedenen Summen, welche die geworfenen Augen zusammen betragen können, so ist die Anzahl natürlich 16, nämlich 3, 4, 5... bis 18.

3. Die Aufstellung der Combinationen.

Sie geschieht so, wie die der Variationen, nur läßt man diejenigen Variationen fort, welche nicht geordnet sind. z. B.

1) Gesucht: $\overset{3}{\underset{(5)}{C}}$ (a, b, c, d, e).

abc, abd, abe, acd, ace, ade
bcd, bce, bde.
cde.

2) Gesucht: $\overset{5}{\underset{(6)}{C}}$ (a, b, c, d, e, f).

abcde, abcdf, abcef, abdef, acdef,
bcdef.

3) Gesucht: $\overset{4}{\underset{(2)}{C'}}$(a, b).

aaaa, aaab, aabb, abbb, bbbb.

4) Gesucht: $\overset{6}{\underset{(2)}{C'}}$(a, b), wenn jede Combination als ein Product ihrer Elemente betrachtet wird.

$a^6, a^5b, a^4b^2, a^3b^3, a^2b^4, ab^5, b^6.$

5) Gesucht: $\overset{4}{\underset{(3)}{C'}}$(a, b, c).

aaaa	aaab	aabb	abbb
	aaac	aabc	abbc
		aacc	abcc
			accc
bbbb	bbbc	bbcc	bccc
			cccc.

§. 181.

Anwendung auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Unter der mathematischen Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereigniß eintreffen werde, versteht man das Verhältniß der dem Ereigniß günstigen Fälle zu allen gleich möglichen Fällen. Bezeichnet n die

Anzahl aller Fälle, z die Anzahl der dem Ereigniß günstigen, und w die Wahrscheinlichkeit: so ist

$$w = \frac{z}{n}.$$

Ist $z = n$, d. h. sind alle Fälle günstige, so wird $w = 1$, und es tritt Gewißheit ein. Im gemeinen Leben nennt man ein Ereigniß wahrscheinlich, wenn $w > \frac{1}{2}$, ungewiß, wenn $w = \frac{1}{2}$, und unwahrscheinlich, wenn $w < \frac{1}{2}$ ist.

Das Verhältniß der dem Ereigniß ungünstigen Fälle $(n - z)$ zu allen, nennt man die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit. Bezeichnet man sie durch w', so ist

$$w' = \frac{n - z}{n} = 1 - \frac{z}{n} = 1 - w; \text{ daher ist noch } w + w' = 1.$$

Diese Wahrscheinlichkeit w heißt die einfache oder absolute.

Beispiel 1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln auf einen Wurf gerade 3, 5 und 6 zu werfen?

Auflös. Hier ist $n = 6^3$ (§. 180., 2. Beispiel 2.); ferner $z = N.P\,(3, 5, 6) = 3!$, folglich $w = \frac{1}{36}$, d. h. es ist wahrscheinlich, daß man unter 36 Würfen einmal 3, 5, 6 wirft.

Beispiel 2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln auf einen Wurf 6 zu werfen?

Auflös. Bezeichnet man die Augen, welche bei günstigem Wurfe die einzelnen Würfel zeigen müssen, mit x, y, z, so ist $x + y + z = 6$; folglich kann keine Unbekannte > 4 sein. Es kommen also von den Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6 hier nur 1, 2, 3, 4 in Betracht, und zwar die Variationen mit Wiederholung der 3ten Klasse zur bestimmten Summe 6. Diese Anzahl läßt sich finden, wenn man in $x + y + z = 6$ für x zuerst die größte mögliche Zahl 4, dann 3, 2, 1 setzt und jedesmal untersucht, welche Werthe y und z haben können. Man erhält 10 günstige Fälle.

4 1 1	3 2 1	2 3 1	1 4 1
	3 1 2	2 2 2	1 3 2
		2 1 3	1 2 3
			1 1 4

Es ist also $w = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$.

Beispiel 3. Wie groß ist bei 3 Würfeln die Wahrscheinlichkeit (w), früher die Summe 4, als die Summe 6, oder auch: wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (W), früher die Summe 6, als die Summe 4 zu werfen?

Auflös. Offenbar kommen hier nur die Fälle in Betracht, wenn gerade die Summe 4 oder die Summe 6 geworfen wird; alle andern sind gleichgültig, also außer Betracht. Man nennt solche Wahrscheinlichkeit die relative. Wie in der vorigen Aufgabe findet man die Anzahl aller Würfe zur Summe 4 gleich 3; die zur Summe 6 war schon gleich 10 gefunden. Es ist also die Anzahl aller in Betracht kommenden Würfe 13, folglich $w = \frac{3}{13}$ und $W = \frac{10}{13}$ (also auch $w + W = 1$).

Man kann die relative Wahrscheinlichkeit aus der absoluten herleiten. Die absolute Wahrscheinlichkeit, die Summe 4 zu werfen, ist $\frac{3}{216}$, die Summe 6 zu werfen: $\frac{10}{216}$. Nun war aber

$$w = \frac{3}{3+10} = \frac{\frac{3}{216}}{\frac{3}{216}+\frac{10}{216}}; \quad W = \frac{10}{3+10} = \frac{\frac{10}{216}}{\frac{3}{216}+\frac{10}{216}}.$$

Hieraus ist eine allgemeine Regel zu entnehmen.

Beispiel 4. Wie groß ist bei drei Würfeln die Wahrscheinlichkeit, auf den ersten Wurf die Summe 4, auf den zweiten die Summe 6 zu werfen?

Auflös. Die Wahrscheinlichkeit ist hier wieder eine andere, weil zwei Ereignisse, von denen jedes seine besondere absolute Wahrscheinlichkeit hat, zusammentreffen sollen, oder hier genauer unmittelbar nach einander eintreten sollen. Man nennt diese Wahrscheinlichkeit die zusammengesetzte oder concurrirende und wird sehen, daß man sie erhält, wenn man die absoluten Wahrscheinlichkeiten mit einander multiplicirt.

Bei der vorliegenden Aufgabe giebt es bei einem Wurf mit 3 Würfeln 216 Fälle, und unter diesen sind 3 dem Werfen der Summe 4 günstig (vergleiche die vorige Aufgabe), aber 10 dem Werfen der Summe 6. Bei 2 Würfen kann nun jeder der 3 günstigen Fälle mit jedem der 10 günstigen zusammentreffen, und dies giebt 3×10 günstige Fälle für unsere Aufgabe. Weil aber allgemein jeder mögliche Wurf bei dem ersten Werfen mit jedem möglichen Wurfe beim zweiten Werfen zusammentreffen kann, so giebt es überhaupt 216×216 Fälle; daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{3 \times 10}{216 \times 216} = \frac{3}{216} \times \frac{10}{216} = \frac{5}{7776}.$$

§. 182.

Der binomische und der polynomische Lehrsatz.

1. Der binomische Lehrsatz.

Dieser wichtige Lehrsatz hat den Zweck, die Potenz einer Summe in die Potenzen der Summanden aufzulösen oder aus $(a+b)^n$ die Klammern fortzuschaffen; seine Entwicklung ist eine der wichtigsten Anwendungen der Combinationslehre.

Multipliciren wir $a+b$ wiederholt mit $a+b$, so folgt:

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$\underline{a+b}$$
$$(a+b)^2 = \begin{cases} aa+ab \\ ba+bb \end{cases}$$
$$(a+b)^3 = \begin{cases} aaa+aab+aba+abb \\ baa+bab+bba+bbb \end{cases}$$

u. s. w.

Um das Folgende recht klar aufzufassen, vergleiche man die hervorgehobenen Worte in §. 179. Nr. 3.

Indem wir von $(a+b)^1$ zu $(a+b)^2$ durch Multiplication übergingen, haben wir jedem der beiden Elemente a und b zuerst a, dann b vorgesetzt; folglich muß $(a+b)^2$ gleich der Summe aller Variationen mit Wiederholung in der zweiten Klasse aus den Elementen a und b sein, wenn man jede Variation als Product auffaßt. — Indem wir von $(a+b)^2$ zu $(a+b)^3$ übergingen, haben wir jeder Variation, welche $(a+b)^2$ enthält, zuerst a, dann b vorgesetzt; folglich ist $(a+b)^3$ die Summe aller Variationen mit Wiederholung in der dritten Klasse aus den Elementen a und b, wenn man jede Variation als Product auffaßt. — Geht man von $(a+b)^3$ zu $(a+b)^4$ über, so muß man wieder (weil es der Multiplication entspricht) jeder Variation in $(a+b)^3$ zuerst a, dann b vorsetzen; folglich ist $(a+b)^4$ gleich der Summe aller Variationen mit Wiederholung in der vierten Klasse aus den Elementen a und b, wenn man jede Variation als Product auffaßt. — Bildet man weiter $(a+b)^5$, $(a+b)^6$, $(a+b)^7$, u. s. f., so ist eben so klar, daß $(a+b)^n$ die Summe aller Variationen mit Wiederholung in der nten Klasse aus den Elementen a und b sein muß, wenn man nur jede Variation als ein Product ihrer Elemente auffaßt. Man kann dies so schreiben:

$$(a+b)^n = \Sigma \left[\overset{n}{\underset{(2)}{V'}} (a, b) \right].$$

Es fragt sich nun, wie man die Addition aller dieser Variationen

am bequemsten, namentlich am übersichtlichsten, ausführt. Dies geschieht dadurch, daß man aus allen Variationen zuerst die Combinationen hervorhebt und dann jede Combination so oft, als es ihre Elemente zulassen, permutirt. Die Combinationen sind aber (vergl. §. 180. Nr. 3. Beispiel 4.):

$a^n, a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, a^{n-3}b^3, a^{n-4}b^4, \ldots\ldots, a^4b^{n-4}, a^3b^{n-3}, a^2b^{n-2}, ab^{n-1}, b^n.$

Jetzt hätte man jede Combination so oft als möglich zu permutiren; dadurch würde man alle Variationen erhalten, und diese müßte man addiren. Es ist aber klar, daß alle die Variationen, welche aus derselben Combination entspringen, also dieselben Elemente enthalten, einander gleich sind, denn sie sind ja Producte; folglich kann man solche Variationen dadurch addiren, daß man eine, also am besten die bereits hingeschriebene Combination, mit ihrer Anzahl, d. h. mit der Anzahl der Permutationen, multiplicirt. Wir erhalten sonach $(a+b)^n$, wenn wir jede der oben angegebenen Combinationen mit der Anzahl ihrer Permutationen multipliciren und alle diese Producte addiren. Aus §. 178. II. folgt aber:

a^n	hat	$\frac{n!}{n!}$	Permut.		u. s. w.		
$a^{n-1}b$	"	$\frac{n!}{(n-1)!\,1!}$	"	a^3b^{n-3}	hat	$\frac{n!}{3!\,(n-3)!}$	Permut.
$a^{n-2}b^2$	"	$\frac{n!}{(n-2)!\,2!}$	"	a^2b^{n-2}	"	$\frac{n!}{2!\,(n-2)!}$	"
$a^{n-3}b^3$	"	$\frac{n!}{(n-3)!\,3!}$	"	ab^{n-1}	"	$\frac{n!}{1!\,(n-1)!}$	"
		u. s. w.		b^n	"	$\frac{n!}{n!}$	"

Hieraus ergiebt sich:

$$\text{I.}\quad (a+b)^n = \frac{n!}{n!}a^n + \frac{n!}{(n-1)!\,1!}a^{n-1}b + \frac{n!}{(n-2)!\,2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n!}{(n-3)!\,3!}a^{n-3}b^3 + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{n!}{3!\,(n-3)!}a^3b^{n-3} + \frac{n!}{2!\,(n-2)!}a^2b^{n-2} + \frac{n!}{1!\,(n-1)!}ab^{n-1} + \frac{n!}{n!}b^n.$$

Nun ist $\frac{n!}{n!} = 1$, $\frac{n!}{(n-1)!} = n$, und für alle anderen Coefficienten kann man nach §. 174. II. oder III. Binomial-Coefficienten setzen. Dadurch entsteht die einfachere Schreibart:

II. $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n_2a^{n-2}b^2 + n_3a^{n-3}b^3 + \ldots$
$\ldots + n_3a^3b^{n-3} + n_2a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$.

Diese Summe hat $n+1$ Glieder; in jedem Gliede ist die Summe der Exponenten von a und b gleich n, und wenn man noch $n = n_1$ und $1 = n_0$ setzt, so enthält jedes Glied einen Binomial-Coefficienten, dessen Basis n, dessen Zeiger aber der Exponent von a oder von b ist. Welchen man zum Zeiger nimmt, ist nach §. 174. III. gleichgültig.

Man kann den binomischen Lehrsatz durch sein allgemeines Glied schreiben:

$$\text{III.}\quad (a+b)^n = \Sigma\left[n_\mathfrak{a} \cdot a^{n-\mathfrak{a}} \cdot b^\mathfrak{a}\right] = \Sigma \left[\frac{n!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!} \cdot a^\mathfrak{a} \cdot b^\mathfrak{b}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n}.$$

Um $a - b$ auf die nte Potenz zu erheben, setze man in II. $-b$ statt b; es entsteht (§. 52.):

IV. $(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + n_2a^{n-2}b^2 - n_3a^{n-3}b^3 + - + \ldots$
$\ldots \mp nab^{n-1} \pm b^n$.

Die Vorzeichen wechseln ab; das letzte Glied wird + oder —, je nachdem n gerade oder ungerade ist. — Häufig kommt folgender Fall vor, den man merken möge:

$$(1+x)^n = 1 + nx + n_2x^2 + n_3x^3 + n_4x^4 + \ldots$$
$$\ldots + n_2x^{n-2} + nx^{n-1} + x^n.$$

Zur Uebung. 1) $2a - 1$ auf die 7te Potenz zu erheben.

Auflös. $(2a-1)^7 = 128a^7 - 448a^6 + 672a^5 - 560a^4 + 280a^3 - 84a^2 + 14a - 1$.

Um die Probe zu machen, kann man $a = 1$ setzen.

2) Wie heißt das 4te Glied in der Reihe für $(1-3x)^7$?

Antw. $-945x^3$.

3) Wie heißt das 3te Glied in $(a-2b)^5$?

Antw. $40a^3b^2$.

4) Wie heißt das 10te Glied in $(2+\frac{1}{2}x)^{14}$?

Antw. $\frac{1001}{8}x^9$.

5) Welche Sätze für Binomial-Coefficienten ergeben sich, wenn man in II. und auch in IV. $a = b = 1$ setzt?

6) Wie folgt hieraus, daß:

$8_0 + 8_2 + 8_4 + 8_6 + 8_8 = 8_1 + 8_3 + 8_5 + 8_7$ ist? und daß jede dieser Summen $= 2^7$?

7) $(2-\sqrt{-1})^5$ in eine complexe Zahl zu verwandeln.

8) Auflös. $(2-\sqrt{-1})^5 = -38 - 41\sqrt{-1}$.

8) Wie heißen in der Reihe für $(2x^4 - \frac{1}{2}y^2)^{15}$ das 10te, 11te und 12te Glied?

Auflös. $-\frac{5005}{8}x^{24}y^{18}$; $+\frac{3003}{32}x^{20}y^{20}$; $-\frac{1365}{128}x^{16}y^{22}$.

9) $(2a^2 - \frac{1}{2}b)^5 = 32a^{10} - 40a^8b + 20a^6b^2 - 5a^4b^3 + \frac{5}{8}a^2b^4 - \frac{1}{32}b^5$.

2. Der polynomische Lehrsatz.

Um $(a+b+c+d+e\dots)^n$ zu entwickeln, kann man genau wie bei der Entwickelung des binomischen Lehrsatzes verfahren und erhält die Summe aller Variationen mit Wiederholung in der nten Klasse aus den Elementen $a, b, c, d, e, \dots$, wenn man jede Variation als ein Product betrachtet. Um zuerst alle Combinationen der nten Klasse zu bilden, sieht man, daß alle in der allgemeinen Form

$$(1)\quad \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\mathfrak{e}+\dots=n}{a^{\mathfrak{a}} b^{\mathfrak{b}} c^{\mathfrak{c}} d^{\mathfrak{d}} e^{\mathfrak{e}} \dots}$$

enthalten sind, wenn man für die deutschen Buchstaben 0 und alle positiven ganzen Zahlen setzt, die bei der Beschränkung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\mathfrak{e}+\dots=n$ zulässig sind. Diese allgemeine Combination gestattet aber

$$(2)\quad \frac{n!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!\,\mathfrak{d}!\,\mathfrak{e}!\dots} \text{ Permutationen.}$$

Multiplicirt man (1) mit (2), so hat man jede Combination mit der Anzahl ihrer Permutationen multiplicirt, und weil die Summe aller Producte die Summe aller Variationen mit Wiederholung in der nten Klasse ist, so hat man

$$(a+b+c+d+e+\dots)^n = \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\mathfrak{e}\dots=n}{\Sigma\left[\frac{n!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!\,\mathfrak{d}!\,\mathfrak{e}!\dots} a^{\mathfrak{a}}\cdot b^{\mathfrak{b}}\cdot c^{\mathfrak{c}}\cdot d^{\mathfrak{d}}\cdot e^{\mathfrak{e}}\dots\right]}$$

Ist z. B. $n=2$, so folgt:

$$(a+b+c+\dots)^2 = \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\dots=2}{\Sigma\left[\frac{2!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!\dots} a^{\mathfrak{a}} b^{\mathfrak{b}} c^{\mathfrak{c}}\dots\right]}.$$

Die Glieder, welche hier entstehen, können nur von zweierlei Art sein. Entweder ist der eine deutsche Buchstabe gleich 2 und die andern sind gleich 0, oder zwei dieser Buchstaben haben den Werth 1 und die übrigen sind gleich 0. Im ersten Falle ist der Coefficient

$$= \frac{2!}{2!\,0!\,0!\dots} = 1, \text{ im zweiten } = \frac{2!}{1!\,1!\,0!\,0!\dots} = 2.$$

Man erhält die Summe der Quadrate aller Summanden und das doppelte Product je zweier Summanden (Combinationen, nicht Variationen). (Vergl. §. 87.).

Drittes Kapitel.

Die Reihen. Die arithmetischen und geometrischen Progressionen. Die unendlichen Reihen. Convergenz der Reihen. Umformung in Reihen. Stetigkeit der Functionen. Maxima und Minima. Die Methode der unbestimmten Coefficienten.

§. 183.

Erklärung.

Beliebig viel Zahlen, welche nach einem bestimmten Gesetz in bestimmter Ordnung sich ergeben, bilden eine Reihe. Die Zahlen werden die Glieder der Reihe genannt, und jedes Glied hat eine bestimmte Stellenzahl (Index): das erste die Stellenzahl 1, das zweite die Stellenzahl 2, u. s. w., das nte die Stellenzahl n. Reihen bilden z. B. die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ...; ferner ihre Quadrate, ihre reciproken Werthe, u. s. w. Von einer Reihe mit absoluten Gliedern sagt man: sie nimmt zu oder wächst, wenn die Glieder nach und nach größer werden, sie nimmt ab oder fällt, wenn die Glieder nach und nach kleiner werden.

So ist z. B. die Reihe

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots$$

eine zunehmende, hingegen

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$$

eine abnehmende. Die Reihe

$$1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1,$$

welche entsteht, wenn man in 8_a für a die Werthe 0, 1, 2, ... bis 8 setzt, wächst bis zur Mitte, dann fällt sie.

Sind die Glieder zum Theil oder alle negativ, so gilt die angegebene Bedeutung von „wachsen" und „fallen" nicht mehr allgemein. Das Weitere hierüber folgt bei den besonderen Reihen.

Hauptsächlich sind es zwei Fragen, mit deren Beantwortung wir uns bei Reihen beschäftigen werden: wie heißt irgend ein Glied (das nte) der Reihe, wenn die Abhängigkeit eines Gliedes von seiner Stellenzahl nicht unmittelbar im Gesetz der Reihe liegt, und wie groß ist die Summe beliebig vieler Glieder der Reihe.

Die arithmetischen Progressionen.

§. 184.

Die einfachen arithmetischen Progressionen.

Eine Reihe, in welcher jedes Glied aus dem vorhergehenden dadurch entsteht, daß man zu diesem eine bestimmte Zahl, etwa d,

addirt, heißt eine einfache arithmetische Progression. Man nennt d die Differenz der Progression, und bezeichnet man das erste Glied mit a, so ist die allgemeine Form solcher Reihe:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ \ldots\ldots$$

Die Progression steigt oder fällt, je nachdem d positiv oder negativ ist, und sonach erstreckt sich die in §. 183. gegebene Erklärung der steigenden und fallenden Reihe bei arithmetischen Progressionen auch auf negative Glieder.

Sind p, q, r drei auf einander folgende Glieder, so ist $r-q = q-p$, folglich auch $q=\frac{p+r}{2}$, woraus man unmittelbar den Zusammenhang zwischen einer arithmetischen Progression und einer arithmetischen Proportion erkennt.

Bezeichnet u das nte Glied, so ist

$$\text{I.}\quad u = a+(n-1)d.$$

Diese Formel ergiebt sich unmittelbar aus dem oben angegebenen Schema der Progression.

Bezeichnet S die Summe der ersten n Glieder, so ist

$$S = a+(a+d)+(a+2d)+\ldots\ldots+(u-2d)+(u-d)+u$$

oder, wenn man die Glieder in umgekehrter Ordnung schreibt:

$$S = u+(u-d)+(u-2d)+\ldots\ldots+(a+2d)+(a+d)+a.$$

Addirt man beide Gleichungen, so giebt jedes Glied der oberen Reihe, zu dem eben so vielten der unteren addirt, die Summe $a+u$, und weil n Summanden sind, so folgt $2S=(a+u)n$, folglich

$$\text{II.}\quad S=\frac{a+u}{2}\cdot n,$$

d. h. S ist gleich der halben Summe des ersten und letzten Gliedes multiplicirt mit der Anzahl. Setzt man den Werth von u aus I. in II. ein, so folgt noch

$$\text{III.}\quad S = na+\frac{n(n-1)}{2}d = na+n_2 d,$$

eine Formel, welche bereits in §. 174., V., Beispiel 4. gefunden wurde.

Von den Formeln I., II. und III. sind nur je zwei von einander unabhängig; folglich müssen von den Buchstaben a, d, n, u, S drei gegeben sein; die beiden anderen kann man dann finden, indem man von den Formeln I., II. und III. zwei beliebige als Bestimmungsgleichungen benutzt. Die Anzahl dieser Aufgaben ist $N.\overset{2}{\underset{(5)}{C}} = 5_2 = 10$. Zu jeder dieser Aufgaben folgt unten ein Beispiel (Beisp. 1. bis 10.).

Sind zur Bestimmung einer arithmetischen Progression nicht drei der fünf Buchstaben a, d, n, u, S gegeben, sondern andere Bedingungen, so ist es in der Regel am zweckmäßigsten, bei der Auflösung von dem Schema der Progression auszugehen.

Beispiel. Die Summe des zweiten, dritten und vierten Gliedes einer arithmetischen Progression sei gleich $6a - 3b$, die Summe des ersten und sechsten Gliedes gleich $5a - 3b$; man soll die Progression bestimmen.

Aufl. Die Progression sei: x, $x + y$, $x + 2y$, $x + 3y$, ..., so hat man

$$1)\quad 3x + 6y = 6a - 3b$$
$$2)\quad 2x + 5y = 5a - 3b$$

Hieraus folgt $x = b$, $y = a - b$; daher heißt die Progression:

$$b,\ a,\ 2a - b,\ 3a - 2b,\ 4a - 3b,\ 5a - 4b,\ \text{u. s. w.}$$

Sollen zwischen zwei auf einander folgende Glieder u und $u + d$ einer arithmetischen Progression m Glieder interpolirt werden, d. h. sollen m zwischen u und $u + d$ liegende Zahlen gefunden werden, welche in Verbindung mit u und $u + d$ wieder eine arithmetische Progression (von $m + 2$ Gliedern) bilden, und bezeichnet x die Differenz dieser neuen Progression, so ist das Schema derselben:

$$\ldots.\ u,\ u+x,\ u+2x,\ u+3x,\ \ldots..,\ u+mx,\ u+d\ \ldots.$$

Weil nun $u + d$ wieder um x größer als $u + mx$ sein muß, so hat man $u + mx + x = u + d$, folglich

$$x = \frac{d}{m+1}.$$

Ist z. B. die Progression gegeben:

$$-2,\ 4,\ 10,\ 16,\ 22,\ \ldots.$$

und sollen zwischen je zwei auf einander folgende Glieder drei Glieder interpolirt werden, so ist $x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; folglich die neue Progression:

$$-2,\ -\tfrac{1}{2},\ 1,\ 2\tfrac{1}{2},\ 4,\ 5\tfrac{1}{2},\ 7,\ 8\tfrac{1}{2},\ 10,\ 11\tfrac{1}{2},\ 13,\ 14\tfrac{1}{2},\ 16,\ \ldots.$$

Indem man die Glieder einer arithmetischen Progression rückwärts verfolgt, kann man die Progression auch über das erste Glied hinaus beliebig weit fortsetzen. Das dem ersten Gliede vorangehende würde, weil man immer d zu subtrahiren hat, $a - d$ sein, das diesem vorangehende $a - 2d$, u. s. w. Will man auch diese Glieder numeriren, so muß man sich hierzu der Null und der negativen Zahlen bedienen. Man erhält dann folgende Darstellung, in welcher über jedem Gliede seine Stellenzahl steht:

$$\ldots.\ \overset{-2}{a - 3d},\ \overset{-1}{a - 2d},\ \overset{0}{a - d},\ \overset{1}{a},\ \overset{2}{a + d},\ \overset{3}{a + 2d},\ \overset{4}{a + 3d},\ \ldots..$$

Das Glied mit der Stellenzahl $-n$ ist gleich $a-(n+1)d$, und weil man dieses Glied auch $a+(-n-1)d$ schreiben kann, so folgt, daß die Formel I. $u=a+(n-1)d$ auch für die Glieder mit negativen Stellenzahlen gültig ist.

Auch für interpolirte Glieder gilt diese Formel. Um interpolirte Glieder so zu numeriren, daß sich ihre Stellenzahlen in die Stellenzahlen der Glieder der ursprünglichen Progression einreihen, muß man sich der gebrochenen Zahlen bedienen. Befinden sich nämlich zwischen dem nten Gliede u und dem $n+1$sten Gliede $u+d$ einer Progression m interpolirte Glieder, so ist das pte interpolirte Glied gleich $u+\frac{pd}{m+1}$, und bezeichnet z dessen Stellenzahl in der ursprünglichen Progression, so würde die Formel I. auch für dieses Glied Gültigkeit haben, wenn

$$a+(z-1)d=u+\frac{pd}{m+1}$$

wäre. Hieraus folgt aber, weil $u=a+(n-1)d$ ist:

$$z=n+\frac{p}{m+1}.$$

Die Stellenzahlen der m interpolirten Glieder sind also die Brüche mit dem Nenner $m+1$, welche zwischen n und $n+1$ liegen, d. h. $n+\frac{1}{m+1}$, $n+\frac{2}{m+1}$, $n+\frac{3}{m+1}$, u. s. w. bis $n+\frac{m}{m+1}$. — Endlich gilt die Formel I. auch, wenn die Stellenzahl eine negative gebrochene Zahl ist, d. h. wenn zwischen den Gliedern mit den Stellenzahlen $-n$ und $-(n+1)$ sich m interpolirte Glieder befinden und deren Stellenzahlen (in dem Schema oben von rechts nach links) mit $-n-\frac{1}{m+1}$, $-n-\frac{2}{m+1}$, $-n-\frac{3}{m+1}$, u. s. w. bis $-n-\frac{m}{m+1}$ bezeichnet werden. Zum Beweise hat man nur zu zeigen, daß das interpolirte Glied mit der Stellenzahl $-n-\frac{p}{m+1}$ gleich $a+\left(-n-\frac{p}{m+1}-1\right)d$ ist, was leicht ist und dem Leser überlassen bleiben mag.

Da die einfachen arithmetischen Progressionen von praktischer Wichtigkeit sind, so haben sie hier eine besondere Stelle gefunden. Nöthig war dies nicht, weil sie in den jetzt folgenden höheren arithmetischen Progressionen als ein besonderer Fall enthalten sind. Der Leser wird leicht aus den folgenden allgemeinen Formeln die besonderen dieses §. ableiten.

Beispiele. 1) Wenn Jemand am 1. August 3 Pfennige zurücklegt, an jedem folgenden Tage aber 2 Pfennige mehr, als am vorhergehenden: wie viel legt er dann am letzten September desselben Jahres zurück, und wie viel hat er dann überhaupt gesammelt?

Auflös. 10 Sgr. 3 Pf. und 10 Thlr. 20 Sgr. 3 Pf.

2) Es wird ein Brunnen ausgegraben, und zwar am ersten Tage $4\frac{3}{4}$ Fuß tief, an jedem folgenden aber immer $\frac{1}{4}$ Fuß weniger tief, als am vorhergehenden; am letzten Tage 1 Fuß tief. Wie tief ist der Brunnen, und wie viel Tage dauerte die Arbeit?

Auflös. 46 Fuß tief, und die Arbeit dauerte 16 Tage.

3) An eine Anzahl Männer wurden 77 Thaler vertheilt; der erste Mann erhielt 7 Thlr. und jeder folgende 10 Sgr. weniger als der vorhergehende. Wie viel Männer waren es, und wie viel erhielt der letzte?

Auflös. Entweder 21 Männer und der letzte erhielt 10 Sgr., oder 22 Männer und der letzte erhielt nichts.

4) In einer arithmetischen Progression von 81 Gliedern ist das erste gleich 4, das letzte gleich -4; wie heißt die Differenz und wie groß ist die Summe aller Glieder?

Auflös. Die Differenz $= -0{,}1$ und die Summe $= 0$.

5) Ein Reisender bewegt sich mit beschleunigter Geschwindigkeit so, daß er am ersten Tage 5 Meilen zurücklegt, an jedem folgenden Tage aber seinen Weg immer um dieselbe Strecke größer macht, als am vorhergehenden Tage. Wenn er nun in 20 Tagen 120 Meilen zurücklegt, um welche Strecke vergrößerte er täglich seinen Weg, und wie viel Meilen legte er am letzten Tage zurück?

Auflös. $\frac{2}{19}$ Meilen und 7 Meilen.

6) Das erste Glied einer arithmetischen Progression ist $= t$, das letzte $= 3t$, die Summe aller Glieder $= 42t$; wie groß ist die Anzahl der Glieder und die Differenz?

Auflös. 21 und $\frac{t}{10}$.

7) In einer arithmetischen Progression von 22 Gliedern ist das letzte gleich 5, die Differenz gleich $\frac{1}{3}$; wie groß ist das erste Glied und die Summe aller Glieder?

Auflös. -2 und 33.

8) Die Zahl 30 soll so in 25 Summanden zerlegt werden, daß der zweite und jeder folgende um $\frac{1}{3}$ größer ist, als der vorhergehende; wie heißt der erste und wie der letzte Summand?

Auflös. $-2{,}8$ und $+5{,}2$.

9) Ein Reisender legt 64 Meilen zurück und zwar 9 Meilen am letzten Tage; wie lange war er unterwegs und wie viel Meilen legte er am ersten Tage zurück, wenn er an jedem folgenden Tage $\frac{2}{3}$ Meilen weiter reiste, als am vorhergehenden Tage?

Auflös. Gegeben: $d = \frac{2}{3}$, $u = 9$, $S = 64$; gesucht: $a = x$, $n = y$.

$$1)\quad 64 = \frac{x+9}{2} \cdot y$$

$$2)\quad 9 = x + (y-1)\tfrac{2}{3}.$$

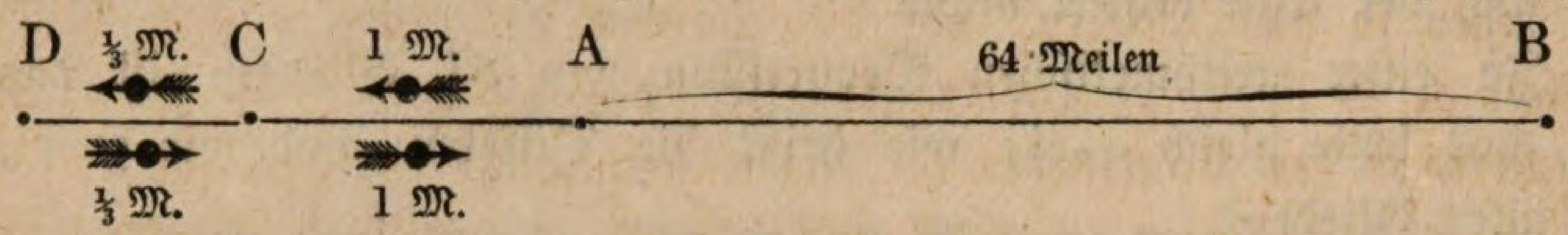
Eliminirt man x aus diesen Gleichungen, so erhält man

$$y^2 - 28y + 192 = 0;$$

hieraus folgt $y = \begin{cases} 12 \\ 16 \end{cases}$ und entsprechend $x = \begin{cases} +1\frac{2}{3} \\ -1. \end{cases}$

Die eine Auflösung sagt: der Reisende legte am ersten Tage $1\frac{2}{3}$ Meilen zurück und war 12 Tage unterwegs.

Die zweite Auflösung sagt: der Reisende legte am ersten Tage -1 Meile zurück und war 16 Tage unterwegs. Diese Auflösung erhält einen Sinn, wenn man die negative Meilenzahl (-1) auf die Richtung der Bewegung bezieht. Wollte der Reisende von A nach B, so sagt die Auflösung: am ersten Tage ging er 1 Meile, aber nicht in der Richtung von A nach B, sondern in der entgegengesetzten;



er war am Ende des Tages in C. Am zweiten Tage $(-\frac{1}{3}$ Meile) legte er, ebenfalls in dieser entgegengesetzten Richtung, $\frac{1}{3}$ Meile zurück (bis D); am dritten Tage aber $(+\frac{1}{3}$ Meile) kehrte er um und ging in der wahren Richtung nach B hin $\frac{1}{3}$ Meile (bis C); am vierten Tage $(+1$ Meile) ging er ebenfalls in dieser Richtung 1 Meile. Er war also am Schlusse des vierten Tages wieder in A und bewegte sich von jetzt an noch 12 Tage lang gerade so, wie die erste Auflösung diese Bewegung angiebt.

10) In einer arithmetischen Progression von 8 Gliedern ist das letzte gleich $4a - 5b$, die Summe aller gleich $4a - 12b$; wie heißt das erste Glied und die Differenz?

Auflös. $2b - 3a$ und $a - b$.

11) Wie groß ist die Summe der ersten n ganzen Zahlen, der ersten n ungeraden Zahlen und der ersten n geraden Zahlen?

Antw. Resp. $(n+1)_2$, n^2 und $n(n+1)$.

12) Wie groß ist die Summe aller n-ziffrigen ganzen Zahlen?

Auflös. Ist x ihre Anzahl, so ist $10^{n-1} + x - 1 = 10^n - 1$; folglich $x = 9 \cdot 10^{n-1}$, dann $S = \frac{99}{2} \cdot 10^{2n-2} - \frac{9}{2} \cdot 10^{n-1}$.

13) Wie groß ist die Summe aller geraden, dreiziffrigen und durch 7 theilbaren ganzen Zahlen?

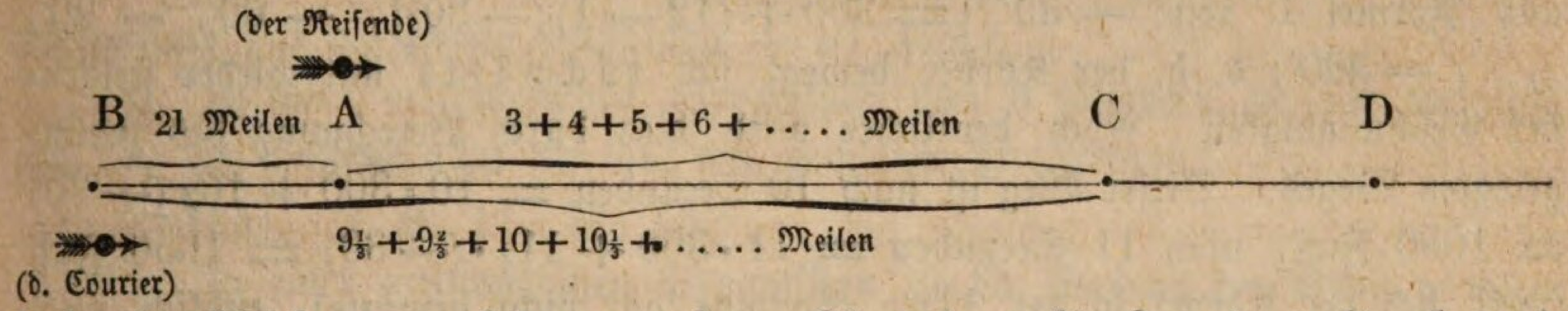
Auflös. Man sucht bequemer die Summe der dreiziffrigen, durch 14 theilbaren Zahlen. Die erste ist $112 = 8 \cdot 14$, die letzte: $994 = 71 \cdot 14$, die Anzahl $= 64$, die Summe $= 35392$.

14) Die Summe aller Glieder einer arithmetischen Progression ist 45, das letzte Glied 15, die Differenz $2\frac{1}{3}$; gesucht das erste Glied (x) und die Anzahl der Glieder (y).

Auflös. Aus $15 = x + (y-1)\frac{7}{3}$ und $45 = \frac{x+15}{2} \cdot y$ folgt: $x = \left\{ \begin{matrix} -6 \\ 8\frac{1}{3} \end{matrix} \right\}$ und $y = \left\{ \begin{matrix} 10 \\ 3\frac{6}{7} \end{matrix} \right\}$. Hier gilt nur $x = -6$, $y = 10$.

15) Von einem Orte A reist Jemand fort, macht den ersten Tag 3 Meilen und an jedem folgenden Tage 1 Meile mehr, als am vorhergehenden. Einen Tag später wird ihm von einem 21 Meilen zurück gelegenen Orte B ein Courier nachgeschickt, welcher am ersten Tage $9\frac{1}{3}$ Meile zurücklegt und an jedem folgenden Tage $\frac{1}{3}$ Meile mehr, als am vorhergehenden. Nach wie viel Tagen wird der Courier den Reisenden einholen?

Auflös. Nach x Tagen, so ist der Reisende $x+1$ Tage unterweges, bis ihn der Courier einholt. Der Courier legt aber in x Tagen so viel Meilen zurück, als die Summe der ersten x Glieder der Progression $9\frac{1}{3}$, $9\frac{2}{3}$, 10, $10\frac{1}{3}$, ... beträgt, also $x \cdot 9\frac{1}{3} + x_2 \cdot \frac{1}{3}$ Meilen; der Reisende aber in $x+1$ Tagen so viel Meilen, als die Summe der ersten $x+1$ Glieder der Progression 3, 4, 5, 6, ... beträgt, also $(x+1) \cdot 3 + (x+1)_2 \cdot 1$ Meilen. Nun macht aber der Courier in x Tagen gerade 21 Meilen mehr, als der Reisende in $x+1$ Tagen (wie die nachfolgende Darstellung deutlich zeigt, in welcher C die Stelle bedeutet, an welcher der Courier den Reisenden einholt:



daher die Gleichung: $x \cdot 9\frac{1}{3} + x_2 \cdot \frac{1}{3} = 21 + (x+1) \cdot 3 + (x+1)_2 \cdot 1$, aus welcher $x = 8$ und $x = 9$ folgt. Welche Bedeutung haben nun die beiden Werthe? Hat die Aufgabe zwei Auflösungen? Der Ansatz geht aus der Bedingung hervor, daß nach x Tagen der Courier gerade 21 Meilen mehr gemacht haben soll, als der Reisende, und die Auflösung sagt, daß dies zweimal der Fall ist: nach 8 Tagen und nach 9 Tagen. Ist also CD der Weg, den der Courier am neunten Tage macht, so macht der Reisende, wenn Beide ihre Bewegung fortsetzen, an demselben Tage, also am zehnten seiner Reise, denselben Weg. Der Leser möge sich hiervon durch die Probe überzeugen.

16) Einem Boten, welcher vor 18 Tagen einen Ort A verließ und täglich 4 Meilen macht, wird ein Courier nachgeschickt, welcher am ersten Tage 10 Meilen, an jedem folgenden aber $\frac{1}{2}$ Meile mehr macht, als am vorhergehenden; wann und wo holt er den Boten ein?

Auflös. Treffen sie x Tage nach Abgang des Couriers zusammen, so erhält man $x = 9$ und auch $x = -32$. Der Courier holt den Boten am Ende des neunten Tages ein und 108 Meilen von A entfernt. Welche Bedeutung hat aber -32? Denkt man sich die Bewegungen des Boten und des Couriers als die Fortsetzungen schon früher begonnener Bewegungen, so waren Beide 32 Tage vor der Zeit, als der Courier A verließ, an derselben

Stelle. Denn der Bote war vor 18 Tagen in A, folglich vor 32 Tagen an einem Orte, welcher $4 \cdot 14$ Meilen, d. h. 56 Meilen rückwärts von A entfernt liegt. Der Courier hat, wenn man seine Bewegung von A aus rückwärts verfolgt, am ersten Tage vor seinem Abgange aus A $9\frac{1}{2}$ Meilen, am zweiten Tage 8 Meilen, am dritten $7\frac{1}{2}$ Meilen u. s. w. gemacht, also in 32 Tagen: $32 \cdot 9\frac{1}{2} + \frac{32 \cdot 31}{1 \cdot 2} \cdot (-\frac{1}{2})$ Meilen $= 56$ Meilen. Für eine weitere Untersuchung dieser Bewegung beachte man das nächste Beispiel.

17) Bei einer abnehmenden Progression

$$a,\ a-d,\ a-2d,\ a-3d,\ \ldots.$$

müssen, auch wenn a positiv ist, negative Glieder entstehen, falls nur die Reihe weit genug fortgesetzt wird. Legt z. B. ein Körper in der ersten Secunde 300 Fuß zurück und in jeder folgenden 30′ weniger, als in der vorhergehenden, so kann man fragen: wann kommt der Körper zur Ruhe? Gesetzt in der xten Secunde, so muß $300 - (x - 1) \cdot 30 = 0$ sein, woraus $x = 11$ folgt, d. h. in der 11ten Secunde bewegt sich der Körper gar nicht. Nennen wir ferner den Weg, welchen der Körper in einer Secunde zurücklegt, seine Geschwindigkeit, so können wir fragen, welche Geschwindigkeit hat er in der 12ten, 13ten, 14ten u. s. w. 21sten Secunde? Man erhält aber aus Formel I. resp. $-30'$ $[= 300 + (12 - 1)(-30)]$, $-60'$, $-90'$, ..., $-300'$; d. h. der Körper bewegt sich rückwärts mit wieder steigender Geschwindigkeit. Noch deutlicher wird dies durch Berechnung des zurückgelegten Weges. Dieser Weg ist nach 10 Secunden $= 10 \cdot 300 + 10_2 (-30) = 1650$ Fuß, nach 11 Secunden $= 11 \cdot 300 + 11_2 \cdot (-30) = 1650$ Fuß (weil sich der Körper in der 11ten Secunde gar nicht bewegte), endlich nach 21 Secunden $= 21 \cdot 300 - \frac{21 \cdot 20}{1 \cdot 2} \cdot 30 = 0$, d. h. der Körper ist jetzt zu dem Anfangspunkte der Bewegung zurückgekehrt. Anwendung findet dieser Fall in der Mechanik bei lothrecht in die Höhe geworfenen Körpern.

18) A und B gehen von demselben Orte α ab, aber B 1 Tag später, und nach derselben Richtung hin. A macht am ersten Tage 12 Meilen, an jedem folgenden 2 Meilen weniger, als am vorhergehenden; B macht am ersten Tage 1 Meile, an jedem folgenden 1 Meile mehr, als am vorhergehenden. Wann und wo treffen sie zusammen?

Auflös. Nach 9 Tagen, vom Abgange des A an gerechnet, und 36 Meilen von α entfernt. Es wäre hier falsch, zu schließen, daß A überhaupt nur 36 Meilen zurücklegte; denn A war schon am Ende des sechsten Tages 42 Meilen von α entfernt. Am siebenten Tage ruhete er, und ging dann in 2 Tagen wieder 6 Meilen zurück. (Vergl. den Schluß des §. 23.)

19) Zwei Städte A und B sind 66 Meilen von einander entfernt. Eine Person geht von A nach B, macht am ersten Tage 5 Meilen und an jedem folgenden 1 Meile weniger, als am vorhergehenden Tage. Gleichzeitig geht eine zweite Person von B nach A ab, macht am ersten Tage 1 Meile und

an jedem folgenden 1 Meile mehr, als am vorhergehenden Tage. Wann und wo treffen sich beide Personen? — Antw. Nach 11 Tagen in A.

20) Von einem Orte A geht ein Reisender ab und macht täglich 6 Meilen. Drei Tage später folgt ihm von A aus ein zweiter Reisender, der am ersten Tage 4 Meilen und jeden folgenden Tag eine Meile mehr macht, als am vorhergehenden Tage; nach wie viel Tagen und wo holt der zweite Reisende den ersten ein?

Auflös. Nach 9 Tagen, vom Abgange des zweiten Reisenden gerechnet, und 72 Meilen von A entfernt. Die zweite Auflösung (— 4 Tage) zeigt an, daß die beiden Reisenden, wenn ihre Bewegungen die Fortsetzungen schon früher begonnener Bewegungen waren, vor 4 Tagen, also 1 Tag vor Abgange des ersten Reisenden, zusammen waren, und zwar 6 Meilen vor A.

21) Ein Reisender verläßt einen Ort A, macht am ersten Tage 4 Meilen und an jedem folgenden Tage $\frac{1}{3}$ Meile mehr, als am vorhergehenden Tage. Einen Tag später folgt ihm aus einem 8 Meilen zurückgelegenen Orte B ein zweiter Reisender, der am ersten Tage 5 Meilen und an jedem folgenden $\frac{1}{2}$ Meile mehr, als am vorhergehenden Tage macht. Nach wie viel Tagen holt der zweite Reisende den ersten ein? (Vergl. die Figur in Beisp. 15.)

Auflös. 9 Tage nach dem Abgange des zweiten Reisenden. — Welche Bedeutung hat die zweite Auflösung — 16 Tage?

22) In einer arithmetischen Progression von 5 Gliedern ist das vorletzte $= 13$, die Summe aller $= 55$; wie heißt die Progression?

Auflös. 7, 9, 11, 13, 15.

23) In einer arithmetischen Progression ist die Summe der ersten n Glieder (für jeden Werth von n) gleich $\frac{2n^2 - n}{2}$; wie heißt das nte Glied?

Auflös. $\frac{4n - 3}{2}$.

24) In einer arithmetischen Progression ist das nte Glied (für jeden Werth von n) gleich $\frac{3n + 3}{2}$; wie groß ist die Summe der ersten n Glieder?

Auflös. $\frac{3n(n + 3)}{4}$.

25) In einer arithmetischen Progression ist die Differenz der neunte Theil des ersten Gliedes. Wie viel Glieder hat die Progression, wenn die Summe aller Glieder dadurch auf die Hälfte herabsinkt, daß man das erste Glied unverändert läßt, die Differenz aber in die entgegengesetzte verwandelt?

Auflös. 7 Glieder; z. B.

$$9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 84$$
und
$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 42.$$

26) Es ist folgende Progression gegeben: 60, 57, 54, 51, 48, u. s. w. Wie viel Glieder, vom ersten an, kann man auch zusammen addiren, wenn die Summe derselben eben so groß sein soll, als die Summe der ersten 16 Glieder?

Wie kann man diese Frage beantworten, ohne die Summe der ersten 16 Glieder wirklich auszurechnen?

Auflös. Die Summe der ersten 25 Glieder ist eben so groß, als die Summe der ersten 16 Glieder. Man kann nach §. 152. Anmerk. 1. verfahren.

§. 185.

Die höheren arithmetischen Progressionen.

Hat man eine Reihe, deren Glieder wir durch $y_1\ y_2\ y_3\ y_4 \ldots$ bezeichnen wollen, und zieht jedes Glied vom folgenden ab, so entsteht wieder eine Reihe, welche man in Beziehung auf die ursprüngliche Reihe die erste Differenzen-Reihe nennt. Zieht man wieder jedes Glied der ersten Differenzen-Reihe vom folgenden ab, so entsteht die zweite Differenzen-Reihe; zieht man ferner jedes Glied der zweiten Differenzen-Reihe vom folgenden ab, so entsteht die dritte Differenzen-Reihe, u. s. w. Die ursprüngliche Reihe $y_1\ y_2\ y_3\ y_4 \ldots$ wird nun eine höhere arithmetische Progression von der mten Ordnung oder vom mten Grade genannt, wenn die mte Differenzen-Reihe lauter gleiche Glieder hat. So ist z. B. folgende Progression vom dritten Grade:

	1,	4,	8,	15,	27,	46,	74, ...
1te Dff.-R.	3,	4,	7,	12,	19,	28, ...	
2te Dff.-R.	1,	3,	5,	7,	9, ...		
3te Dff.-R.	2,	2,	2,	2, ...			

Die Quadrate der natürlichen Zahlen bilden eine Progression der zweiten Ordnung:

1,	4,	9,	16,	25,	36, ...
3,	5,	7,	9,	11, ...	
2,	2,	2,	2, ...		

Die einfache arithmetische Progression wird auch eine Progression der ersten Ordnung genannt, weil bei ihr schon die erste Differenzen-Reihe lauter gleiche Glieder hat.

Für die weiteren Untersuchungen soll eine bestimmte Bezeichnung eingeführt werden. Die Glieder der ersten Differenzen-Reihe bezeichnen wir mit $\Delta^1 y_1$, $\Delta^1 y_2$, $\Delta^1 y_3$, $\Delta^1 y_4$, u. s. w.
die der zweiten mit $\Delta^2 y_1$, $\Delta^2 y_2$, $\Delta^2 y_3$, $\Delta^2 y_4$, u. s. w.
die der dritten mit $\Delta^3 y_1$, $\Delta^3 y_2$, $\Delta^3 y_3$, $\Delta^3 y_4$, u. s. w.
u. s. w.

So erhalten wir folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_4 & & y_5 & & y_6 & & y_7 \ldots \\
& \Delta^1 y_1 & & \Delta^1 y_2 & & \Delta^1 y_3 & & \Delta^1 y_4 & & \Delta^1 y_5 & & \Delta^1 y_6 \ldots & \\
& & \Delta^2 y_1 & & \Delta^2 y_2 & & \Delta^2 y_3 & & \Delta^2 y_4 & & \Delta^2 y_5 \ldots & & \\
& & & \Delta^3 y_1 & & \Delta^3 y_2 & & \Delta^3 y_3 & & \Delta^3 y_4 \ldots & & & \\
& & & & \Delta^4 y_1 & & \Delta^4 y_2 \ldots & & & & & &
\end{array}$$

u. s. w.

Hiernach bedeutet $\Delta^m y_n$ das nte Glied der mten Differenzen-Reihe.

Hieraus folgt, daß, wenn man zwei gleichvielte Glieder zweier auf einander folgenden Differenzen-Reihen addirt, das nächste Glied in der ersteren Reihe entsteht. Es ist z. B. $\Delta^2 y_2 + \Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3$, weil $\Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = \Delta^3 y_2$ ist; ferner $\Delta^1 y_5 + \Delta^2 y_5 = \Delta^1 y_6$, weil $\Delta^1 y_6 - \Delta^1 y_5 = \Delta^2 y_5$ ist. Das Gesetz gilt auch für die ursprüngliche Reihe und die erste Differenzen-Reihe; es ist z. B. $y_6 + \Delta^1 y_6 = y_7$. Allgemein hat man

$$\text{I.} \quad \Delta^n y_m + \Delta^{n+1} y_m = \Delta^n y_{m+1}.$$

Nach diesem Gesetz ist es leicht, eine Progression von beliebigem Grade zu bilden. Man nimmt die gleichen Glieder der letzten Differenzen-Reihe beliebig an und berechnet aus ihnen nach I. die Glieder der vorhergehenden Differenzen-Reihe, indem man das erste Glied derselben ebenfalls beliebig wählt. Von dieser Differenzen-Reihe geht man auf dieselbe Weise zur vorvorhergehenden über, u. s. w. Soll z. B. eine Progression der vierten Ordnung gebildet werden, und wählt man etwa alle Glieder der vierten Differenzen-Reihe $= 3$, wählt man weiter das erste Glied der dritten, zweiten, ersten Differenzen-Reihe resp. $= 1, 0, 2$, das erste Glied der Progression selbst $= 1$, so entsteht:

Progression.	1,	3,	5,	8,	16,	36,	78,	155, ...
1ste Diff.-R.	2,	2,	3,	8,	20,	42,	77, ...	
2te Diff.-R.	0,	1,	5,	12,	22,	35, ...		
3te Diff.-R.	1,	4,	7,	10,	13, ...			
4te Diff.-R.	3,	3,	3,	3, ...				

Man hat also zuerst die unterste Reihe hingeschrieben und aus ihr nach und nach die über ihr stehenden Reihen nach dem Gesetz I. gebildet.

Beispiel 1. Wie heißt die Progression der 3ten Ordnung, deren erstes Glied 2 ist, und deren 1ste, 2te, 3te Differenzen-Reihe resp. mit 2, 1, 1 beginnt? Antw. 2, 4, 7, 12, 20, 32, 49, 72, 102, ...

Beispiel 2. Wie heißt die Progression der 6ten Ordnung, deren erstes Glied 2 ist, und deren 1ste, 2te, u. s. w. bis 6te Differenzen-Reihe resp. mit 2, 1, 1, 0, —1, 2 beginnt?

Antw. 2, 4, 7, 12, 20, 31, 45, 65, 102, 182, 355, ...

Beispiel 3. Wenn die Zahlen 2, 5, 7, 8, 10 die ersten fünf Glieder einer arithmetischen Progression von möglichst niederem Grade werden sollen, wie heißen die nächsten fünf Glieder?

Antw. 17, 35, 72, 138, 245.

§. 186.

Bestimmung des nten Gliedes (y_n) und der Summe der ersten n Glieder (S_n) jeder höheren arithmetischen Progression aus dem ersten Gliede der Reihe selbst und der Differenzen-Reihen.

Wir können eine Formel für y_n durch Induction finden. Es ist nach §. 185. (siehe das Schema Seite 383.):

1) $y_2 = y_1 + \Delta^1 y_1$

2) $y_3 = y_2 + \Delta^1 y_2$. Nun ist jede Differenzen-Reihe auch als eine Progression zu betrachten; folglich können wir das in 1) gefundene Gesetz auf die erste Differenzen-Reihe anwenden. Also:

$$\begin{array}{rl} y_2 = & y_1 + \Delta^1 y_1 \\ \Delta^1 y_2 = & \Delta^1 y_1 + \Delta^2 y_1; \text{ addirt:} \\ \hline y_3 = & y_1 + 2\cdot\Delta^1 y_1 + \Delta^2 y_1 \end{array}$$

3) $y_4 = y_3 + \Delta^1 y_3$. Wendet man das in 2) gefundene Gesetz sowohl auf y_3, als auch auf $\Delta^1 y_3$ an, so folgt:

$$\begin{array}{rl} y_3 = & y_1 + 2\cdot\Delta^1 y_1 + \Delta^2 y_1 \\ \Delta^1 y_3 = & \Delta^1 y_1 + 2\cdot\Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1; \text{ addirt:} \\ \hline y_4 = & y_1 + 3\cdot\Delta^1 y_1 + 3\cdot\Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1 \end{array}$$

4) $y_5 = y_4 + \Delta^1 y_4$. Aber es ist aus 3):

$$\begin{array}{rl} y_4 = & y_1 + 3\cdot\Delta^1 y_1 + 3\cdot\Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1 \\ \Delta^1 y_4 = & \Delta^1 y_1 + 3\cdot\Delta^2 y_1 + 3\cdot\Delta^3 y_1 + \Delta^4 y_1 \\ \hline y_5 = & y_1 + 4\cdot\Delta^1 y_1 + 6\cdot\Delta^2 y_1 + 4\cdot\Delta^3 y_1 + \Delta^4 y_1 \end{array}$$

So kann man fortfahren, wenn man das allgemeine Gesetz noch nicht erkennen sollte. Es liegt aber wohl jetzt schon deutlich vor Augen: die Summanden enthalten nach der Reihe das erste Glied der Progression und der Differenzen-Reihen; die Factoren sind die Binomial-Coefficienten der um 1 verkleinerten Stellenzahl des Gliedes. Hieraus entnehmen wir:

I. $y_n = y_1 + (n-1)\Delta^1 y_1 + (n-1)_2 \Delta^2 y_1 + (n-1)_3 \Delta^3 y_1 + \ldots$
$\ldots + (n-1)_{n-2}\Delta^{n-2} y_1 + (n-1)_{n-1}\Delta^{n-1} y_1.$

Zum Beweise vervollständigt man die Induction. Gesetzt es wäre das Gesetz für y_n wahr, so suche man zu beweisen, daß es dann auch für y_{n+1} gilt. Nun ist also:

$$y_n = y_1 + (n-1)\Delta^1 y_1 + (n-1)_2 \Delta^2 y_1 + (n-1)_3 \Delta^3 y_1 + \ldots$$
$$\ldots + (n-1)\ \Delta^{n-2} y_1 + \Delta^{n-1} y_1$$
$$\Delta^1 y_n = \Delta^1 y_1 + (n-1)\ \Delta^2 y_1 + (n-1)_2 \Delta^3 y_1 + \ldots$$
$$\ldots + (n-1)\Delta^{n-1} y_1 + \Delta^n y_1.$$

Addirt man nun und bedenkt, daß $y_n + \Delta^1 y_n = y_{n+1}$ ist, so entsteht (§. 174., IV.):

$$y_{n+1} = y_1 + n\Delta^1 y_1 + n_2 \Delta^2 y_1 + n_3 \Delta^3 y_1 + \ldots + n\Delta^{n-1} y_1 + \Delta^n y_1.$$

Das Gesetz gilt also für y_{n+1}, wenn es für y_n wahr ist, und weil wir seine Gültigkeit für y_5 entwickelt haben, so gilt es für y_6, folglich für y_7, y_8, u. s. w. für alle Glieder.

Um die Summe S_n der ersten n Glieder zu finden, betrachte man die Reihe $y_1, y_2, y_3 \ldots$ als erste Differenzen-Reihe einer um einen Grad höhern Progression, deren erstes Glied a sein mag. Das zweite ist dann $a + y_1$, das 3te: $a + y_1 + y_2 = a + S_2$, das 4te: $a + S_2 + y_3 = a + S_3$, u. s. w., wie folgende Darstellung zeigt:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a, & a+y_1, & a+S_2, & a+S_3, & a+S_4, \ldots, & a+S_{n-1}, & a+S_n, \ldots \\
y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \ldots\ldots & & y_{n-1} & y_n & y_{n+1}\ldots \\
\Delta^1 y_1 & \Delta^1 y_2 & \Delta^1 y_3 \ldots\ldots & & & \Delta^1 y_{n-1} & \Delta^1 y_n \ldots \\
\Delta^2 y_1 & \Delta^2 y_2 \ldots\ldots & & & & \Delta^2 y_{n-1} \ldots \\
\text{u. s. w.}
\end{array}$$

In der neu erzeugten Reihe ist $a + S_n$ das $n+1$te Glied, die Glieder der ersten Differenzen-Reihe sind y_1, y_2, y_3 u. s. w., die der zweiten Differenzen-Reihe sind $\Delta^1 y_1$, $\Delta^1 y_2$, $\Delta^1 y_3$ u. s. w.; daher ist nach Formel I.:

$$a + S_n = a + ny_1 + n_2 \Delta^1 y_1 + n_3 \Delta^2 y_1 + \ldots$$
$$\ldots + n_{n-1}\Delta^{n-2} y_1 + n_n \Delta^{n-1} y_1.$$

Weil sich a forthebt, folgt:

II. $S_n = ny_1 + n_2 \Delta^1 y_1 + n_3 \Delta^2 y_1 + n_4 \Delta^3 y_1 + \ldots$
$\ldots + n_{n-1}\Delta^{n-2} y_1 + n_n \Delta^{n-1} y_1.$

Die beiden Formeln I. und II. brechen immer von selbst ab, so daß man nicht zu behalten braucht, wie das letzte Glied heißt; denn das

dem letzten Gliede folgende Glied würde in I. $(n-1)_n$ und in II. n_{n+1} als Coefficienten enthalten; beide sind aber gleich Null (§. 174., I.). Gewöhnlich brechen die Formeln aber früher ab, weil die Differenzen-Reihen erschöpft sind; denn bei einer Progression der 2ten Ordnung ist $\Delta^3 y_1 = \Delta^4 y_1 =$ u. s. w. $= 0$, bei der Progression der 3ten Ordnung ist $\Delta^4 y_1 = \Delta^5 y_1 =$ u. s. w. $= 0$, u. s. w. Bei der Progression der 2ten Ordnung z. B. heißen die Formeln:

$$y_n = y_1 + (n-1)\Delta^1 y_1 + (n-1)_2 \Delta^2 y_1.$$
$$S_n = n y_1 + n_2 \Delta^1 y_1 + n_3 \Delta^2 y_1.$$

Beispiele. 1) Das nte Glied und die Summe der ersten n Glieder folgender Reihe zu bestimmen: 1, 15, 53, 127, 249, 431, 685, ...

Auflös. 1, 15, 53, 127, 249, 431, 685, ...
14, 38, 74, 122, 182, 254,
24, 36, 48, 60, 72,
12, 12, 12, 12,

$$y_n = 1 + (n-1)\cdot 14 + (n-1)_2 \cdot 24 + (n-1)_3 \cdot 12 = 2n^3 - 1.$$

$$S_n = n\cdot 1 + n_2 \cdot 14 + n_3 \cdot 24 + n_4 \cdot 12 = \frac{n}{2}(n^3 + 2n^2 + n - 2).$$

2) Gegeben die Reihe: 2, 10, 24, 44, 70, 102, ...; gesucht y_n und S_n.

Auflös. $y_n = n(3n-1)$; $S_n = n^2(n+1)$.

3) Gegeben: 1, 12, 45, 112, 225, ...; gesucht das nte Glied der Reihe und die Summe der ersten n Glieder der ersten Differenzen-Reihe.

Auflös. $y_n = n^2(2n-1)$; $S(\Delta^1 y_n) = n(2n^2 + 5n + 4)$.

4) Gegeben: 2, 7, 15, 26, 40, 57, ...; gesucht y_n und S_n.

Auflös. $y_n = \frac{3n+1}{2}\cdot n$, $S_n = \frac{n(n+1)^2}{2}$.

5) Gegeben: 8, 17, 29, 44, 62, ...; gesucht y_n und S_n.

Auflös. $y_n = \frac{1}{2}(3n^2 + 9n + 4)$, $S_n = \frac{n(n+3)^2}{2}$.

6) Wie heißt das nte Glied folgender zwei Reihen:
3, 8, 15, 24, 35, 48, ... und 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, ...?

Antw. Resp. $n^{2|2}$ und $(n+2)_3$.

7) Gegeben: 1, 9, 30, 70, 135, 231, ...; gesucht y_n.

Auflös. $y_n = \frac{n(n+1)(2n-1)}{2}$.

8) Gegeben: 1, 1, 25, 73, 145, 241, ...; gesucht S_n.

Auflös. $S_n = n(2n-3)^2$.

9) Das nte Glied einer arithmetischen Progression sei (für jeden Werth von n) gleich $\frac{n(3n-1)}{2}$; wie groß ist die Summe der ersten n Glieder?

Auflös. $S_n = \frac{n^2(n+1)}{2}$.

10) Die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Progression sei (für jeden Werth von n) gleich n^4; wie groß ist das nte Glied?

Auflös. $y_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 - 2n + 1)(2n - 1)$.

11) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

12) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} = (2n+1)_3$.

13) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = [(n+1)_2]^2$.

14) $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1) = (2n^2)_2$.

15) $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)}{30} \cdot (6n^3 + 9n^2 + n - 1)$.

16) $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + \ldots + n(2n-1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$.

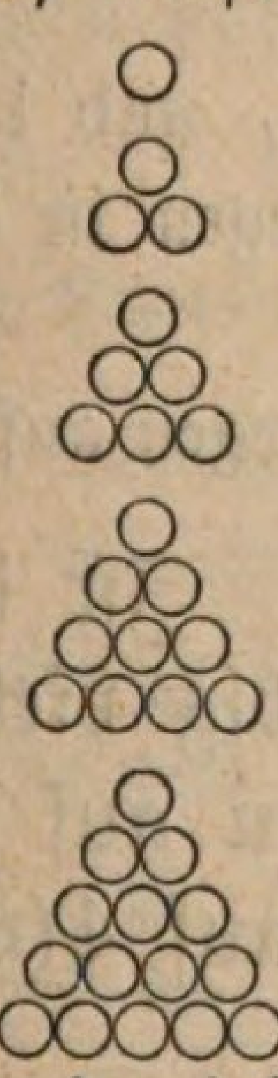
17) $1 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 5 + 4^2 \cdot 7 + \ldots + n^2(2n-1) = \frac{n(n+1)(3n^2+n-1)}{6}$.

§. 187.

Die Kugelhaufen.

Man setzt in Festungen, Zeughäusern, u. s. w. die Kugeln in Haufen nach zwei Principien.

I. Jede Kugel ruht auf drei Kugeln. Ist ein solcher Haufen vollständig, so ist er eine dreiseitige reguläre Pyramide. Die Spitze bildet eine Kugel; sie ruht auf 3 Kugeln, diese ruhen auf 6, diese auf 10, diese auf 15, u. s. w., wie folgende Darstellung zeigt:



1 Kugel.

$1 + 2$ Kugeln.

$1 + 2 + 3$ Kugeln.

$1 + 2 + 3 + 4$ Kugeln.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5$ Kugeln, u. s. w.

Die Kugeln in jeder Schicht bilden ein gleichseitiges Dreieck; daher nennt man auch 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... die Dreiecks-Zahlen; sie sind ein besonderer Fall der figurirten Zahlen. Man findet ferner, daß diese Zahlen eine arithmetische Progression der 2ten Ordnung bilden, und es ist:

1) Anzahl der Kugeln in der nten Schicht (von oben)

$$= \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)_2.$$

2) Summe aller Kugeln in diesen n Schichten

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = (n+2)_3.$$

Ist der Haufen nicht vollständig, so kann man ihn berechnen, indem man den fehlenden Theil von dem vollen Haufen abzieht, oder auch direct durch die Formel für S_n.

Zu bemerken ist noch, daß die Anzahl der Kugeln in jeder Seite der untersten Schicht mit der Anzahl der Schichten im vollständigen Haufen übereinstimmt. Wenn also z. B. bei einem unvollständigen Haufen in der untersten Schicht in jeder Seite a Kugeln liegen, und jede Seite der obersten Schicht b Kugeln hat, so hat der Haufen $(a-b+1)$ Schichten, in der untersten liegen $1+2+3+\ldots+a$ Kugeln, d. h. $\frac{a+1}{2}\cdot a$ Kugeln, in der obersten $\frac{b+1}{2}\cdot b$ Kugeln; der Haufen selbst enthält $(a+2)_3 - (b+1)_3$ Kugeln, weil die unterste Schicht des abzuziehenden Haufens nicht b, sondern $b-1$ Kugeln in jeder Seite hat.

Je nachdem der vollständige Haufen 1, 2, 3, 4, 5, ... Schichten hat, enthält er 1, 4, 10, 20, 35, ... Kugeln. Die Zahlen 1, 4, 10, 20, 35, ... gehören zu den Pyramidal-Zahlen und werden im Besonderen Trigonal-Pyramidalzahlen genannt.

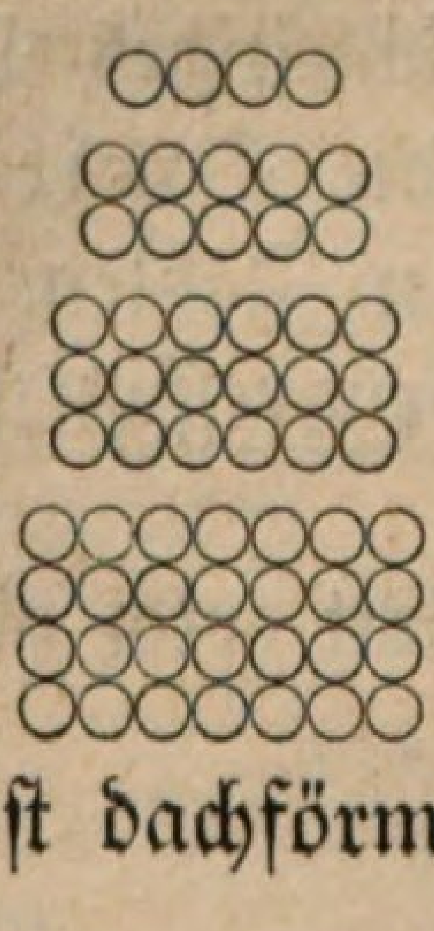
Beispiel 1. Ein vollständiger Kugelhaufen hat 8 Schichten; wie viel Kugeln ruhen auf dem Boden, und wie viel enthält der ganze Haufen?

Antw. Resp. 36 und 120 Kugeln.

2) Ein unvollständiger Haufen hat 5 volle Schichten, und in jeder Seite der obersten Schicht liegen 15 Kugeln; wie viel Kugeln liegen in der untersten Schicht, und wie viel im ganzen Haufen?

Auflös. Der Haufen enthält 770 Kugeln, und 190 liegen auf dem Boden.

II. Jede Kugel ruht auf vier Kugeln. Ist der Haufen vollständig, so liegen in der obersten Schicht beliebig viel, z. B. m Kugeln in einer Reihe neben einander. Sie ruhen auf $2\cdot(m+1)$ Kugeln, diese auf $3(m+2)$ Kugeln, diese wieder auf $4(m+3)$ Kugeln, u. s. w.



$1\cdot 4$ Kugeln.

$2\cdot 5$ Kugeln.

$3\cdot 6$ Kugeln.

$4\cdot 7$ Kugeln u. s. w.

Der Haufen ist dachförmig mit schrägen Seitenwänden. In den ein-

zelnen Schichten bilden die Kugeln Rechtecke. Die Kugeln-Summen in der 1sten, 2ten, 3ten u. s. w. Schicht bilden wieder eine arithmetische Progression der 2ten Ordnung:

$$\begin{array}{cccccc} m, & 2(m+1), & 3(m+2), & 4(m+3), & 5(m+4), & \ldots \\ & m+2 & m+4 & m+6 & m+8 & \ldots \\ & & 2 & 2 & 2 & \ldots \end{array}$$

Man findet:

1) Anzahl der Kugeln in der nten Schicht $= n(m+n-1)$.

2) Summe der Kugeln im vollständigen Haufen mit n Schichten

$$= \frac{n(n+1)}{6} \cdot (2n+3m-2).$$

Ist $m = 1$, so wird der Haufen eine vierseitige reguläre Pyramide; die Schichten werden Quadrate. Dann ist $y_n = n^2$, und

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

In den einzelnen Schichten von oben an liegen dann resp. 1, 4, 9, 16, 25, ... Kugeln (die Vierecks-Zahlen), und hat der Haufen resp. 1, 2, 3, 4, 5, ... Schichten, so enthält er entsprechend 1, 5, 14, 30, 55, ... Kugeln (die Tetragonal-Pyramidalzahlen). Der unvollständige Haufen mit vollen Schichten kann wieder durch Subtraction oder unmittelbar nach der Formel für S_n (§. 186., II.) gefunden werden.

Beispiele. 1) Die unterste Schicht eines vollständigen Haufens enthalte der Länge nach a Kugeln, der Breite nach b Kugeln neben einander; wie viel Kugeln sind im ganzen Haufen?

Auflös. Er enthält b Schichten, und in der obersten Schicht liegen $a-(b-1)$ Kugeln in einer Reihe; daher ist $S_n = \frac{b(b+1)}{6}(3a-b+1)$.

2) Ein unvollständiger Kugelhaufen, aber mit vollen Schichten, hat in der untersten Schicht der Länge nach 30 Kugeln, der Breite nach 18 Kugeln neben einander, in der obersten Schicht aber der Länge nach 24 Kugeln neben einander. Wie viel Kugeln enthält der Haufen?

Auflös. Er hat 7 Schichten, und in der obersten Schicht liegen der Breite nach 12 Kugeln neben einander. Berechnet man den Haufen als Differenz zweier vollständigen Haufen, so hat der abzuziehende in der untersten Schicht der Länge nach 23 Kugeln, der Breite nach 11 Kugeln neben einander. Hieraus folgt (nach Beispiel 1):

$$S = \frac{18 \cdot 19}{6}(90-18+1) - \frac{11 \cdot 12}{6}(69-11+1) = 2863 \text{ Kugeln}.$$

3) Es bilden 660 Kugeln einen vollständigen Haufen mit 10 Schichten; wie viel Kugeln liegen oben, wie viel unten?

Antw. Oben 6, unten 150.

4) Ein unvollständiger Kugelhaufen enthält n Schichten; in der obersten liegen $5 \cdot 8$ Kugeln, in der nächsten $6 \cdot 9$, dann $7 \cdot 10$, u. s. w. Wie viel Kugeln enthält die unterste Schicht, und wie viel der ganze Haufen?

Auflös. Will man die Aufgabe unmittelbar aus der Progression lösen, so mag auf eine kleine Bequemlichkeit beim Rechnen aufmerksam gemacht werden. Zieht man nm von $(n+1)(m+1)$ ab, so bleibt $n+m+1$; also $5 \cdot 8$ von $6 \cdot 9$ abgezogen, giebt $5+8+1 = 14$, $6 \cdot 9$ von $7 \cdot 10$ abgezogen, giebt $6+9+1 = 16$, u. s. w. Bei großen Zahlen ist diese Erleichterung wichtig.

Die Progression ist:

$$\begin{array}{ccccccccc} 5\cdot 8, & & 6\cdot 9, & & 7\cdot 10, & & 8\cdot 11, & & 9\cdot 12,\ldots \\ & 14, & & 16, & & 18, & & 20,\ldots & \\ & & 2, & & 2, & & 2,\ldots & & \end{array}$$

Man erhält $y_n = (n+4)(n+7)$; $S_n = \frac{n}{3}(n^2+18n+101)$.

Anmerk. Praktisch bequem ist folgendes Verfahren, die Anzahl der Kugeln im vollständigen Haufen zu berechnen: Man addirt die Kugeln im Rücken des Haufens zu den Kugeln in beiden Längenkanten der untersten Schicht und multiplicirt den 3ten Theil der Summe mit der Anzahl der Kugeln in einer der schrägen Seitenwände. Liegen also im Rücken m Kugeln und sind n Schichten, so liegen unten in jeder Längen-Kante $(m+n-1)$ Kugeln; also wäre

$$S = \frac{m+2(m+n-1)}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6}(3m+2n-2),$$

wie oben gefunden wurde. Die Regel gilt nicht nur auch dann, wenn oben nur eine Kugel liegt, sondern sie gilt auch bei dem dreiseitigen Kugelhaufen, wenn man nur unten die eine Seite als eine Längen-Kante in Rechnung bringt und die Anzahl der Kugeln in der anderen $= 1$ setzt.

Beispiel. Im Rücken liegen 10 Kugeln, unten der Länge nach 16 Kugeln; wie viel im Haufen?

Antw. $S = \frac{10+2 \cdot 16}{3} \cdot \frac{7 \cdot 8}{2} = 392$ Kugeln.

Vom Interpoliren.

§. 188.

Erklärung. Lehrsätze.

Zwischen zwei aufeinander folgende Glieder y_p und y_{p+1} einer höheren arithmetischen Progression m Glieder interpoliren heißt: m Zahlen bestimmen, welche, zwischen diese Glieder gesetzt, mit ihnen wieder eine höhere arithmetische Progression (von $m+2$ Gliedern) und zwar von derselben Ordnung bilden. Das Verfahren selbst ist sehr einfach. Man bestimmt zunächst das nte Glied der Progression

$$y_n = y_1 + (n-1)\Delta^1 y_1 + (n-1)_2 \Delta^2 y_1 + \ldots,$$

welches das **allgemeine** Glied der Progression ist; denn es giebt alle einzelnen Glieder, wenn man statt n nach der Reihe 1, 2, 3, ... setzt. (Setzt man also $n = p$, so erhält man y_p, setzt man $n = p + 1$, so erhält man y_{p+1}.) In dieses allgemeine Glied y_n setzt man nun statt n gebrochene Zahlen, welche zwischen p und $p + 1$ liegen, und erhält so interpolirte Glieder. Sollen nun gerade m Glieder interpolirt werden, so setzt man statt n nach der Reihe: $p + \frac{1}{m+1}$, $p + \frac{2}{m+1}$, $p + \frac{3}{m+1}$, ... bis $p + \frac{m}{m+1}$. Es kommen so genau m Glieder heraus, und man sieht leicht ein, warum gerade $m + 1$ der Nenner dieser Brüche sein muß; als nächstes Glied muß y_{p+1} entstehen, und dies Glied erhält man auch, wenn man $n = p + \frac{m+1}{m+1}$, d. h. $n = p + 1$ setzt. Die Begründung dieses Verfahrens liegt aber in den folgenden zwei Gesetzen.

I. **Setzt man in eine rationale ganze Function von x**
$$\varphi x = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + \ldots + px^2 + qx + r$$
für x nach einander die Werthe 1, 2, 3, 4, ..., **so sind** $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, ... **Glieder einer höheren arithmetischen Progression, welche mit der Function von x von gleichem Grade ist. Jedes Glied der letzten Differenzen-Reihe ist** $= n!\,a$.

Beweis. Um die erste Differenzen-Reihe zu bilden, müßte man das 1ste Glied vom 2ten, das 2te vom 3ten, das 3te vom 4ten abziehen, u. s. w. Statt dessen ist es bequemer, das xte Glied vom $x + 1$sten abzuziehen; denn die Differenz $\varphi(x+1) - \varphi x$ giebt, wenn man für x die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... setzt, nach der Reihe die Glieder der ersten Differenzen-Reihe, d. h. $\varphi(x+1) - \varphi x$ ist das allgemeine Glied der ersten Differenzen-Reihe. Nun ist
$$\varphi(x+1) = a(x+1)^n + b(x+1)^{n-1} + c(x+1)^{n-2} + \ldots + q(x+1) + r$$
$$\varphi x = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + qx + r.$$
Löst man jetzt in allen Gliedern von $\varphi(x+1)$ nach dem binomischen Lehrsatze die Klammern auf und subtrahirt dann beide Gleichungen von einander, so heben sich alle Glieder von φx fort, und das Glied der Differenz, welches die höchste Potenz von x enthält, wird nax^{n-1}. Man wird sehen, daß man die übrigen Glieder nicht zu kennen braucht; nur gehe der Leser nicht weiter, ehe er nicht überzeugt ist, daß $\varphi(x+1) - \varphi x$ eine Function vom $n - 1$ten Grade ist, daß ihr erstes Glied nax^{n-1} heißt, und daß alle übrigen Glieder niedrigere Potenzen von x enthalten. Das constante Glied r hat sich ganz fortgehoben; an seine

Stelle tritt in der Differenz die Summe $a + b + c + \ldots + q$. Bezeichnen wir die unbekannten, aber zu findenden Coefficienten der dem ersten Gliede folgenden Glieder mit $B, C, D, \ldots R$, so ist, weil $\varphi(x+1) - \varphi x = \Delta^1 y_x$ ist:

$$\Delta^1 y_x = nax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + R.$$

Vergleicht man $\Delta^1 y_x$ mit φx, so findet man leicht das Gesetz: Das erste Glied in $\Delta^1 y_x$ findet man aus dem ersten Gliede von φx, nämlich aus ax^n, wenn man den Exponenten n vor a als Factor und an seine Stelle einen um 1 kleineren Exponenten setzt.

Um nun die zweite Differenzen-Reihe zu bilden, muß man jedes Glied der ersten Differenzen-Reihe von seinem folgenden abziehen. Nun ist aber $\Delta^1 y_x$ das allgemeine Glied der ersten Differenzen-Reihe und ist wieder eine Function von x, welche durch fx bezeichnet werden mag. Genau wie oben findet man also das allgemeine Glied der zweiten Differenzen-Reihe:

$$\Delta^2 y_x = f(x+1) - fx = (n-1)nax^{n-2} + B'x^{n-3} + C'x^{n-4} + \ldots + R'.$$

Es ist also $\Delta^2 y_x$ eine Function vom $n-2$ten Grade, deren erstes Glied aus dem ersten Gliede von $\Delta^1 y_x$ genau nach demselben Gesetz entspringt, wie dieses aus dem ersten Gliede von φx. Fährt man so fort, so ergeben sich ganz ebenso $\Delta^3 y_x$, $\Delta^4 y_x$, u. s. w. Zur besseren Uebersicht wollen wir eine Zusammenstellung der schon hergeleiteten und der noch folgenden Functionen geben, aber nur immer das erste Glied hinschreiben. Der Grad der Function fällt bei jedem Uebergange zur nächsten Differenzen-Reihe um 1.

$$\varphi x = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + r.$$
$$\Delta^1 y_x = nax^{n-1} + \ldots$$
$$\Delta^2 y_x = (n-1)\,nax^{n-2} + \ldots$$
$$\Delta^3 y_x = (n-2)(n-1)\,nax^{n-3} + \ldots$$
$$\Delta^4 y_x = (n-3)(n-2)(n-1)\,nax^{n-4} + \ldots$$

u. s. w.

$$\Delta^{n-2} y_x = 3\cdot4\cdot5\ldots(n-1)\cdot n\cdot ax^2 + \ldots$$
$$\Delta^{n-1} y_x = 2\cdot3\cdot4\cdot5\ldots(n-1)\cdot n\cdot ax^1 + \ldots$$
$$\Delta^n y_x = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\ldots(n-1)\cdot n\cdot a.$$

$\Delta^{n-1} y_x$ hat noch zwei Glieder von der Form $Px + Q$; daher ist $\Delta^n y_x = P(x+1) + Q - (Px + Q) = P$.

Wir haben also gefunden, daß das allgemeine Glied der $n$ten Differenzen-Reihe $= n!\,a$ ist, also nach x constant, d. h. von der Stellenzahl des Gliedes unabhängig. Alle Glieder der $n$ten Diffe-

renzen-Reihe sind also einander gleich, und sonach bilden $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, ... eine Progression vom nten Grade. z. B.

1) Es sei $\varphi x = 3x^2 + x - 1$, so muß $\Delta^2 y_x = 2!\,3 = 6$ sein. Setzt man für x jetzt 1, 2, 3, 4, ..., so folgt die Reihe:

$$\begin{array}{ccccccccc} 3, & & 13, & & 29, & & 51, & & 79, \ldots \\ & 10, & & 16, & & 22, & & 28, \ldots & \\ & & 6, & & 6, & & 6, \ldots & & \end{array}$$

2) $\varphi x = \frac{3}{2}x^3 - x - 1$; es muß $\Delta^3 y_x = 3!\,\frac{3}{2} = 9$ werden. Man erhält die Reihe:

$$\begin{array}{ccccccccccc} -\frac{1}{2}, & & 9, & & 36\frac{1}{2}, & & 91, & & 181\frac{1}{2}, & & 317, \ldots \\ & 9\frac{1}{2}, & & 27\frac{1}{2}, & & 54\frac{1}{2}, & & 90\frac{1}{2}, & & 135\frac{1}{2}, \ldots & \\ & & 18, & & 27, & & 36, & & 45, \ldots & & \\ & & & 9, & & 9, & & 9, \ldots & & & \end{array}$$

II. Setzt man in eine rationale ganze Function von x

$$\varphi x = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + px^2 + qx + r$$

statt x nach der Reihe Zahlen, welche eine beliebige einfache arithmetische Progression bilden, z. B.

$$\alpha,\ \alpha + h,\ \alpha + 2h,\ \alpha + 3h,\ \alpha + 4h, \ldots,$$

oder, wie man häufig sagt, setzt man statt x beliebige äquidifferente Werthe: so erhält man ebenfalls eine höhere arithmetische Progression von gleichem Grade mit der Function, deren Glieder also

$$\varphi(\alpha),\ \varphi(\alpha + h),\ \varphi(\alpha + 2h),\ \varphi(\alpha + 3h), \ldots$$

sind. Jedes Glied der nten Differenzen-Reihe ist dann

$$= n!\,a \cdot h^n.$$

Beweis. Setzt man in φx statt x den Ausdruck $\alpha + (z-1)h$, unter z eine Veränderliche verstanden, so geht φx in $\varphi[\alpha + (z-1)h]$ über, wird also eine Function von z, und zwar von demselben Grade in Beziehung auf z, von welchem φx in Beziehung auf x war. Da nämlich $\alpha + (z-1)h = hz + (\alpha - h)$ ist, so wird

$$\varphi[\alpha + (z-1)h] = a[hz + (\alpha - h)]^n + b[hz + (\alpha - h)]^{n-1} + \ldots\ldots + r,$$

und löst man nach dem binomischen Lehrsatze die Klammern auf, so ist $ah^n z^n$ das erste Glied der Function, und dieses Glied enthält die höchste Potenz von z, welche überhaupt vorkommen kann, und ist das einzige Glied, welches diese Potenz enthält. Es ist also

$$\varphi[\alpha + (z-1)h] = ah^n \cdot z^n + Bz^{n-1} + \ldots + R.$$

Setzt man nun in diese Function statt z nach der Reihe 1, 2, 3, ..., so erhält man nach dem vorhergehenden Satze I. Glieder einer arithmetischen Progression vom nten Grade, und jedes Glied der nten Differenzen-Reihe ist $= n!\,ah^n$. Da aber $\alpha + (z-1)h$, wenn

man für z die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... setzt, die Werthe α, $\alpha + h$, $\alpha + 2h$, $\alpha + 3h$, ... annimmt, so sind

$$\varphi(\alpha),\quad \varphi(\alpha + h),\quad \varphi(\alpha + 2h),\quad \varphi(\alpha + 3h), \ldots$$

die Glieder dieser Progression, und dieselben Glieder erhält man offenbar auch, wenn man in φx statt x nach der Reihe die Werthe

$$\alpha,\quad \alpha + h,\quad \alpha + 2h,\quad \alpha + 3h, \ldots$$

setzt, wodurch der Lehrsatz bewiesen ist.

Beispiel 1. Es sei $\varphi x = 3x^2 - 1$. Nimmt man $\alpha = -5$, $h = 2$, setzt man also statt x die äquidifferenten Werthe -5, -3, -1, $+1$, $+3$, ..., so muß eine Progression der zweiten Ordnung entstehen, und jedes Glied der zweiten Differenzen-Reihe muß $= 2!\, 3 \cdot 2^2$, d. h. $= 24$ sein. Es entsteht auch richtig:

$$\begin{array}{cccccc} 74, & 26, & 2, & 2, & 26, & 74, \ldots \\ -48, & -24, & 0, & 24, & 48, \ldots & \\ 24, & 24, & 24, & 24 \ldots & & \end{array}$$

Beispiel 2. Es sei $\varphi x = 2x^2 + x + 1$. Setzt man $\alpha = 0$, $h = \frac{1}{4}$, statt x also $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \ldots$, so muß eine Progression der zweiten Ordnung entstehen, und jedes Glied der zweiten Differenzen-Reihe muß $= 2!\, 2 \cdot (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4}$ sein. Man erhält:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 1\frac{3}{8}, & 2, & 2\frac{7}{8}, & 4, & 5\frac{3}{8}, & 7, \ldots \\ \frac{3}{8}, & \frac{5}{8}, & \frac{7}{8}, & \frac{9}{8}, & \frac{11}{8}, & \frac{13}{8}, \ldots & \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \ldots & & \end{array}$$

§. 189.

Folgerungen.

Aus dem letzten Satze folgt zweierlei:

I. In jeder arithmetischen Progression bilden solche Glieder, welche in gleichen Intervallen auf einander folgen, wieder eine Progression desselben Grades, z. B. das 2te, 5te, 8te, 11te, 14te u. s. w. Glied. Heben wir diese Glieder aus folgender Progression heraus:

$$\begin{array}{l} 1,\ 3,\ 6,\ 12,\ 23,\ 41,\ 68,\ 106,\ 157,\ 223,\ 306,\ 408,\ 531,\ 677 \ldots, \\ \quad 2,\ 3,\ 6,\ 11,\ 18,\ 27,\ 38,\ 51,\ \ldots \\ \quad\quad 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \ldots \\ \quad\quad\quad 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots \end{array}$$

so muß die neue Progression auch vom 3ten Grade sein. Ferner muß jedes Glied der letzten Differenzen-Reihe dieser neuen Progression $= n!\, a h^n$ sein. Weil aber jedes Glied der letzten Differenzen-Reihe der gegebenen Progression nach §. 188., I. gleich $n!\, a$ ist, und dieser Werth im vorliegenden Falle gleich 2 ist, so muß jedes Glied der letzten Differenzen-Reihe der neuen Progression gleich $2 \cdot h^n$ werden.

Hier ist $h = 3$ und $n = 3$, also $2 \cdot h^n = 2 \cdot 3^3 = 54$. Es entsteht:

$$\begin{array}{ccccccccc} 3, & & 23, & & 106, & & 306, & & 677\ldots\ldots \\ & 20, & & 83, & & 200, & & 371\ldots\ldots & \\ & & 63, & & 117, & & 171\ldots\ldots & & \\ & & & 54, & & 54\ldots\ldots & & & \end{array}$$

II. Ist eine Progression gegeben, und bestimmen wir das allgemeine Glied derselben, d. h. in Buchstaben das xte Glied (oder auch das nte), und setzen dann für x (oder für n) außer den ganzen Zahlen 1, 2, 3,... auch noch alle zwischen ihnen liegenden Brüche mit demselben Nenner, etwa m, also: $1+\frac{1}{m}$, $1+\frac{2}{m}$, ... bis $1+\frac{m-1}{m}$; dann: $2+\frac{1}{m}$, $2+\frac{2}{m}$, ... bis $2+\frac{m-1}{m}$, u. s. w.: so ergeben sich nicht nur die Glieder der Progression wieder, sondern zwischen je zwei auf einander folgenden Gliedern noch $m-1$ interpolirte. Die neue Progression ist mit der ursprünglichen von gleichem Grade. Will man also m Glieder interpoliren, so muß man die Brüche mit dem Nenner $m+1$ statt x setzen, wie dies schon am Anfange des §. 188. gesagt wurde. Auch kann man jede Progression nach der andern Seite hin fortsetzen, wenn man für x setzt: 0, -1, -2,..., und kann auch hier noch interpoliren. z. B.

1) Gegeben: 1, 10, 28, 55, 91....; man soll zwischen je zwei Glieder noch 5 Glieder interpoliren.

Auflös. Es ist das allgemeine Glied

$$y_x = 1 + (x-1)\cdot 9 + \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}\cdot 9 \text{ (§. 186., I.) oder}$$

$$y_x = \frac{(3x-2)(3x-1)}{2}.$$

Setzen wir jetzt für x die Werthe: 1, $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{10}{6}$, $\frac{11}{6}$, 2, $\frac{13}{6}$, $\frac{14}{6}$, u. s. w., so folgt die Reihe

$$1,\ \tfrac{15}{8},\ 3,\ \tfrac{35}{8},\ 6,\ \tfrac{63}{8},\ 10,\ \tfrac{99}{8},\ 15,\ \tfrac{143}{8},\ 21,\ \tfrac{195}{8},\ 28,\ \ldots\ldots,$$

welche die ursprünglichen Glieder und die interpolirten enthält. Die Ausrechnung kann man sich erleichtern. Setzt man nämlich

$$x = 1+\frac{z}{6}, \text{ so geht } y_x = \frac{(3x-2)(3x-1)}{2} \text{ über in: } \frac{(z+2)(z+4)}{8}.$$

Setzt man jetzt für z die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, ..., so entsteht dieselbe Reihe wie oben. Man braucht aber auch nur die ersten drei Glieder der Reihe aus dieser Formel zu berechnen; durch sie erhält man, weil die Progression nur vom zweiten Grade ist, sowohl

$\Delta^1 y_1$, als auch $\Delta^2 y_1$ und kann nun die andern Glieder nach §. 185., I. berechnen.

$$1, \quad 1\tfrac{7}{8}, \quad 3, \quad 4\tfrac{3}{8}, \quad 6, \quad 7\tfrac{7}{8} \text{ u. s. w.}$$
$$\tfrac{7}{8}, \quad 1\tfrac{1}{8}, \quad 1\tfrac{3}{8}, \quad 1\tfrac{5}{8}, \quad 1\tfrac{7}{8}, \quad 2\tfrac{1}{8} \text{ u. s. w.}$$
$$\tfrac{2}{8}, \quad \tfrac{2}{8}, \quad \tfrac{2}{8}, \quad \tfrac{2}{8}, \quad \tfrac{2}{8} \quad \tfrac{2}{8} \text{ u. s. w.}$$

Beispiel 2. Gegeben: 1, 13, 34, 64, 103, ...; man soll zwischen je zwei auf einander folgende Glieder fünf Glieder einschalten.

Auflös. Man erhält: 1, $2\frac{3}{8}$, 4, $5\frac{7}{8}$, 8, $10\frac{3}{8}$, 13, $15\frac{7}{8}$, 19, $22\frac{3}{8}$, 26, $29\frac{7}{8}$, ...

Beispiel 3. Gegeben: 1, 1, 2, 5, 11, 21, 36, ...; man soll zwischen je zwei auf einander folgende Glieder zwei Glieder interpoliren.

Auflös. 1, $\frac{77}{81}$, $\frac{76}{81}$, 1, $1\frac{14}{81}$, $1\frac{40}{81}$, 2, $2\frac{59}{81}$, $3\frac{58}{81}$, 5, ...

Beispiel 4. Gegeben: 2, 7, 16, 29, 46, 67, ...; man soll zwischen je zwei auf einander folgende Glieder ein Glied interpoliren.

Auflös. 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, 67, ...

Beispiel 5. Es ist die Progression 1, 3, 41, 169, 441, 911, ... gegeben; man soll zwischen je zwei aufeinander folgende Glieder zwei Glieder interpoliren.

Auflös. Man erhält die Progression:

1, 1, 1, 3, 9, 21, 41, 71, 113, 169, 241, 331, 441, 573, 729, 911, ...

Beispiel 6. Es ist die Progression gegeben: 1, 6, 15, 28, 45, 66, ...; kann man aus dieser Progression durch Interpolation dieselbe Progression wieder erzeugen?

Auflös. Suchen wir zuerst das nte Glied der Progression, so finden wir $y_n = n(2n - 1)$, und wir haben nun die Frage zu beantworten: für welchen Werth von n bleibt $n(2n-1)$ unverändert? Es bleibt dieser Ausdruck aber unverändert, wenn man (§. 152. Anm. 1.) $-n + \frac{1}{2}$ statt n setzt. Nun ist aber $-n + \frac{1}{2}$ für jeden ganzen Werth von n ein Bruch mit dem Nenner 2; folglich erhält man dieselbe Progression wieder, wenn man zwischen je zwei Glieder ein Glied interpolirt. Ferner ist $-n + \frac{1}{2}$ negativ oder positiv, je nachdem n positiv oder negativ ist; daher erkennt man erst dann, daß die interpolirten Glieder die ursprünglichen Glieder der Progression sind, wenn man die Progression über das erste Glied hinaus fortsetzt, d. h. auch die Glieder mit negativen Stellenzahlen sucht. Man erhält so folgende Progression, in welcher die interpolirten Glieder klein gedruckt sind:

...55, 45, 36, 28, 21, 15, 10, 6, 3, 1, 0, 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, ...

Beispiel 7. Kann man aus der Progression 1, 13, 33, 61, 97, ... durch Interpolation dieselbe Progression wieder erzeugen?

Auflös. Nein. — Der Grund liegt darin, daß das nte Glied, $4n^2 - 3$, nur unverändert bleibt, wenn man $-n$ statt n setzt. Hieraus folgt aber, daß, wenn man die Progression über das erste Glied hinaus fortsetzt, jedes Glied, mit Ausnahme des zur Stellenzahl 0 gehörigen, zweimal vorkommt.

Beispiel 8. Kann man aus der Progression 1, 5, 15, 31, 53, ..., die man sich auch über das erste Glied hinaus fortgesetzt denken mag, durch Interpolation dieselbe Progression wieder erzeugen?

Auflös. Ja, wenn man zwischen je zwei aufeinander folgende Glieder zwei Glieder interpolirt; die Hälfte der interpolirten Glieder sind dann die Glieder der ursprünglichen Reihe (vergl. I.). Man erhält:

... 31, 25, $19\frac{2}{3}$, 15, 11, $7\frac{2}{3}$, 5, 3, $1\frac{2}{3}$, 1, 1, $1\frac{2}{3}$, 3, 5, $7\frac{2}{3}$, 11, 15, $19\frac{2}{3}$, 25, 31, ...

§. 190.

Eine Anwendung.

Es kommt bei den Anwendungen der Functionen auf Größen der Fall vor, daß man weiß, eine Größe ist eine Function einer andern Größe x, so daß man erstere durch φx bezeichnen kann, daß man aber nicht im Stande ist, φx durch x auszudrücken. Kann man in solchem Falle für bestimmte Werthe von x die zugehörigen Werthe von φx (etwa durch Versuche) finden, so entsteht die Frage, wie sich für andere Werthe von x, namentlich zwischenliegende, die zugehörigen Werthe von φx ermitteln lassen. Diese Aufgabe auflösen pflegt man auch „interpoliren" zu nennen. Nehmen wir einen einfachen Fall. Es mögen die Werthe von φx für drei bestimmte Werthe von x bekannt sein, etwa

$$\varphi(1) = 0,\quad \varphi(4) = 2,\quad \varphi(5) = 6;$$

wie findet man $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(6)$, ...? Die Aufgabe ist offenbar ganz unbestimmt, weil die Function φx nur die Eigenschaft haben soll, daß sie 0 wird für $x = 1$, 2 für $x = 4$, und 6 für $x = 5$, und unendlich viele Functionen diese Eigenschaft haben können. Es giebt sonach auch ganz verschiedene Interpolations-Methoden, von welchen hier diejenige erläutert werden soll, welche auf eine arithmetische Progression führt.

Findet man in der praktischen Aufgabe Grund zu der Annahme, φx sei eine rationale ganze Function von x, so kann man

$$\varphi x = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.$$

setzen, wenn a, b, c, d, ... unbekannte Coefficienten bezeichnen. Kehren wir zu dem oben angegebenen Beispiele zurück, so soll φx nur 3 Bedingungen erfüllen; folglich können nur 3 Coefficienten bestimmt werden. Daher setzt man, indem man für φx die einfachste Form wählt,

$$\varphi x = a + bx + cx^2.$$

Nach der Aufgabe soll nun $0 = a + b + c$, $2 = a + 4b + 16c$ und $6 = a + 5b + 25c$ sein. Hieraus sind a, b, c zu finden, und man erhält: $\varphi x = \frac{8}{3} - \frac{7}{2}x + \frac{5}{6}x^2.$

Hieraus entnimmt man nun: $\varphi(2) = -1$, $\varphi(3) = -\frac{1}{3}$, $\varphi(6) = 11\frac{2}{3}$, u. s. w.

Setzt man aber in φx für x beliebig viel äquidifferente Werthe, hier z. B. 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., so entsteht eine Progression der zweiten Ordnung, nämlich:

$$0, \; -1, \; -\tfrac{1}{3}, \; 2, \; 6, \; 11\tfrac{2}{3}, \; \ldots ,$$

woraus noch folgt, daß man die bekannten Werthe von φx als Glieder einer arithmetischen Progression angesehen hat, die um einen Grad niedriger ist, als die Anzahl der bekannten Werthe von φx.

Gehören aber die bekannten Werthe von φx zu äquidifferenten Werthen von x, so können erstere als aufeinander folgende Glieder einer arithmetischen Progression betrachtet werden, und man kann dann, um zwischenliegende Werthe von φx zu finden, so interpoliren, wie es im vorigen §. gelehrt wurde. Anwendung findet z. B. dies Verfahren bei der Berechnung von Wurftafeln nach angestellten Versuchen.

Es mag noch bemerkt werden, daß man auch häufig interpolirt, wenn φx vollständig bekannt ist; wenn man nämlich überzeugt sein kann, daß das Interpoliren richtige Werthe liefert, und wenn dasselbe diese Werthe bequemer giebt, als die unmittelbare Berechnung aus φx. Dies findet z. B. bei der Berechnung der Logarithmen Statt. Sind etwa log 1000, log 1005, log 1010, log 1015, u. s. w. bekannt, so kann man die zwischenliegenden Logarithmen auf eine gewisse Anzahl von Decimalstellen durch Interpoliren finden.

Beispiel 1. Durch Versuche mit einem Geschütz hat man bei demselben Richtungswinkel gefunden:

bei der Ladung von	40	Lth. Pulver, die Wurfweite		500	Schritt,
" " " "	60	" " " "		980	"
" " " "	80	" " " "		1360	"
" " " "	100	" " " "		1700	"
" " " "	120	" " " "		2180	"

wie groß wird die Wurfweite bei einer Ladung von resp. 44, 48, 52, 56 Lth. sein?

Auflös. Die Zahlen 44, 48, 52, 56, zwischen 40 und 60 eingeschoben, geben 6 äquidifferente Werthe, und weil zu 40 die Wurfweite 500ˣ, zu 60 aber 980ˣ gehört, so kommt es darauf an, in der Progression, als deren auf einander folgende Glieder die

gegebenen Wurfweiten zu betrachten sind (sie gehören zu äquidifferenten Ladungen), zwischen 500 und 980 vier Glieder zu interpoliren.

$$\begin{array}{ccccccccc} 500, & & 980, & & 1360, & & 1700, & & 2180, \\ & 480, & & 380, & & 340, & & 480, & \\ & & -100, & & -40, & & 140, & & \\ & & & 60, & & 180, & & & \\ & & & & 120. & & & & \end{array}$$

Hieraus:

$$y_x = 500 + (x-1)480 - (x-1)_2 \cdot 100 + (x-1)_3\, 60 + (x-1)_4\, 120.$$

Für x hat man nun $1\frac{1}{5}$, $1\frac{2}{5}$, $1\frac{3}{5}$, $1\frac{4}{5}$ zu setzen und erhält die gesuchten Wurfweiten resp. gleich $602\frac{106}{125}$×, $702\frac{106}{125}$×, $799\frac{41}{125}$× und $891\frac{101}{125}$×.

Beispiel 2. Bei derselben Ladung war:

bei der Wurfweite	800×, der Zoll-Aufsatz	$\frac{1}{4}$ Zoll,
„ „ „	1200× „ „	$2\frac{1}{4}$ „
„ „ „	1600× „ „	$4\frac{1}{2}$ „
„ „ „	2000× „ „	$6\frac{3}{4}$ „ ;

es soll der Zoll-Aufsatz für die Wurfweiten 900×, 1000×, 1100× gefunden werden.

Auflös. Resp. 0,712891; 1,203125; 1,716797 Zoll.

Beispiel 3. Bei demselben Richtungswinkel gaben die Ladungen 48, 64, 80, 96, 112 Lth. die resp. Schußweiten: 1506, 1920, 2296, 2548, 2742 Schritt. Wie groß die Schußweiten für die Ladungen 68, 72, 76 Lth.?

Antw. $2023\frac{399}{768}$×, $2121\frac{528}{768}$, $2212\frac{663}{768}$×.

Anmerkung 1. Die Interpolationsformel von Lagrange, deren Entwickelung hier noch folgen mag, giebt für y genau dieselbe algebraische Function von x, welche vorstehend angenommen wurde; sie giebt aber diese Function in einer anderen Form und ist besonders dann bequemer, wenn die Versuchszahlen für x nicht äquidifferente Werthe sind.

Gesucht wird y als Function von x, wenn man zu den bestimmten Werthen von x:

$$x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4 \;\; \ldots.,$$

die zugehörigen bestimmten Werthe von y (etwa durch Versuche) ermittelt hat, nämlich:

$$y_1 \;\; y_2 \;\; y_3 \;\; y_4 \;\; \ldots..$$

Man stellt sich nun die Aufgabe, y als eine Reihe darzustellen, deren Glieder nach den Versuchszahlen y_1, y_2, y_3, y_4 u. s. w. geordnet sind, d. h. man sucht y in folgender Form:

$$(1.)\quad y = Ay_1 + By_2 + Cy_3 + Dy_4 + \ldots.$$

Natürlich werden A, B, C, D, ... Functionen von x sein und auch die Versuchszahlen x_1, x_2, x_3, x_4 .... enthalten müssen. Um nun diese Coefficienten zu bestimmen, schließt man aus (1.) so: Setzt man $x = x_1$, so soll $y = y_1$ werden; folglich müssen dann alle Glieder rechts, mit Ausnahme des ersten, fortfallen, d. h. Null werden, und dies geschieht offenbar, wenn B, C, D .... den Factor $x - x_1$ enthalten.

Zunächst haben wir also gefunden, daß alle Coefficienten, mit Ausnahme von A, den Factor $x - x_1$ haben müssen; und genau auf dieselbe Weise finden wir aus den Bedingungen: für $x = x_2$ soll $y = y_2$, für $x = x_3$ soll $y = y_3$, für $x = x_4$ soll $y = y_4$ u. s. w. werden, daß diese Bedingungen erfüllt werden, wenn alle Coefficienten

mit Ausnahme von B, den Factor $x - x_2$
" " " C " " $x - x_3$
" " " D " " $x - x_4$

u. s. w. haben.

Wir setzen also jetzt:

$$A = a\cdot(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\ldots.$$
$$B = b\cdot(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)\ldots.$$
$$C = c\cdot(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)\ldots.$$
$$D = d\cdot(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots.$$

u. s. w., so daß a, b, c, d, ... noch zu bestimmen sind. Wir haben sonach:

$$(2.)\quad \begin{aligned} y = {} & a\cdot(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\ldots.\times y_1 \\ & + b\cdot(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)\ldots.\times y_2 \\ & + c\cdot(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)\ldots.\times y_3 \\ & + d\cdot(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots.\times y_4 \\ & + \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Nun soll aber für $x = x_1$, $y = 1\cdot y_1$ werden; setzen wir also in (2.) $x = x_1$, so folgt:

$$1\cdot y_1 = a(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\ldots.\times y_1,$$

und hieraus ergiebt sich:

$$a = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\ldots.}.$$

Weil aber für $x = x_2$, $y = 1\cdot y_2$ werden soll, so muß auch

$$1\cdot y_2 = b(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\ldots.\times y_2,$$

d. h. $b = \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\ldots}$

sein; und ganz eben so folgt:

$$c = \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)\ldots},$$

$$d = \frac{1}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)\ldots}, \text{ u. s. w.}$$

Substituirt man alle diese Werthe in (2.), so ergiebt sich die Interpolations-Formel von Lagrange:

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)\ldots}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)\ldots} \cdot y_1$$

$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)\ldots}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5)\ldots} \cdot y_2$$

$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)(x - x_5)\ldots}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)\ldots} \cdot y_3$$

$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_5)\ldots}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_4 - x_5)\ldots} \cdot y_4$$

$$+ \text{ u. s. w.}$$

Das nte Glied würde heißen:

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_{n+1})\ldots}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3)\ldots(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n+1})\ldots} \cdot y_n.$$

Wenden wir diese Interpolationsformel auf das Beispiel 2. Seite 399. an, und nehmen wir, um bequemer zu rechnen, als Einheit für die Wurfweiten 100× und als Einheit für den Zoll-Aufsatz den Viertel-Zoll, so sind die durch Versuche gefundenen Werthe von x und y folgende:

x	8	12	16	20
y	1	9	18	27

Man erhält also:

$$y = \frac{(x-12)(x-16)(x-20)}{(8-12)(8-16)(8-20)} \cdot 1 + \frac{(x-8)(x-16)(x-20)}{(12-8)(12-16)(12-20)} \cdot 9$$

$$+ \frac{(x-8)(x-12)(x-20)}{(16-8)(16-12)(16-20)} \cdot 18 + \frac{(x-8)(x-12)(x-16)}{(20-8)(20-12)(20-16)} \cdot 27$$

oder:

$$y = -\frac{(x-12)(x-16)(x-20)}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \frac{(x-8)(x-16)(x-20)}{4 \cdot 4 \cdot 8} \cdot 9$$

$$- \frac{(x-8)(x-12)(x-20)}{8 \cdot 4 \cdot 4} 18 + \frac{(x-8)(x-12)(x-16)}{12 \cdot 8 \cdot 4} \cdot 27.$$

Gesucht wird nun der Zoll-Aufsatz (y) für die Wurfweiten (x): 9, 10 und 11 Längeneinheiten. Setzt man aber in vorstehende Formel $x = 9$, so folgt $y = \frac{365}{128}$ Viertel-Zoll oder $y = \frac{365}{512}$ Zoll. — Setzt man $x = 10$, so folgt $y = \frac{154}{32}$ Viertel-Zoll $= \frac{77}{64}$ Zoll. — Setzt man $x = 11$, so folgt $y = \frac{879}{128}$ Viertel-Zoll $= \frac{879}{512}$ Zoll. — Diese Werthe stimmen mit den oben (S. 399.) gefundenen genau überein.

Anmerkung 2. Man kann die vorhergehende und ähnliche Aufgaben auch mittelst der Methode der kleinsten Quadrate (§. 141.) lösen. Wie man hierbei verfährt, soll an einem praktischen Beispiele gezeigt werden. Die in diesem Beispiele vorkommenden Versuchszahlen führt der Capitain J. Hartmann in seinen Vorträgen über Artillerie als Resultate ausgeführter Schießversuche an. Nach diesen Versuchen mit einem leichten 12pfünder und bei constanter Ladung ergab sich bei einer Erhöhung

von 1 Grad die Schußweite	772	Schritt,
„ 2 „ „ „	1172	„
„ 3 „ „ „	1484	„
„ 4 „ „ „	1713	„ .

Wie schließt man aus diesen Versuchen auf die wahrscheinlichste Schußweite bei einer anderen Elevation, z. B. bei $1\frac{1}{2}$ Grad? Offenbar kommt es hier darauf an, die Schußweite ($y^{\times}$) als Funktion der Elevation (x°) auf Grund der angestellten Versuche auszudrücken. — Löst man die vorliegende Aufgabe, indem man die Schußweiten als aufeinander folgende Glieder einer arithmetischen Progression vom 3ten Grade betrachtet, oder behandelt man sie nach der Interpolations-Formel von Lagrange, so setzt man beide Mal voraus, y werde als Function von x die Form haben:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

In beiden Fällen erhält man bei einer Elevation von $1\frac{1}{2}$ Grad die Schußweite $983\frac{5}{16}$ Schritt.

Nach der Methode der kleinsten Quadrate kann man etwa

$$y = a + bx + cx^2$$

setzen, so daß die Anzahl der unbekannten und zu bestimmenden Coefficienten a, b, c kleiner ist, als die Anzahl der Versuche. Setzt man nun in obige Gleichung für x die oben angegebenen Elevations-Winkel und für y die zugehörigen Schußweiten (natürlich mit Hinweglassen der Benennung), so hat man zur Bestimmung von a, b, c die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1)\quad 772 &= a + b + c, \\ 2)\quad 1172 &= a + 2b + 4c, \\ 3)\quad 1484 &= a + 3b + 9c, \\ 4)\quad 1713 &= a + 4b + 16c. \end{aligned}$$

Multiplicirt man nun jede Gleichung zuerst mit dem Factor von a (also mit 1) und addirt alle Gleichungen; multiplicirt man dann jede Gleichung mit dem Factor von b und addirt wieder alle Gleichungen; multiplicirt man endlich jede Gleichung mit dem Factor von c und addirt alle Gleichungen:

so erhält man folgende drei Bestimmungs-Gleichungen zur Entwicklung von a, b und c:

$$\text{I.}\quad 4a + 10b + 30c = 5141$$
$$\text{II.}\quad a + 3b + 10c = 1442$$
$$\text{III.}\quad 3a + 10b + 35{,}4c = 2622{,}4.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$a = 287{,}5;\quad b = 527{,}25;\quad c = -42{,}75.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung $y = a + bx + cx^2$, so entsteht:

$$y = 287{,}5 + 527{,}25\,x - 42{,}75x^2.$$

Für $x = \frac{3}{2}$ ergiebt sich hieraus:

$$y = 982{,}1875^{\times}.$$

Die geometrischen Progressionen.

§. 191.

Erklärung. Gesetze.

Eine Reihe, in welcher jedes Glied durch Multiplication des vorhergehenden mit ein und derselben, sonst beliebigen Zahl, etwa e, entstanden ist, heißt eine *geometrische Progression*. Man nennt e den *Exponenten* der Progression, häufig auch den *Quotienten*, weil der Quotient, welcher durch Division irgend eines Gliedes durch sein vorhergehendes entsteht, immer gleich e ist. Bezeichnet a das erste Glied, so hat die Progression folgende Form:

$$a,\ ae,\ ae^2,\ ae^3,\ ae^4,\ ae^5,\ \ldots\ldots$$

Ist e positiv, so haben alle Glieder gleiche Vorzeichen; ist e negativ, so wechseln die Vorzeichen ab. Die Bezeichnung „*steigende*" und „*fallende Reihe*" bezieht sich bei geometrischen Progressionen auf die absoluten Werthe der Glieder ohne Rücksicht auf die Vorzeichen; daher ist die Progression eine steigende oder fallende, je nachdem der absolute Werth von e größer oder kleiner als 1 ist. So ist z. B.

$2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots\ldots$ eine steigende, aber

$1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, +\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \ldots$ eine fallende oder abnehmende geometrische Progression.

Sind p, q, r drei auf einander folgende Glieder, so hat man noch $r : q = q : p$, also auch $q = \sqrt{pr}$, woraus der Zusammenhang zwischen einer geometrischen *Progression* und *Proportion* erhellt.

Bezeichnet u das nte Glied der Progression, so ist:

$$\text{I.}\quad u = a \cdot e^{n-1}.$$

Diese Formel folgt unmittelbar aus dem oben angegebenen Schema der Progression.

Bezeichnet S_n die Summe der ersten n Glieder, so hat man

$$S_n = a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots + ae^{n-2} + ae^{n-1},$$ folglich

$$e \cdot S_n = ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + \ldots + ae^{n-1} + ae^n;$$

daher, wenn man subtrahirt:

$$S_n \cdot (1 - e) = a - ae^n.$$ Hieraus folgt

$$S_n = \frac{a}{1-e} - \frac{ae^n}{1-e}$$ oder auch

$$\text{II.} \quad S_n = \frac{e^n - 1}{e - 1} \cdot a.$$

Da $ae^n = ae^{n-1} \cdot e = ue$ ist, so hat man noch

$$\text{III.} \quad S_n = \frac{ue - a}{e - 1}.$$

Für $e = 1$ folgt unmittelbar, oder aus II. nach §. 92.: $S_n = na$.

Von den Formeln I., II. und III. sind nur je zwei von einander unabhängig; folglich können von den fünf Buchstaben a, e, n, u, S zwei gefunden werden, wenn die drei andern gegeben sind. Man benutzt dann zwei passende dieser drei Gleichungen als Bestimmungsgleichungen, kommt aber mehrere Mal auf höhere Gleichungen. Ist n unbekannt, so kommt man auf transcendente Gleichungen, kann sie aber mittelst der Logarithmen in algebraische verwandeln. Ist z. B. das erste Glied = p, das letzte = q und die Summe aller = r, so hat man, um e und n zu finden:

$$1) \quad q = p \cdot e^{n-1} \quad \text{und} \quad 2) \quad r = \frac{q \cdot e - p}{e - 1}.$$

Aus 2) folgt $e = \dfrac{r - p}{r - q}$,

und aus 1): $\log q = \log p + (n - 1) \log e$, folglich

$$n = 1 + \frac{\log q - \log p}{\log e}.$$

Sollen zwischen zwei auf einander folgende Glieder p und pe, m Glieder **interpolirt** werden, so liegt hierin die Bedingung, daß diese m Glieder in Verbindung mit p und pe wieder eine geometrische Progression (von m + 2 Gliedern) bilden sollen. Bezeichnet x den Exponenten dieser Progression, so hat sie folgende Form:

$$p, \; px, \; px^2, \; px^3, \; px^4, \; \ldots\ldots, \; px^{m-1}, \; px^m, \; pe.$$

Aus $pe = px^m \cdot x$ folgt aber

$$x = \sqrt[m+1]{e}.$$

z. B. Gegeben sei die Progression 1, 4, 16, 64, ..., man soll zwischen 16 und 64 fünf Glieder interpoliren.

Auflös. Die interpolirten Glieder sind:

$$16\sqrt[3]{2},\ 16\sqrt[3]{4},\ 32,\ 32\sqrt[3]{2},\ 32\sqrt[3]{4}.$$

Auch die geometrische Progression kann man, wie die arithmetische, über das erste Glied hinaus fortsetzen; das dem ersten vorangehende würde, weil man immer durch e dividiren muß, gleich $\frac{a}{e}$ oder ae^{-1} sein, das diesem vorangehende gleich ae^{-2}, u. s. w. Numerirt man diese Glieder mit Hülfe der Null und der negativen Zahlen, so erhält man folgende Darstellung, in welcher über jedem Gliede seine Stellenzahl steht:

$$\begin{matrix} & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \ldots, & ae^{-3}, & ae^{-2}, & ae^{-1}, & a, & ae, & ae^2, & ae^3, & \ldots \end{matrix}$$

Das Glied zur Stellenzahl $-n$ ist gleich ae^{-n-1}, so daß die Formel I. $u = ae^{n-1}$ auch für negative Werthe von n (auch für $n = 0$) gilt. Zwischen je zwei auf einander folgende Glieder kann man nun m Glieder interpoliren, und numerirt man diese mit Hülfe der gebrochenen Zahlen (mit dem Nenner $m + 1$), wie solches bei den arithmetischen Progressionen gelehrt wurde, so gilt die Formel I. auch für interpolirte Glieder, d. h. für gebrochene (positive oder negative) Werthe von n. Befinden sich z. B. zwischen dem nten Gliede u und dem $n+1$sten ue noch m interpolirte Glieder, so ist das pte derselben gleich $u \cdot \left(\sqrt[m+1]{e}\right)^p = ae^{n-1} \cdot e^{\frac{p}{m+1}} = a \cdot e^{n+\frac{p}{m+1}-1}$.
Dasselbe Glied erhält man, wenn man seine Stellenzahl $n + \frac{p}{m+1}$ statt n in die Formel I. $u = ae^{n-1}$ setzt.

Sind zur Bestimmung einer geometrischen Progression nicht drei der Buchstaben a, e, n, u, S gegeben, sondern andere Bedingungen, so ist es in der Regel bequem, bei der Auflösung vom Schema der Progression auszugehen. z. B. Es soll die Summe des 3ten und 4ten Gliedes einer geometrischen Progression $= p$, die Differenz des 3ten und 5ten aber $= q$ sein; wie heißt die Progression?

Auflös. Sie sei: $a, ae, ae^2, ae^3, ae^4, ae^5, \ldots,$
so folgt:
1) $ae^2 + ae^3 = p$
2) $ae^2 - ae^4 = q$, subtrahirt:
$(ae^2 + ae^3)e = p - q$; folglich

$e = \frac{p-q}{p}$ und $a = \frac{p^4}{(p-q)^2 \cdot (2p-q)}$; daher die Progression:

$$\frac{p^4}{(p-q)^2(2p-q)},\ \frac{p^3}{(p-q)(2p-q)},\ \frac{p^2}{2p-q},\ \frac{p(p-q)}{2p-q},\ \frac{(p-q)^2}{2p-q},\ \ldots\ldots$$

Zur Uebung. 1) In einer geometrischen Progression ist der Exponent dem halben ersten Gliede gleich, und das Product des vierten, fünften und sechsten Gliedes ist $= a$; wie groß ist das zehnte Glied? Antw. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2}$.

2) Eine arithmetische und eine geometrische Progression mit reellen Gliedern haben beide das erste Glied 2, die zweiten Glieder sind um 1 verschieden, die dritten wieder gleich; die Progressionen zu bestimmen.

Auflös. Die Aufgabe scheint unbestimmt, weil nicht gesagt ist, ob $ae - (a + d) = 1$, oder $(a + d) - ae = 1$ sein soll. Sie ist es aber nicht; denn bezeichnet b das dritte Glied, so ist in der geometrischen Progression $\sqrt{ab}$ das zweite Glied, in der arithmetischen aber $\frac{a+b}{2}$; $\frac{a+b}{2}$ ist aber größer als $\sqrt{ab}$, wenn a und b reell und nicht gleich sind, weil

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2,$$

also positiv ist. Man erhält zwei Auflösungen:

$$1) \begin{Bmatrix} 2, & 5, & 8, & 11, \ldots \\ 2, & 4, & 8, & 16, \ldots \end{Bmatrix} \text{ und } 2) \begin{Bmatrix} 2, & 1, & 0, & -1, \ldots \\ 2, & 0, & 0, & 0, \ldots \end{Bmatrix}.$$

3) In einer geometrischen Progression ist die Summe der ersten drei Glieder $= -2$, die Summe der ersten vier $= 0$; die Progression zu bestimmen.

Auflös. Man erhält 1) $ae^3 = +2$ und 2) $\frac{e^4 - 1}{e - 1} \cdot a = 0$. Aus 2) folgt, weil a nicht 0 sein kann, daß $\frac{e^4 - 1}{e - 1} = 0$ sein muß. Für $e = 1$ ist $\left(\frac{e^4 - 1}{e - 1}\right)_{e=1} = 4$ (§. 92.); daher ist 1 keine Wurzel der Gleichung $\frac{e^4 - 1}{e - 1} = 0$. Nun ist aber $\frac{e^4 - 1}{e - 1} = \frac{(e^2 + 1)(e^2 - 1)}{e - 1} = (e^2 + 1)(e + 1)$, und dies Product wird 0, wenn $e = -1$, oder $e = \pm i$ ist. Man erhält 3 Progressionen: $-2, +2, -2, +2, \ldots$; $2i, -2, -2i, +2, \ldots$; und $-2i, -2, +2i, +2, \ldots$.

4) 6 Zahlen bilden eine geometrische Progression. Die Summe der ersten 5 ist 484, die Summe der letzten 5 ist 1452; welche Zahlen sind es?

Antw. 4, 12, 36, 108, 324, 972.

5) 4 Zahlen bilden eine geometrische Progression. Das Product der ersten 3 ist 216, das Product der letzten 2 ist 972; wie heißen die Zahlen?

Antw. 2, 6, 18, 54.

6) Das erste Glied einer geometrischen Progression ist gleich 2, der Exponent gleich 1,2; wie viel Glieder hat die Progression, wenn die Summe aller gleich 79,161 ist? Antw. 12 Glieder.

7) Zu beweisen, daß die Logarithmen der Glieder einer geometrischen Progression eine arithmetische Progression bilden.

8) Die Summe der ersten 3 Glieder einer geometrischen Progression ist gleich $\frac{13}{6}$, das dritte Glied gleich $\frac{1}{6}$; wie heißt die Progression?

Antw. Zwei Progressionen erfüllen die gegebenen Bedingungen:

$\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{24}$, u. s. w. und $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}$, u. s. w.

9) Das erste Glied einer geometrischen Progression sei 1,5 und der Exponent = 1,3. Die Progression steigt. Welches Glied übertrifft zuerst die Zahl 10000? Antw. Das fünfunddreißigste Glied.

10) Der Exponent einer geometrischen Progression sei = 2; wie viel Glieder hat die Progression, wenn die Summe aller dadurch auf ihren 64sten Theil herabsinkt, daß man statt des Exponenten seine Reciproke setzt?

Anwt. 7 Glieder.

11) Das zweite Glied einer geometrischen Progression ist gleich a, das sechste gleich b; wie groß ist das Product des ersten, dritten, fünften und siebenten Gliedes?

Antw. $(ab)^2$. — Wie heißt die analoge Aufgabe für die arithmetische Progression?

§. 192.

Eine Anwendung auf die Zinseszinsen-Rechnung.

(Vergl. §. 145.)

Einem Kapitale von a Thlr., welches zu p pCt. auf Zinseszinsen ausgeliehen ist, werden am Schlusse des ersten und jedes folgenden Jahres noch b Thlr. zugelegt und dann weiterhin mit verzinset; zu welcher Größe K wird a am Schlusse des nten Jahres, nachdem wieder b Thlr. zugelegt worden sind, angewachsen sein?

Bezeichnet man $1 + \frac{p}{100}$ durch e*), so ist a angewachsen:

am Schlusse des 1sten Jahres zu: $ae + b$

" " " 2ten " " $ae^2 + be + b$

" " " 3ten " " $ae^3 + be^2 + be + b$

u. s. w., daher am Schlusse des nten Jahres zu der Größe:

$$ae^n + be^{n-1} + be^{n-2} + be^{n-3} + \ldots + be^2 + be + b.$$

Es ist also $K = ae^n + b[1 + e + e^2 + \ldots\ldots + e^{n-2} + e^{n-1}]$, folglich:

$$\text{I.}\quad K = ae^n + \frac{e^n - 1}{e - 1}\cdot b.$$

Aus dieser Gleichung ist jeder der fünf Buchstaben a, b, p, n, K zu entwickeln, wenn die vier anderen gegeben sind. In Bezug auf p ist die Gleichung eine höhere, in Bezug auf n eine transcendente. Zur

---

*) Einige Mathematiker nennen $1 + \frac{p}{100}$ den Zinsfuß, andere aber nennen p selbst so.

Entwicklung von n, aber auch zur bequemeren Berechnung von K, zieht man die Glieder, welche e^n enthalten, in ein Glied zusammen. So entsteht:

$$\text{II.}\quad K = \left(a + \frac{100b}{p}\right)e^n - \frac{100b}{p}.$$

Werden am Schlusse jedes Jahres nicht b Thlr. zugelegt, sondern vom Kapital abgezogen, so muß man in I. und II. — b statt b schreiben und erhält:

$$\text{III.}\quad K = ae^n - \frac{e^n - 1}{e - 1}b = \left(a - \frac{100b}{p}\right)e^n + \frac{100b}{p}.$$

Ist hierbei b größer als die einjährigen Zinsen des Kapitals a, so wird dies Kapital nach und nach immer kleiner, folglich einmal zu Null. Für diesen Fall berechnet man eine der Größen a, b, n, p, indem man K = 0 setzt, aus der Gleichung:

$$\text{IV.}\quad ae^n - \frac{e^n - 1}{e - 1}b = 0, \text{ oder } a = \frac{1 - e^{-n}}{e - 1}\cdot b.$$

Anwendung findet diese Formel in der Rentenrechnung, wenn Jemand für eine eingezahlte Summe a (Actie) eine jährliche Rente b n Jahre lang empfangen will.

Beispiel 1. Zu welcher Größe werden 1000 Thlr. am Schlusse des zehnten Jahres angewachsen sein, wenn sie zu 4 pCt. Zinseszinsen ausstehen, und am Schlusse jedes Jahres noch 200 Thlr. zugelegt werden?

Auflös. $K = 6000 \cdot 1{,}04^{10} - 5000 = 3881{,}46$ Thlr.

Beispiel 2. Ein zu 5 pCt. auf Zinseszinsen ausgeliehenes Kapital von 1000 Thlr. wird am Anfange des zweiten und jedes folgenden Jahres noch um 100 Thlr. vermehrt; nach wie viel Jahren wird es zu 2554 Thlr. angewachsen sein?

Antw. Am Schlusse des 9ten Jahres. (Hier ist K = 4654.)

Beispiel 3. 500 Thlr. sind zu $4\frac{1}{2}$ pCt. Zinseszinsen ausgeliehen. Am Anfange des sechsten Jahres werden von dem Kapital 300 Thlr. fortgenommen, aber am Anfange jedes folgenden werden 90 Thlr. zugelegt; wie groß ist das Kapital am Schlusse des zwanzigsten Jahres?

Antw. 2405 Thlr. 25 Sgr.

Beispiel 4. Jemand hat sein Vermögen zu 4 pCt. auf Zinseszinsen ausstehen, nimmt aber am Schlusse jedes Jahres 500 Thlr. fort. Am Anfange des vierzehnten Jahres besteht sein Vermögen noch in $8337\frac{1}{3}$ Thlr.; wie viel besaß er Anfangs? Antw. 10000 Thlr.

Beispiel 5. Wenn eine Renten-Anstalt ihren Berechnungen den Procentsatz $3\frac{1}{2}$ zum Grunde legt, wie viel würde für eine Rente von 1000 Thlr., wenn sie 15 Jahre lang am Schlusse jedes Jahres erhoben werden soll, am Anfange des ersten Jahres zu zahlen sein?

Antw. 11517 Thlr. 11 Sgr. 5 Pf.

Beispiel 6. Eine Eisenbahn-Gesellschaft hat zu 4 pCt. Zinsen eine Anleihe von 3 Millionen Thlr. gemacht und will dieselbe dadurch amortisiren, daß sie jährlich 210000 Thlr. zur Bezahlung der Zinsen und zur Tilgung eines Theiles der Anleihe verwendet. Nach wie viel Jahren ist die Anleihe abgezahlt? — Antw. In 21,6 Jahren.

Beispiel 7. Ein Wald, abgeschätzt zu 40000 Haufen Holz und einem jährlichen Zuwachs von 1 pCt., soll innerhalb 10 Jahren abgeholzt werden. Wie viel Holz kann man jährlich schlagen, um alle Jahre gleich viel Holz zu erhalten? — Antw. $4223\frac{1}{4}$ Haufen.

Beispiel 8. Ein Kapital von 10000 Thlr. ist zu 4 pCt. Zinseszinsen ausgeliehen. Am Schlusse des ersten und jedes folgenden Jahres werden 600 Thlr. zurückgezahlt; nach wie viel Jahren ist das Kapital vollständig zurückgezahlt?

Antw. Nach 28 Jahren.

Beispiel 9. Eine Schuld von 10075 Thlr., zu 4 pCt. zu verzinsen, soll dadurch zurückgezahlt werden, daß am Schlusse jedes Jahres die Hälfte des mit Einschluß der Zinsen dann noch vorhandenen Kapitals und noch 7 Thlr. zurückgezahlt werden. Nach wie viel Jahren ist die Schuld getilgt?

Antw Nach 10 Jahren. — Ist $e = 1{,}04$, so erhält man

$$10075 \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^x = \frac{\left(\frac{e}{2}\right)^x - 1}{\frac{e}{2} - 1} \cdot 7.$$

Die unendlichen Reihen.

Convergenz derselben.

§. 193.

Die abnehmende geometrische Progression.

Ist die Reihe gegeben:

$$S = a + ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + \ldots\ldots,$$

so ist die Summe der ersten n Glieder, nach §. 191.

$$S_n = \frac{a}{1-e} - \frac{a \cdot e^n}{1-e}.$$

Wir bemerken, daß das erste Glied dieser Differenz von der Anzahl der Glieder (n) unabhängig ist, das zweite aber abhängig. Denkt man sich nun n nach und nach immer größer werdend, addirt man also immer mehr und mehr Glieder jener geometrischen Progression: so wird, wenn $e > 1$ ist, das zweite Glied auch immer größer und für $n = \infty$ selbst unendlich groß; ist aber $e < 1$, d. h. nimmt die Progression ab, so wird, während n wächst, $\frac{ae^n}{1-e}$ immer

kleiner und kleiner. Nähert sich n der Grenze ∞, so nähert sich $\frac{ae^n}{1-e}$ der Grenze 0, wird also für $n = \infty$ selbst zur Null. Hieraus folgt, daß bei der abnehmenden geometrischen Progression die Summe S_n für wachsende Werthe von n sich einer bestimmten endlichen Grenze nähert, nämlich der Grenze $\frac{a}{1-e}$, und daß sie diese Grenze dann erreicht, wenn $n = \infty$ ist. Es ergiebt sich also für die **fallende geometrische Progression von unendlich vielen Gliedern** die Formel:

$$S_\infty = \frac{a}{1-e}.$$

Anmerk. Man kann diese Formel auch unmittelbar so entwickeln:

$$\begin{array}{rl} S_\infty = & a + ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + \ldots\ldots\ldots \\ e \cdot S_\infty = & \phantom{a +{}} ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + ae^5 + \ldots\ldots\ldots \\ \hline \end{array}$$

$$S_\infty - e \cdot S_\infty = a; \quad \text{folglich } S_\infty = \frac{a}{1-e}.$$

z. B. 1) $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots;\ S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

2) $S = 0{,}333333\ldots\ldots;\ S_\infty = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$

3) $S = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{1}{108} + \ldots;\ S_\infty = \frac{9}{8}.$

4) $S = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots;\ S_\infty = \frac{1}{1-a}$, wenn $a < 1$ ist. (Vergl. den Schluß des §. 34.)

5) $S = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} - \frac{8}{81} + \frac{16}{243} - + - + \ldots;\ S_\infty = \frac{9}{20}.$

6) A sei von B 8 Meilen entfernt. Wenn man nun annimmt, daß ein Reisender sich von A nach B so bewegt, daß er am ersten Tage 4 Meilen und an jedem folgenden immer halb so viel Meilen als am vorhergehenden Tage zurücklegt: nach wie viel Tagen würde er in B ankommmen?

Auflös. Nach unendlich vielen Tagen, also niemals. — Dieses Beispiel versinnlicht sehr deutlich, wie eine Summe von unendlich vielen Gliedern eine bestimmte Grenze haben kann, der man sich ohne Aufhören nähert, je mehr Glieder man zusammenrechnet, ohne sie doch je zu erreichen. Man erwäge nur, daß der Reisende an jedem Tage immer nur die Hälfte der Strecke zurücklegt, um welche er noch von B entfernt ist.

7) Der Inhalt eines Dreiecks sei F. Verbindet man die Mittelpunkte der drei Seiten durch gerade Linien, verfährt man in dem neu entstandenen Dreieck eben so, und fährt man so ins Unendliche fort: wie groß ist dann die Summe aller so entstandenen einzelnen Dreiecke?

Auflös. $\frac{4}{3}$ F. (Geometr. §. 86.)

8) Dieselbe Aufgabe für ein Viereck vom Inhalt F.

Auflös. Die Summe aller Vierecke ist gleich 2 F.

9) Der Inhalt des Dreiecks ABC sei gleich F. Theilt man jede Seite

desselben in zwei Theile nach dem Verhältniß $n:m$, und zwar AB von A aus, BC von B aus, CA von C aus, und verbindet man die Theilpunkte durch gerade Linien; verfährt man mit dem neu entstandenen Dreieck eben so, mit dem dritten entstandenen Dreieck ebenfalls und so fort bis ins Unendliche: wie groß ist die Summe aller dieser einzelnen Dreiecke?

Auflös. $\frac{(n+m)^2}{3nm} \cdot F$. (Geometr. §. 190. No. 34.)

10) Dieselbe Aufgabe für ein Viereck vom Inhalt F.

Auflös. Die Summe aller Vierecke ist gleich $\frac{(n+m)^2}{2nm} \cdot F$. (Geometr. §. 190. No. 35.)

11) Auf einem Grundstücke ruht eine immerwährende Abgabe von 120 Thlr., am Schlusse jedes Jahres zahlbar. Mit welcher Summe ist diese Abgabe von dem Besitzer des Grundstückes am Anfange eines Jahres abzulösen, wenn zu 4 pCt. Zins auf Zins gerechnet wird?

Auflös. Bezeichnet man den heutigen Werth einer Summe b, welche nach n Jahren gezahlt werden soll, mit a, und werden p pCt. Zinseszinsen gerechnet, so ist $a \cdot e^n = b$, wenn $e = 1 + \frac{p}{100}$; foglich $a = \frac{b}{e^n}$. Für die vorliegende Aufgabe ist $b = 120$, $e = 1{,}04$ und n nach der Reihe: 1, 2, 3, 4, ... bis ∞. Die gesuchte Ablösungs-Summe S ist also:

$$S = \frac{120}{1{,}04} + \frac{120}{1{,}04^2} + \frac{120}{1{,}04^3} + \frac{120}{1{,}04^4} + \ldots \text{ in infinit.}$$

Hieraus $S = \dfrac{\frac{120}{1{,}04}}{1 - \frac{1}{1{,}04}} = 3000$ Thlr. Die Summe ist also genau das Kapital, welches, zu 4 pCt. verzinset, jährlich 120 Thlr. einfache Zinsen bringt.

§. 194.

Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen.

In der abnehmenden geometrischen Progression haben wir eine Reihe von unendlich vielen Gliedern kennen gelernt, deren Summe aller Glieder eine bestimmte endliche Zahl ist. Jede unendliche Reihe (so nennen wir fortan jede Reihe mit unendlich vielen Gliedern), welche diese Eigenschaft hat, heißt eine convergente oder convergirende Reihe.

Convergirt eine Reihe nicht, so ist die Summe aller Glieder entweder unendlich groß, oder zwar nicht unendlich, aber auch nicht eine bestimmte endliche Zahl. Im ersten Falle heißt die Reihe eine divergente oder divergirende, im zweiten eine unbestimmte.

Nur mit convergenten Reihen kann man operiren, nur sie haben einen praktischen Werth; daher muß man sich bei allen vorkommenden unendlichen Reihen von ihrer Convergenz zu überzeugen suchen. Namentlich gilt dies von solchen Reihen, welche die Entwicklung eines endlichen Ausdruckes sind. Nur wenn sie convergiren, können sie statt dieses Ausdruckes gebraucht werden.

Die Glieder einer unendlichen Reihe werden wir mit x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, ... bezeichnen, die Summe aller mit S, die Summe der ersten n Glieder mit S_n. Diese Reihe

$$S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \ldots\ldots$$

heißt eine zunehmende (steigende), oder abnehmende (fallende), je nachdem die absoluten Werthe der Glieder nach und nach größer, oder kleiner werden. — Untersuchungen über unendliche Reihen kann man überhaupt nur dann vornehmen, wenn die Glieder nach einem erkennbaren oder zu ermittelnden Gesetz gebildet sind, namentlich wenn die Abhängigkeit jedes Gliedes von seiner Stellenzahl gefunden werden kann. Man spricht übrigens auch von dem letzten Gliede einer unendlichen Reihe und meint hiermit die Zahl, der sich die Glieder nach und nach immer mehr nähern, also den Werth des nten Gliedes für $n = \infty$. So sagt man z. B.: in der Reihe

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots$ ist das letzte Glied ∞;

ferner: in der Reihe $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots\ldots$ ist das letzte Glied 0; u. s. w. Wie groß ist aber das letzte Glied der Reihe

$$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{5}{9} + \ldots\ldots?$$

Offenbar ist das nte Glied $x_n = \frac{n}{2n-1}$; also heißt die Frage: wie groß ist $\frac{n}{2n-1}$ für $n = \infty$? Führt man statt der Zahl n ihre Reciproke ein (§. 38.), dividirt man also Zähler und Nenner durch n, so folgt $x_n = \frac{1}{2 - \frac{1}{n}}$. Nun wird $\frac{1}{n}$ für $n = \infty$ zu Null, folglich ist das letzte Glied $= \frac{1}{2}$.

Von einer convergenten Reihe sagt man, sie convergirt langsam, wenn man sehr viele Glieder vom ersten an zusammenrechnen muß, um der wahren Summe bis zu einer bestimmten Grenze nahe

zu kommen; hingegen convergirt sie um so schneller, je weniger Glieder dazu nöthig sind. z. B.

$$(1.)\ S = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} - \frac{1}{22} + \frac{1}{29} - \frac{1}{36} + - + \ldots$$

$$(2.)\ S = 1 + \frac{1}{2 \cdot 8^3} + \frac{1}{3 \cdot 8^6} + \frac{1}{4 \cdot 8^9} + \frac{1}{5 \cdot 8^{12}} + \ldots\ldots$$

Beide Reihen convergiren, die erste aber außerordentlich langsam, die zweite sehr schnell. Will man etwa so viel Glieder addiren, bis der Unterschied der berechneten und der wahren Summe weniger als eine Einheit der 10ten Decimalstelle beträgt, so muß man in (1.) nicht weniger als 1428571430 Glieder addiren, in (2.) aber nur die ersten vier. Das vierte Glied der Reihe (2.) giebt in einen Decimalbruch verwandelt: 0,00000000186264 ....., und man erkennt leicht, daß jedes Glied der Reihe (2.) kleiner ist, als der 512te Theil des vorhergehenden Gliedes; das fünfte Glied hat erst in der 12ten Decimalstelle eine Ziffer, die nicht Null ist.

a) Reihen, in welchen alle Glieder positiv sind.

§. 195.

Gesetze.

I. Jede unendliche Reihe, deren Glieder eine abnehmende geometrische Progression bilden, convergirt. (§. 193.)

II. Jede Reihe convergirt, wenn sie von einem bestimmten Gliede an convergirt, vorausgesetzt, daß kein diesem vorangehendes Glied unendlich ist. (Imaginäre Glieder sind überhaupt ausgeschlossen.)

Beweis. Ist $x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \ldots\ldots$ eine endliche Zahl, so ist es auch S, weil dann zu einer endlichen Zahl nur wieder eine endliche addirt wird.

III. Aus $S = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + x_{n+1} + \ldots\ldots$ folgt: $S - S_n = x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \ldots\ldots$ Soll nun S convergiren, so muß $S - S_n$, wenn n wächst und sich der Grenze ∞ nähert, immer kleiner werden und sich der Grenze 0 nähern, für $n = \infty$ aber zu Null werden. Hieraus folgt, daß jede steigende Reihe und jede Reihe mit gleichen Gliedern divergirt, daß aber auch die abnehmende Reihe nur konvergiren kann, wenn das letzte Glied 0 ist. Daß die abnehmende Reihe, deren letztes Glied eine endliche Zahl ist, nicht convergiren kann, geht auch daraus hervor, daß eine solche Reihe schon dann divergiren würde, wenn man alle

Glieder dem letzten gleich machte, also verkleinerte. So divergirt z. B. die Reihe

$$S = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \ldots, \text{ weil } x_\infty = 1 \text{ ist.}$$

Hiermit ist aber nicht gesagt, daß jede abnehmende Reihe, deren letztes Glied 0 ist, convergiren müsse. Nehmen wir z. B. die Reihe

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots,$$

so ist $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$.

Macht man nun jedes Glied dem letzten gleich, so wird, mit Ausnahme dieses Gliedes, jedes verkleinert; folglich ist

$$S_{2n} - S_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}, \text{ d. h.}$$

$$S_{2n} - S_n > n \cdot \frac{1}{2n} \quad \text{oder} \quad S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}.$$

Theilt man nun die gegebene Reihe in Abtheilungen, so daß in der ersten die ersten 2 Glieder stehen, in der zweiten die nächsten 2, in der dritten die nächsten 4, in der vierten die nächsten 8, u. s. w.

$$S = 1 + \tfrac{1}{2} \Big| + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \Big| + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} \Big| + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \ldots + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16} \Big| + \ldots,$$

so ist in jeder Abtheilung die Summe der Glieder größer als $\frac{1}{2}$, und weil unendlich viele Abtheilungen sind, so ist $S = \infty$; also divergirt S, und $S - S_n$ nähert sich daher für steigende Werthe von n nicht der Null.

IV. Jede Reihe S convergirt, wenn jedes Glied derselben kleiner ist, als das ebensovielte Glied einer andern Reihe R, deren Convergenz erwiesen ist.

Beweis. Es sei $S = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + x_{n+1} + \ldots$
und $R = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n + y_{n+1} + \ldots$,

so folgt: $S - S_n = x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \ldots$

und $R - R_n = y_{n+1} + y_{n+2} + y_{n+3} + \ldots$

Nun ist nach der Voraussetzung

$x_{n+1} < y_{n+1}$; $x_{n+2} < y_{n+2}$; $x_{n+3} < y_{n+3}$; u. s. w., folglich auch:

$$S - S_n < R - R_n.$$

$R - R_n$ nähert sich aber für steigende Werthe von n der Null und wird für $n = \infty$ zu Null; folglich hat, weil es sich hier um lauter positive Glieder handelt, $S - S_n$ diese Eigenschaft auch, d. h. S convergirt.

Der nächste, wichtigste Satz über die Convergenz der Reihen ist eine Anwendung dieses Gesetzes.

V. Jede Reihe $S = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + x_{n+1} + \ldots$ convergirt, wenn der Quotient $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, den man erhält, wenn man ein Glied durch das vorhergehende dividirt, für jeden Werth von n, auch für $n = \infty$, ein echter Bruch ist, also < 1. Ist $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ nicht für jeden Werth von n kleiner als 1, aber für einen bestimmten Werth, etwa für $n = p$, dann aber auch für alle folgenden bis $n = \infty$: so convergirt die Reihe auch; denn sie convergirt dann vom pten Gliede an.

Beweis. Nach der Voraussetzung sind $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_2}, \frac{x_4}{x_3}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_n}, \ldots$ kleiner als 1. Unter allen diesen Brüchen wird einer der größte sein, wenn nicht mehrere gleiche die größten sind; aber auch der größte ist < 1. Es sei nun α ein echter Bruch, der noch größer ist, als der größte aller dieser Quotienten (man kann α erzeugen, indem man zu Zähler und Nenner des größten 1 addirt), so hat man:

$\frac{x_2}{x_1} < \alpha, \frac{x_3}{x_2} < \alpha, \frac{x_4}{x_3} < \alpha, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_n} < \alpha$, u. s. w. Hieraus folgt aber

$$x_2 < \alpha \cdot x_1;\; x_3 < \alpha \cdot x_2;\; x_4 < \alpha \cdot x_3; \ldots, x_{n+1} < \alpha \cdot x_n; \ldots$$

folglich um so mehr:

$$x_2 < \alpha \cdot x_1;\; x_3 < \alpha^2 \cdot x_1;\; x_4 < \alpha^3 \cdot x_1; \ldots, x_{n+1} < \alpha^n \cdot x_1; \ldots$$

u. s. w. Vergleicht man nun die beiden Reihen mit einander:

$$S - x_1 = x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n+1} + \ldots$$

$$R = \alpha \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_1 + \alpha^3 \cdot x_1 + \ldots + \alpha^n \cdot x_1 + \ldots,$$

so ist jedes Glied der ersten Reihe kleiner, als das ebensovielte Glied der zweiten Reihe. Die zweite Reihe ist aber eine abnehmende geometrische Progression und convergirt sonach; folglich convergirt nach dem vorigen Satze auch die erste Reihe, folglich auch die Reihe S. — Der zweite Theil des Satzes leuchtet ohne Weiteres ein.

Beispiele. 1) $S = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 8} + \frac{1}{5 \cdot 16} + \frac{1}{6 \cdot 32} + \ldots$

Die Convergenz folgt unmittelbar aus IV.

2) $S = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \ldots + \frac{n+1}{2^{n+1}} + \ldots$

Es ist $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{2^{n+2}} : \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{n+2}{2n+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}$.

Da $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ für jeden Werth von n ein echter Bruch ist, so convergirt S vom ersten Gliede an.

3) $S = 1 + \frac{2}{11} + \frac{3}{21} + \frac{4}{31} + \frac{5}{41} + \frac{6}{51} + \ldots.$

Es ist $x_n = \frac{n}{10n-9} = \frac{1}{10-\frac{9}{n}}$. Die Reihe divergirt, weil das letzte Glied $\frac{1}{10}$ ist.

4) $S = 2 + 4 + 4 + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} + \ldots. + \frac{2^{n|2}}{n!\,(n-1)!} + \ldots.$

Es ist $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{n}$; folglich convergirt die Reihe vom 3ten Gliede an.

5) $S = 1 + \frac{11}{2} + \frac{21}{4} + \frac{31}{8} + \frac{41}{16} + \frac{51}{32} + \ldots.$

Es ist $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10n+1}{10n-9}$, und dieser Quotient hat für $n = \infty$ die Grenze $\frac{1}{2}$. Die Reihe convergirt vom 2ten Gliede an ($n > 1{,}9$).

6) $S = 1 + \frac{3}{2} + \frac{6}{4} + \frac{10}{8} + \frac{15}{16} + \frac{21}{32} + \frac{28}{64} + \ldots.$

Es ist $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$. Die Reihe convergirt vom 3ten Gliede an.

7) $S = 1 + \frac{2^3}{3} + \frac{3^3}{3^2} + \frac{4^3}{3^3} + \frac{5^3}{3^4} + \frac{6^3}{3^5} + \ldots.$

Es ist $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$. Die Reihe convergirt vom 3ten Gliede an. (Man findet $\frac{1}{n} < -1 + \sqrt[3]{3}$, also $n > 2{,}2$.)

8) $S = 1 + \frac{2}{5} + \frac{5}{12} + \frac{10}{22} + \frac{17}{35} + \frac{26}{51} + \ldots.$, wenn die Zähler und die Nenner arithmetische Progressionen bilden.

Die Reihe divergirt; denn es ist $x_n = 2 \cdot \frac{n^2 - 2n + 2}{3n^2 - n}$, folglich: $x_\infty = \frac{2}{3}$.

9) $S = a + 2ae + 3ae^2 + 4ae^3 + 5ae^4 + \ldots$, wenn e ein echter Bruch ist.

Es ist $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)e$. Dieser Quotient hat für $n = \infty$ die Grenze e; folglich convergirt die Reihe, und zwar von dem Gliede an, für welches $n > \frac{e}{1-e}$ ist. Für $e = \frac{5}{6}$ z. B. convergirt die Reihe vom 6ten Gliede an.

Im vorliegenden Falle kann man aber die Convergenz der Reihe durch Herleitung der Summe selbst als einen endlichen Ausdruck beweisen. Es ist

$$\begin{array}{rl} S = & a + 2ae + 3ae^2 + 4ae^3 + 5ae^4 + \ldots \\ eS = & \quad\; ae + 2ae^2 + 3ae^3 + 4ae^4 + 5ae^5 + \ldots \\ \hline S(1-e) = & a + ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + ae^5 + \ldots \end{array}$$

$$S(1-e) = \frac{a}{1-e}; \text{ folglich } S = \frac{a}{(1-e)^2}.$$

Für $e = \frac{5}{6}$ ist $S = 36a$.

10) $S = 1 + 1 + \frac{11}{2!} + \frac{31}{3!} + \frac{61}{4!} + \ldots + \frac{1 + (n-1)_2 \cdot 10}{(n-1)!} + \ldots$

Es ist hier bequemer, $\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}$ statt $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ zu bestimmen. Man erhält

$$\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = \frac{5n^2 + 5n + 1}{(n+1)(5n^2 - 5n + 1)}.$$

Aus $5n^2 + 5n + 1 < (n+1)(5n^2 - 5n + 1)$ folgt $n^3 - n^2 - \frac{9}{5}n > 0$ oder $n(n - 1{,}93)(n + 0{,}93) > 0$. Es wird also $\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} < 1$, wenn $n > 1{,}93$ ist, d. h. S convergirt vom dritten Gliede an.

Anmerk. Man darf aus V. übrigens nicht schließen, daß eine Reihe, bei welcher $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ für $n = \infty$ gleich 1 ist, dann nothwendig divergent sein müsse. Sie kann dann divergent sein, sie kann aber auch convergent sein. z. B.

1) $S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

Hier ist $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2} = \frac{1}{1 + \frac{2}{n}}$.

Man sieht, daß hier $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ für steigende Werthe von n fortwährend wächst und sich der 1 nähert, für $n = \infty$ aber zu 1 wird. Durch den Satz V. läßt sich also die Convergenz der Reihe nicht nachweisen. Daß aber die Reihe convergent ist, folgt so: Es ist

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1};$$

folglich ist:

$$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + - + \ldots\ldots,$$

d. h. es ist $S = 1$.

Auf ähnliche Weise ist die Convergenz der Reihe

$$2)\ S = \frac{1}{1\cdot4} + \frac{1}{2\cdot5} + \frac{1}{3\cdot6} + \frac{1}{4\cdot7} + \ldots + \frac{1}{n(n+3)} + \ldots$$

nachzuweisen. Man erhält $S = \frac{11}{18}$. Es ist $\frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right]$.

Beispiel. 3) Es soll die Convergenz folgender zwei Reihen untersucht werden:

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

$$R = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{5^2} + \frac{5}{6^2} + \ldots$$

Auflös. Bei beiden Reihen ist $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ für jeden endlichen Werth von n ein echter Bruch, aber für $n = \infty$ ist dieser Quotient gleich 1. Die Entscheidung über die Convergenz muß also anders geschehen. Nun ist aber offenbar

$$S < 1 + \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{4\cdot5} + \ldots$$

Diese Reihe convergirt aber nach Beispiel 1), und ihre Summe ist gleich 2; folglich convergirt S nach §. 195. IV., und zwar ist $S < 2$.

Die Reihe R ist divergent; denn man kann, weil

$$\frac{n}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \text{ ist,}$$

$$R = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \ldots$$

setzen, oder:

$$R = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right).$$

Da nun der Subtrahend dieser Differenz eine convergente Reihe ist (und kleiner als 1), hingegen der Minuend eine divergente, deren Summe (§. 195. III.) unendlich groß ist, so ist auch $R = \infty$, divergirt also.

b) Reihen, deren Glieder beliebige Vorzeichen haben.

§. 196.

Gesetze.

I. **Jede Reihe, deren Glieder abwechselnd die Vorzeichen + und — haben, convergirt, wenn sie abnimmt, und ihr letztes Glied Null ist.**

Beweis. Es sei

$S = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + - + \ldots - x_n + x_{n+1} - x_{n+2} + x_{n+3} - + \ldots$

Bezeichnet nun wieder S_n die Summe der ersten n Glieder, so kann man S auf zwei Arten darstellen:

1) $S = S_n + (x_{n+1} - x_{n+2}) + (x_{n+3} - x_{n+4}) + (x_{n+5} - x_{n+6}) + + \ldots$

2) $S = S_n + x_{n+1} - (x_{n+2} - x_{n+3}) - (x_{n+4} - x_{n+5}) - - - \ldots$

Die Differenzen in den Klammern sind sämmtlich positiv, weil S eine abnehmende Reihe ist; daher folgt aus 1):

3) $S > S_n$, und aus 2):

4) $S < S_n + x_{n+1}$.

(Hätte man das nte Glied $= + x_n$, also das $n + 1$ste Glied $= - x_{n+1}$ angenommen, so würde man $S < S_n$ und $S > S_n - x_{n+1}$ erhalten haben.)

Aus 3) und 4) folgt nun, daß S zwischen den Grenzen S_n und $S_n + x_{n+1}$ liegt. Diese Grenzen rücken aber für steigende Werthe von n immer näher an einander und fallen für $n = \infty$ zusammen, weil $x_\infty = 0$ sein soll, folglich convergirt S.

Es convergiren z. B. folgende Reihen:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - + \ldots$$

$$S = 2 - \frac{5}{6} + \frac{1}{2} - \frac{7}{20} + \frac{4}{15} - \frac{3}{14} + \ldots \pm \frac{n+3}{n(n+1)} \mp \ldots$$

Hier ist $x_n = \dfrac{1 + \frac{3}{n}}{n+1}$, folglich $x_\infty = 0$.

Anmerk. Ist das letzte Glied der abnehmenden Reihe mit abwechselnden Vorzeichen nicht Null, sondern eine endliche Zahl, so convergirt die Reihe nicht; aber die Summe ist dann auch nicht unendlich, sondern unbestimmt und liegt zwischen zwei Grenzwerthen, die um das letzte Glied verschieden sind. z. B.

$$S = 1 - \tfrac{3}{4} + \tfrac{5}{7} - \tfrac{7}{10} + \tfrac{9}{13} - \tfrac{11}{16} + - + \ldots$$

Hier ist $x_{n+1} = \dfrac{2n+1}{3n+1}$; folglich liegt S zwischen den Grenzen S_n und $S_n \pm \dfrac{2n+1}{3n+1}$. Der Unterschied dieser Grenzen nähert sich aber für steigende Werthe von n nicht der Null, sondern dem Werthe $\frac{2}{3}$, weil $\dfrac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n}}$ für

$n = \infty$ zu $\frac{2}{3}$ wird. Es liegt also S zwischen zwei Grenzwerthen, welche um $\frac{2}{3}$ von einander verschieden sind, und ist unbestimmt.

II. Jede Reihe, deren Glieder alle oder zum Theil negativ sind, ist convergent, sobald sie convergirt, wenn alle Glieder positiv genommen werden.

Beweis. Es sei die Summe der positiven Glieder $= S'$, die absolute Summe der Glieder mit negativem Vorzeichen $= S''$, so ist $S = S' - S''$. Nach der Voraussetzung soll nun $S' + S''$ eine bestimmte endliche Zahl sein, folglich müssen auch S' und S'' einzeln bestimmte endliche Zahlen sein, daher auch $S' - S''$, d. h. S convergirt.

Hieraus folgt namentlich, daß der Satz V. in §. 195. auch auf Reihen, deren Glieder beliebige Vorzeichen haben, anwendbar ist; nur muß man im Quotienten $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ unter x_{n+1} und x_n die absoluten Glieder verstehen.

§. 197.

Zusatz.

Die convergente abnehmende Reihe

$$S = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + - + \ldots.$$

hat vor allen anderen Reihen den großen Vorzug, daß man bei der Addition der Glieder Behufs der Berechnung von S immer weiß, wie weit man sich der wahren Summe genähert hat. Die Abweichung von dieser Summe beträgt weniger, als die Größe des ersten, noch nicht in die Rechnung gezogenen Gliedes; denn es liegt S zwischen S_1 und S_2, zwischen S_2 und S_3, zwischen S_3 und S_4, u. s. w. Ist z. B.

$$S = 1 - \frac{2}{6} + \frac{3}{20} - \frac{4}{56} + \frac{5}{144} - \frac{6}{352} + - + \ldots,$$

und hat man die ersten 10 Glieder zusammengerechnet, so beträgt die Abweichung von der wahren Summe noch nicht $\frac{11}{21504}$.

Beispiel 2. Es soll die Convergenz folgender Reihe

$$S = \frac{1}{9} - \frac{2}{39} + \frac{3}{89} - \frac{4}{159} + \frac{5}{249} - + \ldots,$$

in welcher die Zähler und die Nenner der einzelnen Glieder arithmetische Progressionen bilden, bewiesen und angegeben werden, wie viel Glieder man addiren muß, wenn das Resultat auf drei Decimalstellen richtig sein soll.

Auflös. Man findet den absoluten Werth des nten Gliedes gleich $\frac{n}{10n^2-1} = \frac{1}{10n - \frac{1}{n}}$; aus ihm folgt, daß die Reihe vom ersten Gliede an abnimmt und das letzte Glied Null ist; die Reihe convergirt also. Setzt man ferner $\frac{n}{10n^2-1} < \frac{1}{1000}$, so findet man hieraus (§. 157. II.): $n > 100$; man muß also die ersten 100 Glieder addiren.

Beispiel 3. Dieselbe Aufgabe für die Reihe

$$S = \frac{1}{2} - \frac{2}{11} + \frac{3}{26} - \frac{4}{47} + \frac{5}{74} - + \ldots,$$

wenn das Resultat auf zwei Decimalstellen richtig sein soll.

Auflös. Man hat 33 Glieder zu addiren.

Anmerkung. Berechnet man die Summe einer unendlichen Reihe durch fortgesetztes Addiren der einzelnen Glieder, so ist es natürlich nothwendig, beurtheilen zu können, wie weit, wenn man eine gewisse Anzahl Glieder zusammengerechnet hat, das Resultat zuverlässig ist. Die Vergleichung der Reihe mit einer geometrischen Progression macht diese Beurtheilung häufig möglich, wie wir an einem Beispiele zeigen wollen. Es sei:

$$S = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \ldots.$$

Berechnen wir die ersten 11 Glieder und kürzen die Decimalbrüche auf 10 Stellen ab, so folgt:

$$\begin{array}{r l}
 & 2, \\
 & 0{,}5 \\
 & 0{,}1666666667 \\
 & 0{,}0416666667 \\
 & 0{,}0083333333 \\
 & 0{,}0013888889 \\
 & 0{,}0001984127 \\
 & 0{,}0000248016 \\
 & 0{,}0000027557 \\
 & \underline{0{,}0000002756} \\
S = & 2{,}7182818012.
\end{array}$$

Wie weit ist nun dies Resultat richtig? Bezeichnen wir die Summe aller Glieder vom 12ten an mit R, so ist:

$$R = \frac{1}{11!} + \frac{1}{12!} + \frac{1}{13!} + \frac{1}{14!} + \ldots, \text{ oder}$$

$$R = \frac{1}{11!}\left[1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \frac{1}{12 \cdot 13 \cdot 14} + \frac{1}{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15} + \ldots\right]$$

Wenn wir nun in den Klammern alle Glieder vom dritten an dadurch vergrößern, daß wir alle Factoren ihrer Nenner $= 12$ machen, so ist offenbar:

$$R < \frac{1}{11!}\left[1 + \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^3 + \left(\frac{1}{12}\right)^4 + \ldots\right].$$

Die Glieder in den Klammern bilden eine abnehmende geometrische Progression, deren Summe bereits gefunden ist. Man erhält also

$$R < \frac{1}{11!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{12}}; \text{ oder } R < \frac{1}{11!} \cdot \frac{12}{11}.$$

Verwandelt man dieses Produkt in einen Decimalbruch, so folgt $R < 0{,}0000000273$. Es weicht also das gefundene Resultat von der wahren Summe noch nicht um 3 Einheiten der 8ten Decimalstelle ab. In der That sind die ersten 7 Decimalstellen ganz richtig; denn der genaue Werth von S ist:

$$S = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ \ldots$$

Diese Zahl erhält später (als Basis der natürlichen Logarithmen) eine besondere Wichtigkeit.

Reihen, welche nach den Potenzen eines Buchstaben, etwa x, geordnet sind.

§. 198.

Convergenz der nach den Potenzen von x geordneten Reihen.

Am häufigsten kommen in der Analysis Reihen vor, welche nach den steigenden Potenzen eines Buchstaben, etwa x, geordnet sind, also Reihen von der Form:

$$S = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$$

Die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sind beliebige, aber von x unabhängige Zahlen; wir setzen voraus, daß sie reell und endlich sind. Unter x denken wir uns eine absolute Zahl.

Eine solche Reihe convergirt zuweilen für jeden endlichen Werth von x; ist dies aber nicht der Fall, so kann man doch x immer so klein wählen, daß die Reihe convergirt.

Beweis. Als Kriterium der Convergenz wenden wir den Satz §. 195., V. an. Dividiren wir jedes Glied durch das vorhergehende, so entstehen die Quotienten $\frac{a_1}{a_0} \cdot x$, $\frac{a_2}{a_1} \cdot x$, $\frac{a_3}{a_2} \cdot x$, $\frac{a_4}{a_3} \cdot x$, u. s. w. Sind alle diese Quotienten kleiner als 1, so convergirt die Reihe vom

ersten Gliede an. Ist nun $\frac{a_{n+1}}{a_n}x$ von allen Quotienten der größte, und wählen wir x so, daß $\frac{a_{n+1}}{a_n}x < 1$ oder $x < \frac{a_n}{a_{n+1}}$ wird, so muß die Reihe nothwendig convergiren. Sind die Glieder zum Theil auch negativ, so muß man, wie schon früher gezeigt wurde, ihre absoluten Werthe in Rechnung bringen. — Der Beweis, also auch die Behauptung, bleibt auch dann richtig, wenn die Coefficienten a_0, a_1, a_2, a_3, u. s. w. fortwährend so wachsen, daß der Coefficient des letzten Gliedes der unendlichen Reihe selbst unendlich groß ist; nur muß der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für jeden Werth von n, auch für $n = \infty$, eine endliche Zahl sein; auch muß man im Stande sein, den größten aller dieser Quotienten zu finden. (Ueber den Fall, daß die Reihe nicht vom ersten, sondern von einem späteren Gliede an convergiren soll, vergl. man Beisp. 6.).

Beisp. 1. $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots.$

Es ist $\frac{a_{n+1}}{a_n}x = \frac{n+1}{n}x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x$. Offenbar ist $1 + \frac{1}{n}$ am größten, wenn n am kleinsten ist, also für $n = 1$; wählt man also x so, daß $2x < 1$ wird, also $x < \frac{1}{2}$, so convergirt die Reihe vom ersten Gliede an.

Beisp. 2. $S = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots.$

Es ist $\frac{a_{n+1}}{a_n}x = \left(\frac{1}{n!} : \frac{1}{(n-1)!}\right)x = \frac{x}{n}$. Hieraus folgt, daß S für jeden Werth von x convergirt; denn da n (Stellenzahl eines Gliedes) nach und nach immer größer wird, so muß $\frac{x}{n}$ einmal ein echter Bruch werden, wenn nur x, wie immer vorausgesetzt wird, eine endliche reelle Zahl ist; dann bleibt aber auch $\frac{x}{n}$ für steigende Werthe von n ein echter Bruch und wird für $n = \infty$ zu Null. Soll aber S schon vom ersten Gliede an convergiren, so muß, weil $\frac{x}{n}$ am größten für $n = 1$ ist, $x < 1$ gewählt werden.

Beisp. 3. $S = 1 - 20x + 300x^2 - 4000x^3 + 50000x^4 - + \ldots.$

Es ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\cdot 10^n}{n\cdot 10^{n-1}} x = \left(1+\frac{1}{n}\right) 10x$; folglich convergirt S vom ersten Gliede an, wenn $x < \frac{1}{20}$ ist.

Beisp. 4. $S = 1 + 2!x + 3!x^2 + 4!x^3 + 5!x^4 + + \ldots.$ Diese Reihe divergirt für jeden Werth von x (außer Null).

Beisp. 5. $S = \frac{2}{3} + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{6}{7}x^4 + \ldots.$

Es ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} x = \frac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3} x = \left(1 + \frac{1}{n^2+4n+3}\right) x$. Hieraus folgt, daß S vom ersten Gliede an convergirt, wenn $x < \frac{8}{9}$ ist.

Beisp. 6. Für welche Werthe von x convergirt die Reihe
$$S = 1\cdot 2 + 2\cdot 3x + 3\cdot 4x^2 + 4\cdot 5x^3 + 5\cdot 6x^4 + 6\cdot 7x^5 + \ldots$$
vom zehnten Gliede an, für welche Werthe vom vierten Gliede an und für welche vom ersten Gliede an?

Auflös. Es ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n}$. Für steigende Werthe von n nimmt daher $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ fortwährend ab, und dieser Quotient ist also, wenn die Reihe vom zehnten Gliede an convergiren soll, am größten für $n = 10$; wenn sie aber vom vierten oder ersten Gliede an convergiren soll, am größten resp. für $n = 4$ oder $n = 1$. Aus $\frac{n+2}{n} x < 1$ folgt $x < \frac{n}{n+2}$; daher findet man:

für $x < \frac{5}{6}$ convergirt die Reihe vom zehnten Gliede an,
„ $x < \frac{2}{3}$ „ „ „ „ vierten „ „
„ $x < \frac{1}{3}$ „ „ „ „ ersten „ „.

Beisp. 7. Dieselbe Aufgabe für die Reihe
$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{x}{2\cdot 3} + \frac{x^2}{3\cdot 4} + \frac{x^3}{4\cdot 5} + \frac{x^4}{5\cdot 6} + \frac{x^5}{6\cdot 7} + \ldots.$$

Auflös. Bei dieser Reihe wird $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ am größten für $n = \infty$ und hat dann den Werth 1. Hieraus folgt aber, daß die Reihe, wenn sie überhaupt convergirt — und dies findet für $x < 1$ immer Statt — auch stets vom ersten Gliede an convergirt.

§. 199.
Lehrsätze.

I. Sind alle Coefficienten einer Reihe

$$S = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots . + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + \ldots .$$

endliche reelle Zahlen, so kann man x immer so klein wählen, daß der absolute Werth irgend eines Gliedes, etwa $a_{n-1} \cdot x^{n-1}$, größer wird, als die beliebig vielfache (mfache) Summe der absoluten Werthe aller nachfolgenden Glieder.

Beweis. Da alle Coefficienten endliche Zahlen sein sollen, so muß der Coefficient eines der Glieder, welche auf $a_{n-1} x^{n-1}$ folgen, der größte von allen sein, oder wenigstens nicht kleiner als die anderen. Dieser Coefficient sei A. Kann nun x immer so bestimmt werden, daß (x, A und a_{n-1} absolut genommen)

1) $a_{n-1} x^{n-1} > m(Ax^n + Ax^{n+1} + Ax^{n+2} + Ax^{n+3} + \ldots .)$

wird, so ist auch die im Lehrsatze enthaltene Behauptung richtig. Aus 1) folgt aber:

$a_{n-1} x^{n-1} > mAx^n [1 + x + x^2 + x^3 + \ldots .]$ oder

2) $a_{n-1} > mAx [1 + x + x^2 + x^3 + \ldots .]$.

Denkt man sich nun für x einen echten Bruch gewählt, so ist $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots . = \frac{1}{1-x}$ (§. 193.); daher folgt aus 2):

$$a_{n-1} > mA \frac{x}{1-x} \text{ oder } a_{n-1} - x \cdot a_{n-1} > mAx.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$x < \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + mA}.$$

Man kann auch $x = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + mA}$ wählen, mit Ausnahme des Falles, wenn alle auf $a_{n-1} x^{n-1}$ folgenden Glieder denselben Coefficienten (A) haben.

Beispiel 1. $S = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{6}x^5 + \ldots .$

Soll das dritte Glied größer werden, als die zehnfache Summe der nachfolgenden Glieder, so ist $A = \frac{1}{4}$, folglich $x \overset{=}{<} \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{1}{4}}$ oder $x \overset{=}{<} \frac{2}{17}$.

Beispiel 2. $S = 2x + 2x^3 + 2x^5 + 2x^7 + 2x^9 + \ldots .$ Es soll das erste Glied größer werden, als die achtfache Summe aller übrigen Glieder.

Auflös. Sondert man 2x ab, so folgt:

$$S = 2x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots .); \text{ hieraus } x^2 < \frac{1}{1+8}; \; x < \frac{1}{3}.$$

Setzt man $x = \frac{1}{3}$, so wird das erste Glied der achtfachen Summe aller übrigen gleich.

Beispiel 3. $S = \frac{x}{2} + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{4}{5}x^4 + \frac{5}{6}x^5 + \frac{6}{7}x^6 - - + \ldots$

Es soll der absolute Werth des dritten Gliedes größer werden, als die tausendfache absolute Summe aller nachfolgenden Glieder.

Auflös. Hier ist $A = 1$, nämlich gleich dem Coefficienten des letzten Gliedes. Man erhält $x \overset{=}{<} \frac{3}{4003}$.

Beispiel 4. Gegeben sind die beiden Reihen:

$$S = \frac{1}{6} + \frac{2}{11}x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{4}{21}x^3 + \frac{5}{26}x^4 + \ldots$$

$$\text{und } R = \frac{1}{4} + \frac{2}{9}x + \frac{3}{14}x^2 + \frac{4}{19}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \ldots;$$

für welche Werthe von x wird in diesen Reihen das zweite Glied größer als die zwölffache Summe aller folgenden Glieder?

Auflös. In der Reihe S für $x \overset{=}{<} \frac{5}{71}$, in der Reihe R für $x \overset{=}{<} \frac{7}{88}$.

Anmerkung. Je kleiner x gewählt wird, um so größer kann m sein. Hieraus folgt, daß der absolute Werth eines Gliedes (px^{n-1}) im Verhältniß zur absoluten Summe aller nachfolgenden Glieder dadurch immer größer und größer gemacht werden kann, daß man x immer kleiner und kleiner wählt.

II. Sind alle Coefficienten einer nach den steigenden Potenzen eines Buchstaben (x) geordneten Reihe endliche Zahlen, so kann man x immer so klein wählen, daß das Vorzeichen des ersten Gliedes über das Vorzeichen des Zahlenwerthes der ganzen Reihe entscheidet, daß also die Summe aller Glieder positiv oder negativ wird, je nachdem das erste Glied positiv oder negativ ist.

Beweis. Aus I. folgt, daß man x so klein wählen kann, daß der absolute Werth des ersten Gliedes größer wird, als der absolute Werth der Summe aller übrigen Glieder. Bei der Addition des ersten Gliedes zu der Summe der übrigen Glieder überwiegt dann das Vorzeichen des ersten Gliedes, wodurch der Satz bewiesen ist.

Beispiel 1. $S = -2x^2 + x^3 + 2x^4 + x^5 + 2x^6 + x^7 + \ldots$

Wählt man $x \overset{=}{<} \frac{2}{2+2}$, also $x \overset{=}{<} \frac{1}{2}$, so wird S eine negative Zahl.

Beispiel 2. $S = \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{4}{5}x^3 - \frac{5}{6}x^4 + \frac{6}{7}x^5 - + \ldots$

Wählt man $x \overset{=}{<} \frac{2}{5}$, aber natürlich $x > 0$, so ist S eine positive Zahl.

Beispiel 3. $S = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{5}x^4 - \ldots\ldots$

Für $x \overset{=}{<} \frac{2}{3}$ ist S eine positive Zahl.

Beispiel 4. Es sei die endliche Reihe gegeben:

$$S = k - 6k^2 - 15k^3 - 20k^4 - 15k^5 - 6k^6 - k^7;$$

für welche Werthe von k ist S positiv?

Auflös. $k \overset{=}{<} \frac{1}{21}$, aber natürlich $k > 0$. Setzt man für k einen Werth zwischen den Grenzen 0 und $-\frac{1}{21}$, so wird S negativ, weil das erste Glied negativ wird.

Stetigkeit der Functionen; das Wachsen und Fallen derselben. Maxima und Minima.

§. 200.

Stetigkeit der Functionen. Abhängigkeit der Veränderung einer Function von ihrer Ableitung.

Bezeichnet φx eine Function von x, und will man untersuchen, welchen Einfluß eine Aenderung der Veränderlichen x auf φx ausübt, so kann man $\varphi(x+k)$, d. h. das, was aus φx wird, wenn man $x+k$ statt x setzt, also x um k sich ändern läßt, in eine nach den Potenzen von k fortlaufende Reihe zu verwandeln suchen. Diese Reihe, so fern sie überhaupt möglich ist, muß zunächst die Eigenschaft haben, daß ihr erstes Glied φx selbst ist; denn setzt man

$$\varphi(x+k) = A + B \cdot k + Ck^2 + Dk^3 + \ldots,$$

so soll doch diese Gleichung für *jeden* Werth von k richtig sein, also auch für $k = 0$. Setzt man aber $k = 0$, so entsteht

$$\varphi x = A.$$

Der Coefficient des 2ten Gliedes, also B, von welchem, wie man sehen wird, die Beantwortung sehr wichtiger Fragen abhängt, wird *die Ableitung der Function* φx genannt und durch $\varphi' x$ bezeichnet. Wir haben sonach jetzt die Reihe:

$$1)\quad \varphi(x+k) = \varphi x + \varphi' x \cdot k + C \cdot k^2 + Dk^3 + \ldots\ldots$$

Im Allgemeinen sind alle Coefficienten dieser Reihe, welche sowohl unendlich, als auch endlich werden kann, Functionen von x, wie das erste Glied; für bestimmte Werthe von x nehmen also diese Coefficienten entweder auch bestimmte reelle Zahlenwerthe an, oder sie werden imaginär, oder auch unendlich. Die letzten beiden Fälle schließen wir aus unserer Untersuchung aus; *wir setzen also immer Functionen voraus, für welche alle Coefficienten der vor-*

stehenden Reihe für jeden bestimmten reellen Werth von x auch bestimmte reelle Zahlen sind.

Die Aenderung der Function φx, wenn x in $x + k$ übergeht, ist offenbar $\varphi(x+k) - \varphi x$; aber aus 1) folgt:

2) $\varphi(x+k) - \varphi x = \varphi' x \cdot k + C \cdot k^2 + Dk^3 + Ek^4 + \ldots\ldots$

Da nun vorausgesetzt wurde, daß die Reihe rechts lauter endliche reelle Coefficienten hat, so kann man k immer so klein wählen, daß der absolute Werth des ersten Gliedes $\varphi' x \cdot k$ größer wird, als der absolute Werth der Summe aller übrigen Glieder (§. 199., I.); und dann wird auch der Werth der ganzen Reihe positiv, oder negativ, je nachdem dieses erste Glied $\varphi' x \cdot k$ positiv, oder negativ ist (§. 199., II.). Denkt man sich nun k positiv unendlich klein (aber nicht Null), so entspricht diese Wahl von k dem angeführten Gesetze (vergl. §. 199. I. Anmerk.); folglich finden jetzt auch die eben angeführten Folgerungen Statt. Für ein unendlich kleines positives k ist aber noch:

1) $\varphi' x \cdot k$ selbst unendlich klein;

2) $\varphi' x \cdot k$ positiv oder negativ, je nachdem $\varphi' x$ positiv oder negativ ist.

Hieraus ergeben sich zwei wichtige Gesetze:

I. Hat eine Function φx die Eigenschaft, daß die Reihe, welche man erhält, wenn man $\varphi(x+k)$ in eine nach den Potenzen von k fortlaufende Reihe verwandelt, nur endliche reelle Coefficienten hat, so ändert sich φx, wenn x einen unendlich kleinen Zuwachs erhält, auch nur um eine unendlich kleine Zahl, d. h. φx ist dann eine stetige Function von x (§. 168.).

Wenn ferner x den unendlich kleinen positiven Zuwachs k erhält, so kann die stetige Function φx, indem sie in $\varphi(x+k)$ übergeht, entweder wachsen, oder fallen (S. 337. unten); es hängt dies davon ab, ob $\varphi(x+k) - \varphi x$ positiv, oder negativ ist. Aber so eben haben wir gefunden, daß $\varphi(x+k) - \varphi x$ positiv oder negativ ist, je nachdem $\varphi' x$ positiv oder negativ ist, und weil $\varphi' x$ im Allgemeinen wieder eine Function von x ist, so wird der bestimmte Werth, welchen man dem x beilegt, hier von Einfluß sein. Legt man also der Veränderlichen x nach und nach alle stetig auf einander folgenden Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ bei, so ist x selbst im fortwährenden Wachsen begriffen; φx wird sich dann auch fortwährend ändern, aber nicht nothwendig immer wachsen oder immer fallen; sondern φx ist für diejenigen Werthe von x im Wachsen begriffen, für welche $\varphi' x$ positiv wird, hingegen für diejenigen Werthe von x im Fallen, für welche $\varphi' x$ negativ wird. Wir haben also das zweite Gesetz:

II. Jede stetige Function φx ist, wenn x einen unendlich kleinen positiven Zuwachs erhält, für diejenigen Werthe von x im Wachsen (Steigen) begriffen, für welche ihre Ableitung positiv ist; hingegen ist φx für diejenigen Werthe von x im Fallen (Abnehmen) begriffen, für welche ihre Ableitung negativ ist.

Ein Beispiel mag dies erläutern. Es sei

$$\varphi x = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3.$$

Daher $\varphi(x+k) = \frac{1}{4}(x+k)^3 - \frac{1}{4}(x+k)^2 - 2(x+k) + 3$; geordnet:

$$\varphi(x+k) = \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3\right) + \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2\right)k + \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right)k^2 + \frac{1}{4}k^3.$$

Es ist also: $\varphi' x = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2.$

Da alle Coefficienten in $\varphi(x+k)$ für jeden endlichen Werth von x auch endliche Zahlen sind, so ist φx eine stetige Function von x.

Ferner ist $\varphi' x = \frac{3}{4}(x-2)\left(x + \frac{4}{3}\right)$; folglich ist $\varphi' x$ positiv für jeden Werth von x, welcher $< -\frac{4}{3}$ oder $> +2$ ist, hingegen negativ für alle Werthe von x zwischen $-\frac{4}{3}$ und $+2$.

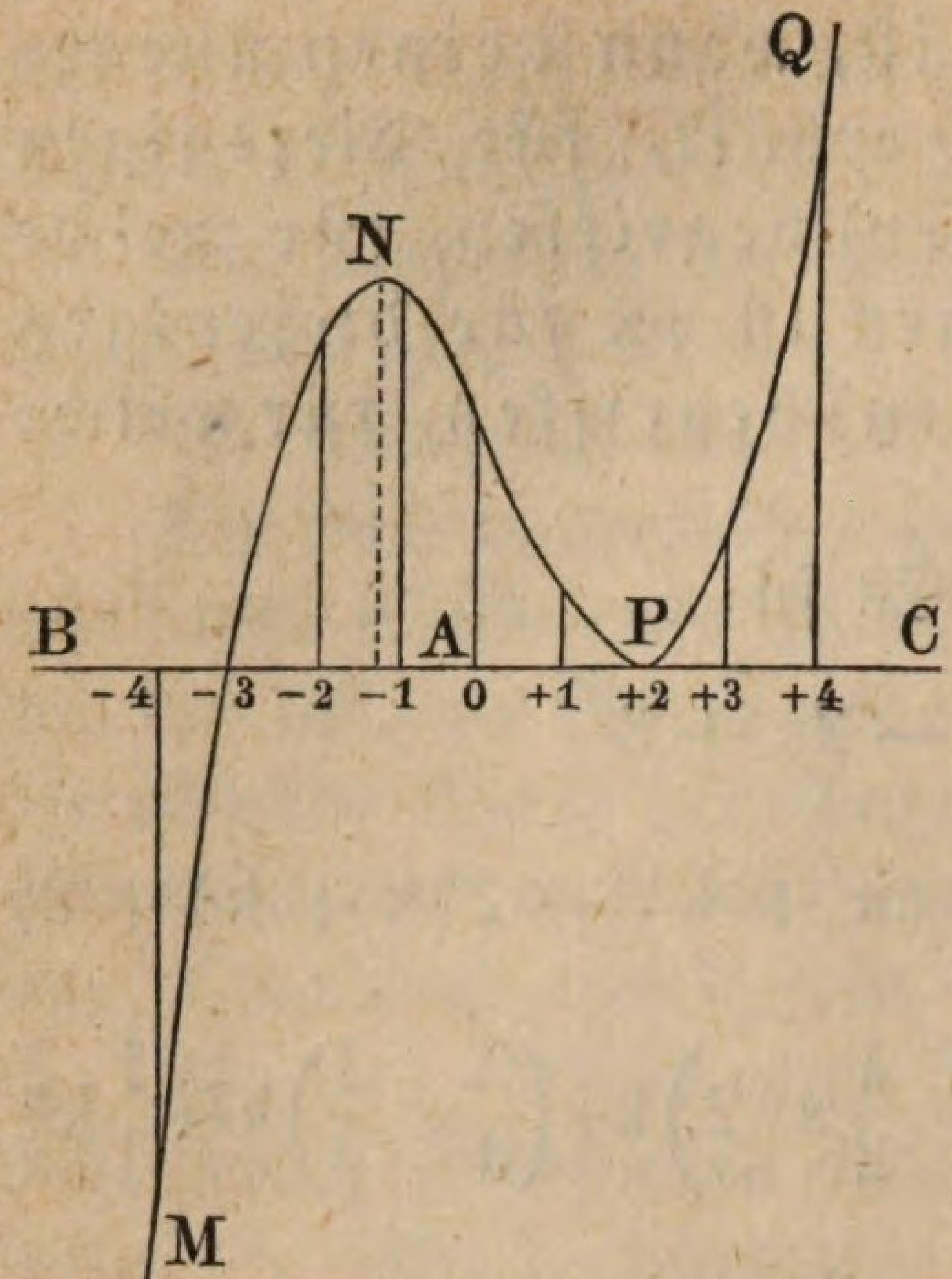
x	φx
$-\infty$	$-\infty$
⋮	⋮
-5	$-24\frac{1}{2}$
-4	$-6\frac{1}{2}$
-3	0
-2	$+4$
$-\frac{5}{3}$	$+4\frac{13}{27}$
$-\frac{4}{3}$	$+4\frac{17}{27}$
-1	$+4\frac{1}{2}$
0	$+3$
$+1$	$+1$
$+\frac{3}{2}$	$+\frac{9}{32}$
$+2$	0
$+\frac{5}{2}$	$+\frac{11}{32}$
$+3$	$+1\frac{1}{2}$
$+4$	$+7$
⋮	⋮
$+\infty$	$+\infty$

Hieraus ergiebt sich (wie man zu sagen pflegt) folgender Gang der Function φx, erläutert durch die nebenstehenden Werthe von φx. Für $x = -\infty$ ist auch $\varphi x = -\infty$. Wächst x, so wächst die Function, bis $x = -\frac{4}{3}$ ist. Es wird dann $\varphi(-\frac{4}{3}) = +4\frac{17}{27}$. Wächst x weiter, so fällt φx bis $x = +2$; es ist $\varphi(2) = 0$. Wächst x noch weiter, so wächst wieder φx bis $x = +\infty$, für welchen Werth von x auch $\varphi x = +\infty$ wird. Um φx für $x = \mp\infty$ zu finden, setze man $\mp\frac{1}{z}$ statt x, so ist:

$$\varphi\left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{1+z-8z^2-12z^3}{4z^3},$$

$$\varphi\left(+\frac{1}{z}\right) = +\frac{1-z-8z^2+12z^3}{4z^3}.$$

Man lasse jetzt z immer kleiner und kleiner werden bis zur Grenze 0.



Anmerkung. Am deutlichsten läßt sich der Gang einer Function erkennen, wenn man zusammengehörige Werthe von x und φx als Abscisse und Ordinate einer Kurve ansieht.

Es sei BC die Abscissenlinie, A der Nullpunkt oder Anfangspunkt der Abscissen. Man trägt von A aus auf BC alle positiven Werthe von x nach rechts, alle negativen nach links hin ab, errichtet im Endpunkt jeder Abscisse x einen Perpendikel (die Ordinate) auf BC nach oben, oder unten, je nachdem φx positiv, oder negativ ist, und giebt der Ordinate die dem Werthe von φx entsprechende Länge. Die Endpunkte aller Ordinaten sind stetig auf einander folgende Punkte, die man als auf einander folgende Punkte einer in der Regel krummen Linie (Curve) ansieht. Diese Curve MNPQ versinnlicht den Gang der oben betrachteten Function φx. Von links aus gerechnet (—∞) steigt die Curve bis N (Abscisse $= -\frac{4}{3}$), dann fällt sie von N bis P (Abscisse $= +2$) und von P nach Q hin steigt sie wieder ohne Aufhören; eben so die Function φx.

§. 201.

Ableitungen der rationalen ganzen Functionen von x. Diese Functionen sind stetige.

Es sei $\varphi x = ax^n$, so folgt $\varphi(x+k) = a(x+k)^n$; daher nach dem binomischen Lehrsatze:

$$\varphi(x+k) = ax^n + nax^{n-1} \cdot k + n_2 ax^{n-2} \cdot k^2 + \ldots\ldots + a \cdot k^n.$$

Da alle Coefficienten endliche Zahlen sind, so ist ax^n eine stetige Function von x, und weil wir den Coefficienten des mit k in der ersten Potenz behafteten Gliedes der Reihe für $\varphi(x+k)$ die Ableitung von φx nannten, so ist $\varphi' x = nax^{n-1}$, d. h. man erhält die Ableitung von ax^n, wenn man den Exponenten n als Factor vor a setzt und in seine Stelle den um 1 kleineren Exponenten hinschreibt.

z. B. $\varphi x = 3x^2$, $\varphi' x = 6x$; $\varphi x = \frac{3}{4}x^6$, $\varphi' x = \frac{9}{2}x^5$;
$\varphi x = x$, $\varphi' x = 1$; $\varphi x = x^{12}$, $\varphi' x = 12x^{11}$; u. s. w.

Es sei jetzt $\varphi x = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + px^2 + qx + r$, so folgt:

$\varphi(x+k) = a(x+k)^n + b(x+k)^{n-1} + c(x+k)^{n-2} + \ldots + p(x+k)^2 + q(x+k) + r.$
Löst man die Klammern auf und ordnet nach den Potenzen von k, so wird das erste, von k unabhängige Glied

$$= ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + px^2 + qx + r,$$

d. h. gleich φx, wie schon allgemein bewiesen ist, und man erhält:
$\varphi(x+k) = \varphi x + [nax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2} + (n-2)cx^{n-3} + \ldots + 2px + q]\,k + \ldots$
Man sieht sofort ein, daß alle Coefficienten endliche reelle Zahlen sind; folglich ist φx eine stetige Function von x, d. h. jede rationale ganze Function von x ist eine stetige Function.

Ferner entnimmt man aus der obigen Gleichung:
$\varphi' x = nax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2} + (n-2)cx^{n-3} + \ldots + 2px + q,$
d. h. man erhält die Ableitung einer ganzen Function von x, wenn man die Ableitung jedes Gliedes bildet (nach der oben angegebenen Regel). Da in der Ableitung r fehlt, so sagt man noch: die Ableitung einer Constanten ist Null. z. B.

$$\varphi x = 3x^3 - 2x^2 + x - 1; \quad \varphi' x = 9x^2 - 4x + 1.$$
$$\varphi x = 8x^5 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{5}{6}x^3; \quad \varphi' x = 40x^4 - x^3 + \tfrac{5}{2}x^2.$$

Da die Ableitung einer Function von x im Allgemeinen wieder eine Function von x ist, so kann man auch ihre Ableitung bilden; d. h. man kann $\varphi'(x+k)$ in eine nach den Potenzen von k fortlaufende Reihe verwandeln, in welcher dann der Coefficient des 2ten (k enthaltenden) Gliedes die Ableitung von $\varphi' x$ ist.

Man nennt die Ableitung von $\varphi' x$ die zweite Ableitung von φx und bezeichnet sie durch $\varphi'' x$; die Ableitung von $\varphi'' x$ heißt die dritte Ableitung von φx und wird durch $\varphi''' x$ bezeichnet, u. s. w.; $\varphi' x$ heißt daher auch die erste Ableitung von φx. Jede ganze rationale Function von x vom nten Grade hat nur n Ableitungen, weil bei jeder Ableitung der Grad der Function um 1 sinkt, folglich die nte Ableitung vom $n-n$ten, d. h. 0ten Grade, also constant ist; daher sind alle weiteren Ableitungen Null.

Beispiele.

1) $\varphi x = 3x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x - 1$, so folgt:
$\varphi' x = 12x^3 - 2x^2 + 3; \; \varphi'' x = 36x^2 - 4x; \; \varphi''' x = 72x - 4; \; \varphi'''' x = 72.$

2) $\varphi x = ax^2 + bx + c$, so folgt $\varphi' x = 2ax + b$, $\varphi'' x = 2a$.

3) $\varphi x = ax$, so ist $\varphi' x = a$; $\varphi'' x = 0$.

4) $\varphi x = x^6 - \frac{3}{10}x^5 + x^2 - 3x + 9$; so folgt:
$\varphi' x = 6x^5 - \frac{3}{2}x^4 + 2x - 3; \; \varphi'' x = 30x^4 - 6x^3 + 2; \; \varphi''' x = 120x^3 - 18x^2;$
$\varphi^4 x = 360x^2 - 36x, \; \varphi^5 x = 720x - 36; \; \varphi^6 x = 720.$

5) $\varphi x = \frac{1}{6}x^9 - 3x^4 + 3$; wie groß $\varphi''' x$? Antw. $84x^6 - 72x$.

6) $\varphi x = ax^n + bx^{n-4} + c$; wie groß $\varphi^n x$? Antw. $n!\,a$.

7) $\varphi x = \frac{1 - 2x + x^4}{12}$; wie groß $\varphi''x$? Antw. x^2.

8) $\varphi x = \frac{9 - 3x + x^2 - x^3}{6}$; wie groß $\varphi''x$? Antw. $\frac{1}{3} - x$.

9) $\varphi x = 3 - 4x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^6$; wie groß $\varphi'''x$? Antw. $-2 + 120x^3$.

§. 202.

Theorie der Maxima und Minima.

Durchläuft x alle stetig auf einander folgenden Werthe der reellen Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ (so daß x im fortwährenden Wachsen gedacht wird), so wächst die stetige Function φx für alle die Werthe von x, für welche $\varphi'x$ positiv ist, und fällt für die Werthe von x, welche $\varphi'x$ negativ machen. Geht also bei dem Fortschreiten von x, $\varphi'x$ aus + in — über, so geht die Function φx aus Steigen in Fallen über; geht aber $\varphi'x$ aus — in + über, so geht φx aus Fallen in Steigen über. Da aber $\varphi'x$ eine stetige Function von x ist (weil φx eine solche sein soll und $\varphi'x$ ein Coefficient der Reihe für $\varphi(x + k)$ ist), so kann der Uebergang aus + in — oder aus — in + nur für einen solchen Werth von x Statt finden, für welchen $\varphi'x$ Null ist. Geht also $\varphi'x$ für einen Werth von x, z. B. für $x = a$, durch Null, so hört φx für diesen Werth von x entweder auf zu steigen und fängt zu fallen an, oder hört auf zu fallen und fängt zu steigen an. Im ersten Falle sagt man: φx ist für $x = a$ ein Maximum geworden, im zweiten: ein Minimum. Diese Begriffe sind also so aufzufassen: φx ist für $x = a$ ein Maximum, wenn durch eine unendlich kleine Verminderung oder Vermehrung dieses bestimmten Werthes (a) von x beide Mal φx kleiner wird, als $\varphi(a)$ ist, und φx ist für $x = a$ ein Minimum, wenn durch eine unendlich kleine Verminderung oder Vermehrung dieses bestimmten Werthes (a) von x beide Mal φx größer wird, als $\varphi(a)$ ist.

Es kann sonach jeder Werth von x, für welchen $\varphi'x = 0$ ist, die stetige Function φx zu einem Maximum oder Minimum machen, und das Maximum findet wirklich Statt, wenn die erste Ableitung $\varphi'x$ dadurch 0 wird, daß sie aus + in — übergeht, also fällt; das Minimum findet Statt, wenn die Ableitung $\varphi'x$ dadurch 0 wird, daß sie aus — in + übergeht, also steigt. Nun fällt aber $\varphi'x$, wie jede stetige Function, für solche Werthe von x, welche ihre Ableitung, d. h. $\varphi''x$, negativ machen, und sie steigt für alle Werthe von x, welche $\varphi''x$ positiv machen. Anstattt also zu untersuchen, ob $\varphi'x$ zu Null wird durch den Uebergang aus + in —, oder durch

den Uebergang aus — in +, und hieraus zu entnehmen, ob ein Maximum oder Minimum Statt findet, ist es bequemer, zu untersuchen, ob φ''x für den Werth von x, welcher φ'x zu Null macht, negativ, oder positiv wird. Im ersten Falle findet ein Maximum, im zweiten ein Minimum Statt. Das Gesagte läßt sich auf folgende Weise übersichtlich zusammenstellen:

φx	φ'x	φ''x
steigt	positiv	
fällt	negativ	
Maximum bei dem Uebergange aus Steigen in Fallen.	Null bei dem Uebergange aus + in —; woraus folgt: φ'x fällt.	negativ.
Minimum bei dem Uebergange aus Fallen in Steigen.	Null bei dem Uebergange aus — in +; woraus folgt: φ'x steigt.	positiv.

Nur, wenn der Werth von x, für welchen φ'x gleich Null ist, auch φ''x zu Null macht, ist die erste Art der Untersuchung anzuwenden; es braucht dann φx nicht nothwendig für diesen Werth von x ein Maximum oder Minimum zu sein. Wir haben sonach das Gesetz gefunden: Ein Werth von x, welcher die erste Ableitung einer stetigen Function von x zu Null macht, macht die Function selbst zu einem Maximum, oder Minimum, je nachdem für diesen Werth von x die zweite Ableitung negativ, oder positiv ist.

Ist also φx gegeben, so sucht man φ'x und φ''x, setzt $\varphi'x = 0$ und entwickelt x. Den gefundenen Werth von x setzt man in φ''x ein. Wird φ''x positiv, so ist φx für diesen Werth von x ein Minimum; wird φ''x negativ, ein Maximum.

Anmerk. Besonders ist hervorzuheben, daß der Werth, den eine Function φx annimmt, wenn sie ein Maximum oder Minimum wird, durchaus nicht der überhaupt größte oder kleinste Werth zu sein braucht, den sie annehmen kann. Denn ist φx für $x = a$ ein Maximum, so heißt das nur: φ(a) ist größer als die beiden anliegenden Werthe von φx, d. h. es ist $\varphi(a) > \varphi(a + k)$ und zugleich $\varphi(a) > \varphi(a - k)$ für einen unendlich kleinen Werth von k. Aehnlich ist bei einem Minimum zu urtheilen. (Man vergleiche hiermit die folgenden Beispiele 5, 8 und 9.)

Beisp. 1. Für welchen Werth von x ist $\varphi x = x^2 - 6x + 10$ ein Maximum oder Minimum?

Auflös. $\varphi' x = 2x - 6$; $\varphi'' x = +2$. Aus $\varphi' x = 0$ folgt $x = 3$, und weil $\varphi'' x$ für jeden Werth von x positiv ist, so ist $\varphi(3)$ ein Minimum. Man erhält $\varphi(3) = 1$. Da ein Uebergang der Function φx aus Fallen in Steigen nur einmal, bei $x = 3$, Statt findet, ein Uebergang aus Steigen in Fallen gar nicht, so ist 1 der kleinste Werth, den $x^2 - 6x + 10$ überhaupt für reelle Werthe von x annehmen kann. Setzt man also $x^2 - 6x + 10$ einer Zahl gleich, welche kleiner als 1 ist, so wird x imaginär.

Beisp. 2. Für welchen Werth von x ist

$$\varphi x = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$$

ein Maximum oder Minimum?

Auflös. $\varphi' x = 3x^2 - 18x + 15$; $\varphi'' x = 6x - 18$. Aus $\varphi' x = 0$ folgt $x = 5$ und $x = 1$. Nun ist $\varphi''(5) = +12$, $\varphi''(1) = -12$; folglich ist φx für $x = 5$ ein Minimum, für $x = 1$ ein Maximum. Man erhält $\varphi(5) = -22$ als Minimum und $\varphi(1) = +10$ als Maximum.

Beisp. 3. Für welchen Werth von x ist

$$\varphi x = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$$

ein Maximum oder Minimum?

Auflös. $\varphi' x = 3x^2 - 6x + 3$, $\varphi'' x = 6x - 6$. Aus $\varphi' x = 0$ folgt $x = +1$. Hier wird nun die 2te Ableitung für $x = 1$ ebenfalls zu Null; man muß also besonders untersuchen, ob $\varphi(1)$ ein Maximum oder Minimum ist. Setzt man aber $1 + k$ statt x, so folgt, wenn man nach den Potenzen von k ordnet:

$$\varphi(1 + k) = 3 + k^3.$$

Setzt man nun für k eine unendlich kleine positive Zahl, so erhält man mehr als 3; setzt man eine unendlich kleine negative Zahl, weniger als 3; daher ist $\varphi(1)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum, und φx hat einen solchen ausgezeichneten Werth überhaupt nicht.

Beisp. 4. Für welchen Werth von x ist

$$fx = 2 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5$$

ein Maximum oder Minimum?

Auflös. $f'x = -x^2 + 2x^3 - x^4$; $f''x = -2x + 6x^2 - 4x^3$. Aus $f'x = 0$ folgt $x = 0$ oder $x = 1$; es ist aber $f''(0) = 0$ und $f''(1) = 0$. Eine weitere Untersuchung zeigt, daß fx weder ein Maximum, noch ein Minimum werden kann.

Beisp. 5. Ist $\varphi x = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$, so ist $\varphi(-\frac{4}{3}) = 4\frac{17}{27}$ ein Maximum, hingegen $\varphi(2) = 0$ ein Minimum. In

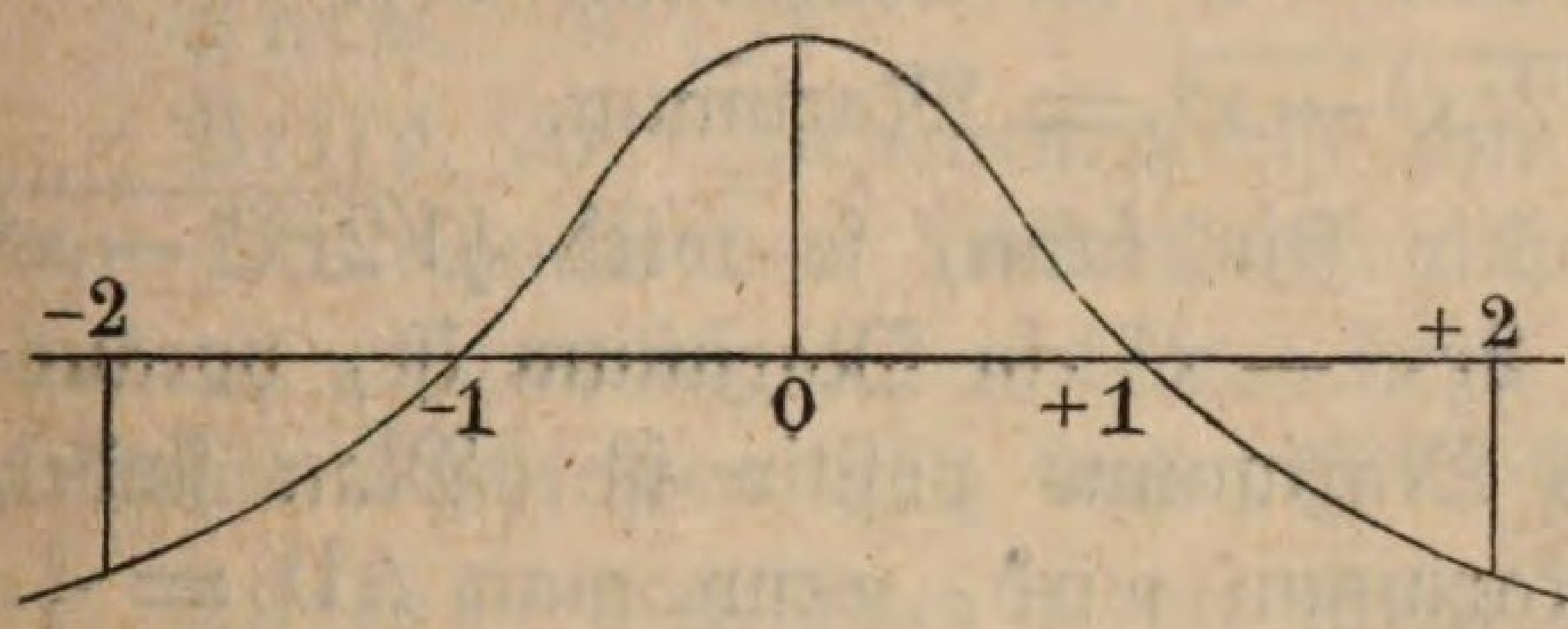
der Anmerkung zu §. 200. findet man die Kurve, welche φx versinnlicht. In der Figur zeigt der Punkt N das Maximum, der Punkt P das Minimum.

Beisp. 6. Für welche Werthe von x ist $\varphi x = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ ein Maximum oder Minimum?

Auflös. Durch gewöhnliche Division findet man

$$\varphi x = -1 + \frac{2}{1 + x^2}.$$

Da $1 + x^2$ nicht 0 werden kann, so ist φx eine stetige Function und wird ein Maximum oder Minimum, je nachdem $1 + x^2$ ein Minimum oder Maximum ist. Man findet, daß φx für $x = 0$ ein Maximum ist, und zwar ist $\varphi(0) = +1$. Die Figur zeigt den Gang der Function und das Maximum. Der Theil der Kurve rechts vom Nullpunkt ist dem Theile links congruent, weil $\varphi x = \varphi(-x)$ ist; ferner ist $\varphi(\pm 1) = 0$, $\varphi(\pm \infty) = -1$.



Beisp. 7. Gegeben: $\varphi x = x^3 - x^2 - x - 1$. Es ist $\varphi(1) = -2$ ein Minimum und $\varphi(-\frac{1}{3}) = -\frac{22}{27}$ ein Maximum.

Beisp. 8. Gegeben $\varphi x = \sqrt{x^2 - 10x + 30}$. Da $x^2 - 10x + 30$ für jeden Werth von x positiv ist, so wird φx, wenn man die Quadratwurzel positiv nimmt, ein Maximum oder Minimum, je nachdem $x^2 - 10x + 30$ ein Maximum oder Minimum ist; nimmt man die Wurzel negativ, so findet das Umgekehrte Statt. Man findet: $\varphi(5) = +\sqrt{5}$ ist ein Minimum, aber $\varphi(5) = -\sqrt{5}$ ein Maximum.

Beisp. 9. Gegeben $\varphi x = \frac{4}{x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 12x^2 + 4}$. Da der Zähler constant ist, so wird φx ein Maximum oder Minimum, je nachdem der Nenner ein Minimum oder Maximum wird. Man findet: $\varphi(0) = +1$ ist ein Minimum, $\varphi(2) = -\frac{3}{13}$ ein Maximum und $\varphi(-3) = -\frac{4}{59}$ auch ein Maximum.

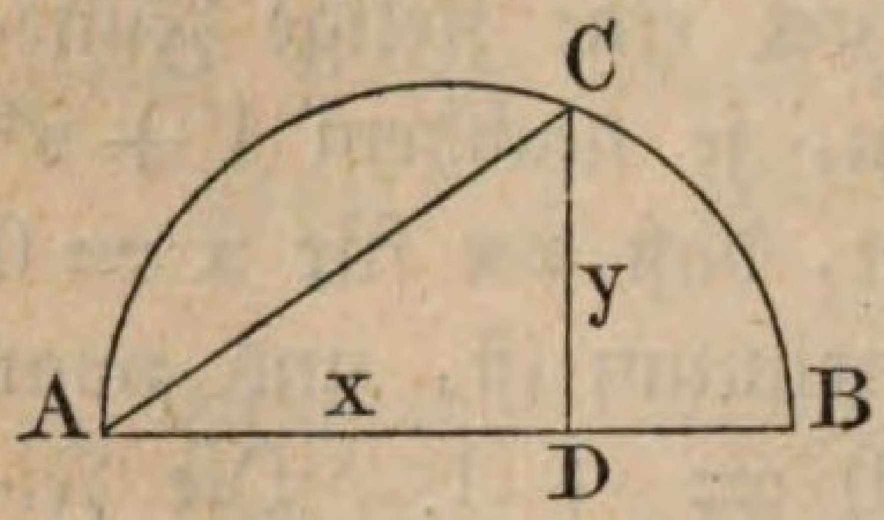
Beisp. 10. Jemand will ein Stück einer Wiese durch einen 200 Ruthen langen Zaun begrenzen. Das eingezäunte Stück soll ein rechtwinkliges Viereck sein; wie lang und wie breit muß es gemacht werden, wenn der eingeschlossene Raum möglichst groß sein soll?

Auflös. Sind x und y die Seiten des Rechtecks, so ist 1) $x + y = 100$; 2) $xy =$ Maximum. Setzt man y aus 1) in

2), so folgt $x(100-x)=$ Maximum. Ist aber $\varphi x = 100x - x^2$, so folgt $\varphi' x = 100 - 2x$, $\varphi'' x = -2$. Aus $\varphi' x = 0$, folgt $x = 50$, und weil $\varphi'' x$ immer negativ ist, so ist $\varphi(50)$ ein Maximum. Das Rechteck muß 50 Ruthen lang und breit werden, also ein Quadrat sein.

Beisp. 11. Der Halbkreis über AB ist gegeben; man soll die Sehne AC so ziehen, daß, wenn $CD \perp AB$ gefällt wird, der Inhalt des Dreiecks ACD ein Maximum ist.

Auflös. Der Radius sei r, $AD = x$, $CD = y$; dann ist

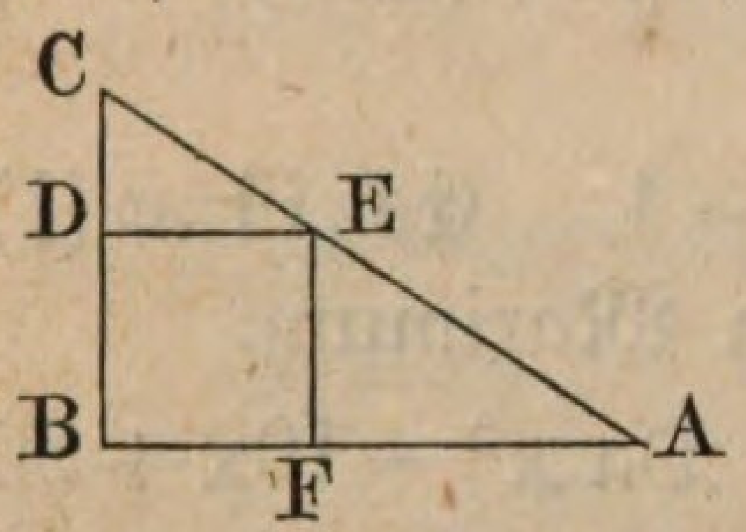


1) $\frac{1}{2}xy =$ Maximum; 2) $x:y = y:2r-x$. Setzt man y aus 2) in 1) ein, so folgt:

$$\tfrac{1}{2}x \cdot \sqrt{2rx - x^2} = \text{Maximum oder}$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2rx^3 - x^4} = \text{Maximum}.$$

Da hier die Wurzel nur positiv sein kann, so wird $\frac{1}{2}\sqrt{2rx^3 - x^4}$ ein Maximum, wenn $\varphi x = 2rx^3 - x^4$ ein Maximum ist, vorausgesetzt, daß der Werth dieses Maximums positiv ist. Man findet, daß das Dreieck ACD ein Maximum wird, wenn man $AD = \frac{3}{2}r$ macht.



Beisp. 12. In welchem Falle wird ein in das rechtwinklige Dreieck ABC eingeschriebenes Rechteck BDEF ein Maximum?

Antw. Wenn F der Mittelpunkt von AB ist.

Beisp. 13. Für welchen Werth von x ist $\varphi x = x^4 - 8x^2 + 2$ ein Maximum oder Minimum?

Auflös. Man erhält zwei Minima und ein Maximum; es ist $\varphi(-2) = -14$ ein Minimum, $\varphi(0) = +2$ ein Maximum, $\varphi(+2) = -14$ ein Minimum.

Beisp. 14. Dieselbe Aufgabe für $\varphi x = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 100$.

Auflös. $\varphi(3) = 19$ ist ein Minimum, $\varphi(-2) = 144$ ein Maximum.

Beisp. 15. Dieselbe Aufgabe für $\varphi x = x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + 4$.

Auflös. Es ist $\varphi(-1) = 1\frac{2}{3}$ ein Minimum, $\varphi(0) = 4$ ein Maximum, $\varphi(3) = -41$ ein Minimum.

Beisp. 16. Dieselbe Aufgabe für $\varphi x = \dfrac{5x^2 - 40x + 92}{x^2 - 8x + 20}$.

Auflös. $\varphi(4) = 3$ ist ein Minimum. (Vergl. Beisp. 6.)

Beisp. 17. Die Zahl 12 soll so in zwei Summanden zerlegt werden, daß das Product des ersten Summanden mit dem Quadrat des zweiten ein Maximum oder Minimum wird.

Aufl. $12 \cdot 0^2 = 0$ ist ein Minimum, $4 \cdot 8^2 = 256$ ein Maximum.

Beisp. 18. Für welchen Werth von x ist der Binomial-Coefficient x_2 ein Minimum?

Antw. Für $x = \frac{1}{2}$.

Beisp. 19. Die parallelen Seiten eines Parallel-Trapezes ABCD sind AB = 20′ und CD = 5′; die Höhe ist 12′. Wie groß ist der Inhalt des größten Dreiecks, welches sich so in dieses Parallel-Trapez einzeichnen läßt, daß die eine Ecke in AB fällt, die gegenüberliegende Seite aber zwischen AB und CD, parallel mit diesen Seiten liegt und in den nicht parallelen Seiten endet?

Antw. 40 □′.

Beisp. 20. In einem Kreise zum Radius 20′ habe eine Sehne vom Mittelpunkt den Abstand 7′. Es soll das Rechteck bestimmt werden, welches sich in den kleineren zu dieser Sehne gehörigen Kreisabschnitt einschreiben läßt, und dessen Inhalt ein Maximum ist.

Auflös. Bezeichnet x die Seite des Rechtecks, welche auf der Sehne senkrecht steht, und 2y die andere Seite, so hat man

$$1)\ 2xy = \text{Maximum}$$
$$2)\ (x+7)^2 + y^2 = 400.$$

Substituirt man y aus 2) in 1), so muß

$$2x\sqrt{351 - 14x - x^2}$$

ein Maximum werden. Läßt man den constanten Factor 2 fort und setzt x unter das Wurzelzeichen, so wird

$$\varphi x = 351x^2 - 14x^3 - x^4$$

die Function von x, welche ein Maximum werden soll. Man erhält die Seiten des gesuchten Rechtecks gleich 9′ und 24′.

Anmerkung. Die vorgetragene Theorie der Maxima und Minima ist eine allgemeine; ihre Anwendung in der niederen Analysis ist aber deshalb eine beschränkte, weil hier nur die Ableitungen rationaler ganzer Functionen entwickelt worden sind. Bei einer solchen Beschränkung findet diese Theorie in manchen Fällen, namentlich bei gebrochenen und rationalen Functionen, durch die in §. 152. Anmerk. 1. behandelte Frage: „für welchen Werth eines Buchstaben bleibt ein Ausdruck, der diesen Buchstaben enthält, unverändert?“ eine Ergänzung. Auf den Zusammenhang dieser Frage mit der Theorie der Maxima und Minima soll hier so weit eingegangen werden, daß der Leser den Gegenstand weiter verfolgen kann.

Zunächst findet man, daß eine Function φx weder ein Maximum, noch ein Minimum werden kann, wenn φx nur unverändert

bleibt, wenn man x unverändert läßt. Denn wird φx etwa für $x = a$ ein Maximum, und läßt man x stetig wachsend den Werth a durchlaufen, so muß, wenigstens in der Nähe von $x = a$, φx für steigende Werthe von x, welche unter a liegen, wachsen, sobald aber x größer als a wird, fallen; daher muß φx, wenn x über a hinaus wächst, wieder dieselben Werthe annehmen, nur in umgekehrter Ordnung, welche diese Function vorher hatte, d. h. es muß, wenn auch innerhalb enger Grenzen, zu jedem Werthe von x unter a einen entsprechenden Werth von x über a geben, für welchen φx unverändert bleibt. Aehnlich ist bei einem Minimum zu urtheilen (vergl. die Fig. Seite 430.).

Aus dem Gesagten ergiebt sich nun schon der Zusammenhang jener Fragen mit der Theorie der Maxima und Minima. Um zu untersuchen, ob eine Function φx für einen bestimmten Werth von x ein Maximum oder Minimum wird, kann man zunächst die Frage beantworten: für welchen Werth von x bleibt φx unverändert? Angenommen, dies wäre der Fall, wenn man z statt x setzt, wobei z selbst eine Function von x sein muß, so ist

$$\varphi x = \varphi(z).$$

Wird nun φx für $x = a$ ein Maximum oder Minimum, so müssen in der Nähe von a zusammengehörige Werthe von x und z auf verschiedenen Seiten von a liegen, und je näher x an a rückt, desto näher muß auch z dem Werthe a kommen. Geht x in a über, so muß auch $z = a$ werden, d. h. a ist der Werth von x, für welchen $x = z$ ist, weil der bestimmte Werth $\varphi(a)$ nach der Annahme in seiner unmittelbaren Nähe keinen ihm gleichen Werth der Function φx hat. Man findet also a, wenn man $x = z$ setzt und aus dieser Gleichung x entwickelt; ergiebt sich für x ein reeller Werth, so ist dieser a. Ob ein Maximum, oder ein Minimum Statt findet, ergiebt sich aus der Untersuchung, ob $\varphi(a) > \varphi(a \pm k)$, oder $\varphi(a) < \varphi(a \pm k)$ ist; in manchen Fällen auch aus Nebenbetrachtungen, zu welchen die besondere Aufgabe veranlaßt.

Ist z für jeden Werth von x imaginär, oder doch nur für einzelne nicht stetig auf einander folgende Werthe von x reell, so findet weder ein Maximum, noch ein Minimum Statt.

Die nachfolgenden Beispiele erläutern das Gesagte; die Beispiele 3., 4. und 5. sind durch die vorgetragenen Lehren der niederen Analysis nicht auflösbar.

Beispiel 1. Für welchen Werth von x ist $\varphi x = x^2 - 6x + 1$ ein Maximum oder Minimum?

Auflös. Um zu untersuchen, für welchen Werth von x, φx unverändert bleibt, setzt man

(1) $z^2 - 6z + 1 = x^2 - 6x + 1$, woraus folgt:

$z^2 - x^2 - 6(z - x) = 0$. Durch $z - x$ gehoben:

(2) $z + x - 6 = 0$, folglich

(3) $z = 6 - x$.

Um nun zu untersuchen, für welchen Werth von x, $z = x$ ist, setzt man in (3) oder auch in (2) x statt z; dann entsteht:

$$x = 6 - x \text{ oder } x = 3.$$

Aus (3) erkennt man, daß zu jedem Werth von x unter 3 ein Werth von z über 3 gehört (und umgekehrt), für welchen φx unverändert bleibt, und daß z der 3 um so näher kommt, je näher x an 3 rückt.

Um endlich zu untersuchen, ob φx für $x = 3$ ein Maximum oder Minimum ist, setzt man $3 + k$ statt x; dann folgt:

$$\varphi(3 + k) = (3 + k)^2 - 6(3 + k) + 1 \text{ oder}$$

$$\varphi(3 + k) = -8 + k^2.$$

Da nun $\varphi(3) = -8$ ist (wenn man $k = 0$ setzt), so folgt, und zwar hier für jeden Werth von k:

$$\varphi(3) < \varphi(3 + k) \text{ und auch } \varphi(3) < \varphi(3 - k);$$

folglich ist $\varphi(3)$ ein Minimum.

Beispiel 2. Es sei $\varphi x = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$; für welchen Werth von x ist φx ein Maximum oder Minimum?

Auflös. Um zu untersuchen, für welchen Werth von x, φx unverändert bleibt, setzt man

(1) $z^3 - 3z^2 - 9z + 1 = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ oder

$z^3 - x^3 - 3(z^2 - x^2) - 9(z - x) = 0$. Durch $z - x$ gehoben:

(2) $z^2 + zx + x^2 - 3(z + x) - 9 = 0$.

Entwickelt man z aus dieser Gleichung, so folgt:

(3) $z = \frac{3 - x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{45 + 6x - 3x^2}$.

Setzt man jetzt $z = x$, so entsteht

(4) $x = \frac{3 - x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{45 + 6x - 3x^2}$ oder geordnet:

(5) $x^2 - 2x - 3 = 0$. Hieraus folgt

$$x = 3 \text{ und } x = -1.$$

In den meisten Fällen wird die Rechnung dadurch bedeutend abgekürzt, daß man unmittelbar von der Gleichung (2) zur Gleichung (5) übergeht, indem man in (3) $z = x$ setzt (also, nachdem die ursprüngliche Gleichung (1) durch $z - x$ gehoben ist). Man erhält aus (2) $3z^2 - 6z - 9 = 0$ oder $z^2 - 2z - 3 = 0$.

Um nun zu untersuchen, welcher der beiden Werthe 3 und -1 die Function φx zu einem Maximum und welcher sie zu einem Minimum macht, hat man:

$$\varphi(3 + k) = (3 + k)^3 - 3(3 + k)^2 - 9(3 + k) + 1 \text{ oder}$$

$$\varphi(3 + k) = -26 + 6k^2 + k^3.$$

Weil nun $\varphi(3) = -26$ ist und $6k^2 + k^3$ für einen unendlich kleinen positiven oder negativen Werth von k positiv ist, so ist für einen so kleinen Werth von k

$$\varphi(3) < \varphi(3+k) \text{ und auch } \varphi(3) < \varphi(3-k);$$

daher ist $\varphi(3)$ ein Minimum.

Ferner hat man eben so:

$$\varphi(-1+k) = (-1+k)^3 - 3(-1+k)^2 - 9(-1+k) + 1 \text{ oder}$$
$$\varphi(-1+k) = 6 - 6k^2 + k^3.$$

Es ist $\varphi(-1) = 6$, daher, wie oben, für einen unendlich kleinen Werth von k:

$$\varphi(-1) > \varphi(-1+k) \text{ und } \varphi(-1) > \varphi(-1-k);$$

es ist also $\varphi(-1)$ ein Maximum.

Beispiel 3. Von allen Rechtecken, welche denselben Inhalt haben, dasjenige zu finden, dessen Umfang ein Minimum ist.

Auflös. Werden die Seiten mit x und y, der Inhalt mit a^2 bezeichnet, so ist

1) $2x + 2y =$ Minimum,

2) $xy = a^2$.

Substituirt man y aus 2) in 1) und läßt den constanten Factor 2 fort, so heißt die Function, welche ein Minimum werden soll:

$$\varphi x = x + \frac{a^2}{x}.$$

Man untersucht jetzt, für welchen Werth von x, φx unverändert bleibt, und setzt:

$$z + \frac{a^2}{z} = x + \frac{a^2}{x} \text{ oder}$$

$$z - x - \frac{z-x}{zx} a^2 = 0.$$

Hebt man durch $z - x$, so entsteht $1 - \frac{a^2}{zx} = 0$, und setzt man jetzt $z = x$, so folgt:

$$1 - \frac{a^2}{x^2} = 0, \text{ also } x = a.$$

Da aus 2) sich auch $y = a$ ergiebt, so ist das gesuchte Rechteck das Quadrat vom Inhalt a^2. — Um noch zu untersuchen, ob $\varphi(a)$ ein Minimum ist, hat man

$$\varphi(a+k) = a + k + \frac{a^2}{a+k} \text{ oder nach gewöhnlicher Division:}$$

$$\varphi(a+k) = a + k + a - k - \frac{k^2}{a+k} = 2a + \frac{k^2}{a+k}.$$

Hieraus folgt aber für einen unendlich kleinen Werth von k:

$$\varphi(a) < \varphi(a+k) \text{ und auch } \varphi(a) < \varphi(a-k);$$

daher ist $\varphi(a)$ ein Minimum.

Beispiel 4. Welches von allen Rechtecken, die man in einen gegebenen Halbkreis einschreiben kann, hat den größten Umfang?

Auflös. Bezeichnet y die Seite, welche auf dem Durchmesser senkrecht steht, 2x die andere Seite und r den Radius, so hat man:

1) $4x + 2y =$ Maximum,

2) $x^2 + y^2 = r^2$.

Substituirt man y aus 2) in 1) und läßt den constanten Factor 2 fort, so ist die Function, welche ein Maximum werden soll:

$$\varphi x = 2x + \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Um nun zu untersuchen, für welchen Werth von x, φx unverändert bleibt, hat man:

$2z + \sqrt{r^2 - z^2} = 2x + \sqrt{r^2 - x^2}$ oder

$\sqrt{r^2 - z^2} = 2(x - z) + \sqrt{r^2 - x^2}$; quadrirt, entsteht:

$x^2 - z^2 = 4(x - z)^2 + 4(x - z)\sqrt{r^2 - x^2}$; durch $x - z$ gehoben:

$x + z = 4(x - z) + 4\sqrt{r^2 - x^2}$.

Man kann aus dieser Gleichung z entwickeln; bequemer setzt man aber unmittelbar $z = x$ und erhält:

$$2x = 4\sqrt{r^2 - x^2} \text{ und hieraus:}$$

$$x = \frac{2r}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5} r\sqrt{5} = 0{,}8944 \cdot r.$$

Aus 2) folgt nun $y = \frac{1}{5} r\sqrt{5}$, aus 1) der Umfang des Rechtecks $= 2r\sqrt{5} = 4{,}472 \cdot r$.

Die Beurtheilung, ob der Umfang des gefundenen Rechtecks ein Maximum oder Minimum ist, kann man aus geometrischen Betrachtungen entnehmen. Es liegt x zwischen den Grenzen 0 und r; die Grenzen für den Umfang des Rechtecks sind entsprechend 2r und 4r, und da der gefundene Umfang größer als jede dieser beiden Grenzen ist, φx aber nur einen ausgezeichneten Werth hat, so kann dieser nur ein Maximum sein. Uebrigens erkennt man auch geometrisch leicht, daß der Umfang des Rechtecks, wenn x wachsend den Grenzwerth 0 verläßt, sofort größer als 2r wird. — Man kann aber auch wie in den vorhergehenden Beispielen verfahren. Es ist

$$\varphi\left(\frac{2r}{\sqrt{5}} + k\right) = \frac{4r}{\sqrt{5}} + 2k + \sqrt{r^2 - \left(\frac{2r}{\sqrt{5}} + k\right)^2} \text{ oder}$$

$$\varphi\left(\frac{2r}{\sqrt{5}} + k\right) = \frac{4r}{\sqrt{5}} + 2k + \sqrt{\frac{r^2}{5} - \frac{4r}{\sqrt{5}} k - k^2}.$$

Zieht man die Quadratwurzel aus, die hier zu einer unendlichen Reihe führt, so entsteht:

$$\varphi\left(\frac{2r}{\sqrt{5}} + k\right) = \frac{4r}{\sqrt{5}} + 2k + \frac{r}{\sqrt{5}} - 2k - \frac{5\sqrt{5}}{2r} k^2 - \frac{25}{r^2} k^3 - \ldots\ldots$$

$$= r\sqrt{5} - \frac{5\sqrt{5}}{2r} k^2 - \frac{25}{r^2} k^3 - \ldots\ldots$$

Weil nun $\varphi\left(\frac{2r}{\sqrt{5}}\right) = r\sqrt{5}$ ist, so folgt:

$$\varphi\left(\frac{2r}{\sqrt{5}}\right) - \varphi\left(\frac{2r}{\sqrt{5}} + k\right) = \frac{5\sqrt{5}}{2r} k^2 + \frac{25}{r^2} k^3 + \ldots\ldots$$

Wäre nun die unendliche Reihe rechts für einen unendlich kleinen positiven und auch für einen unendlich kleinen negativen Werth von k positiv, so würde hieraus folgen, daß $\varphi\left(\frac{2r}{\sqrt{5}}\right)$ ein Maximum ist. Dies ist aber der Fall, weil die Reihe mit einem positiven Gliede beginnt, welches eine gerade Potenz von k enthält, und weil alle Coefficienten der Reihe endliche reelle Zahlen sind. Die Begründung dieser letzten Behauptung ergiebt sich aber erst durch Anwendung des Satzes im nächsten §.

Beispiel 5. Für welchen Werth von x ist $\varphi x = \frac{1+x^2}{1-x}$ ein Maximum oder Minimum?

Auflös. Man findet, daß φx unverändert bleibt, wenn man $\frac{x+1}{x-1}$ statt x setzt. Aus $x = \frac{x+1}{x-1}$ folgt aber:

$$x = 1 + \sqrt{2} \quad \text{und} \quad x = 1 - \sqrt{2}.$$

Um zu untersuchen, für welchen beider Werthe φx ein Maximum und für welchen φx ein Minimum wird, hat man:

$$\varphi(1+\sqrt{2}+k) = \frac{1+(1+\sqrt{2}+k)^2}{1-1-\sqrt{2}-k} = \frac{4+2\sqrt{2}+2(1+\sqrt{2})k+k^2}{-\sqrt{2}-k}.$$

Hieraus ergiebt sich durch gewöhnliche Division:

$$\varphi(1+\sqrt{2}+k) = -(2+2\sqrt{2}) - \frac{k^2}{\sqrt{2}+k}.$$ Ebenso erhält man:

$$\varphi(1-\sqrt{2}+k) = +(2\sqrt{2}-2) + \frac{k^2}{\sqrt{2}-k}.$$

Hieraus folgt, daß $\varphi(1+\sqrt{2})$ ein Maximum und $\varphi(1-\sqrt{2})$ ein Minimum ist, d. h. es ist:

1) φx ein Maximum für $x = 1 + \sqrt{2} = 2{,}414$; und der Werth dieses Maximums ist $-(2+2\sqrt{2}) = -4{,}828$.

2) φx ist ein Minimum für $x = 1 - \sqrt{2} = -0{,}414$; und der Werth dieses Minimums ist $2\sqrt{2} - 2 = +0{,}828$.

Es mag dem Leser auffallen, daß der Werth des Maximums kleiner ist, als der des Minimums. Der Grund liegt darin, daß φx keine stetige Function von x ist, sondern bei 1 aus $-\infty$ in $+\infty$ überspringt. Der Gang der Function ist folgender: Für $x = -\infty$ ist $\varphi x = +\infty$; jetzt fällt φx, bis bei $x = -0{,}414$ das Minimum $(+0{,}828)$ eintritt; hierauf steigt φx wieder und nähert sich dem Werthe $+\infty$, wenn x sich dem Werthe $+1$ nähert. Bei $x = 1$ springt φx aus $+\infty$ in $-\infty$ über und steigt nun bei steigenden Werthen von x, bis für $x = 2{,}414$ das Maximum $(-4{,}828)$ eintritt; von jetzt an fällt die Function wieder, bis sie für $x = +\infty$ zu $-\infty$ wird. — Der Leser möge sich den Gang der Function durch eine Figur versinnlichen (vergl. §. 200. Anmerk.).

§. 203.
Beweis des binomischen Lehrsatzes für gebrochene und negative Exponenten.

Zur Umformung einer Function eines Buchstaben in eine Reihe haben wir schon öfter den binomischen Lehrsatz gebraucht; doch konnten wir ihn nur bei ganzen positiven Potenzen anwenden. Die Wichtigkeit dieses Satzes wird dadurch bedeutend erhöht, daß er auch für gebrochene und negative Exponenten gilt. Es entstehen aber dann unendliche Reihen, deren Convergenz also zu untersuchen ist.

Ist n eine ganze positive Zahl, so ist:

$$(1.)\quad (1+x)^n = 1 + nx + n_2 x^2 + n_3 x^3 + n_4 x^4 + \ldots + n_n x^n.$$

Für diese endliche Reihe gilt sonach das Gesetz der Potenz: $(1+x)^n \cdot (1+x)^m = (1+x)^{n+m}$, wenn nur auch m ganz und positiv ist; d. h. setzen wir in jene Reihe m statt n und multipliciren die neue Reihe mit der alten, so ist das Product derjenigen Reihe gleich, welche entsteht, wenn wir in (1.) $n+m$ statt n setzen.

Betrachten wir jetzt bei jedem beliebigen reellen Werthe von n die unendliche Reihe:

$$(2.)\quad 1 + nx + n_2 x^2 + n_3 x^3 + n_4 x^4 + n_5 x^5 + \ldots \text{ in inf.},$$

so entsteht die Frage, ob die eben erwähnte Eigenschaft der Reihe in (1.) auch dieser Reihe zukommt. Wir denken uns in der Reihe (2.) unter x eine gegebene constante Zahl; folglich ist die Reihe eine Function von n, etwa $\varphi(n)$, und wir wollen zunächst untersuchen, ob für jeden Werth von n

$$\varphi(n) \cdot \varphi(m) = \varphi(n+m)$$

ist. Zu diesem Zwecke multipliciren wir:

$$\begin{array}{rccccccl}
\varphi(n) = 1 + & nx & + n_2x^2 & + n_3x^3 & + n_4x^4 + \ldots + n_{p-1}x^{p-1} + & & n_px^p + \ldots \\
\varphi(m) = 1 + & mx & + m_2x^2 & + m_3x^3 & + m_4x^4 + \ldots + m_{p-1}x^{p-1} + & & m_px^p + \ldots \\
\hline
1 + & nx & + n_2x^2 & + n_3x^3 & + n_4x^4 + \ldots\ldots\ldots & + & n_px^p + \ldots \\
 & mx & + nmx^2 & + n_2mx^3 & + n_3mx^4 + \ldots\ldots\ldots & + & n_{p-1}mx^p + \ldots \\
 & & m_2x^2 & + nm_2x^3 & + n_2m_2x^4 + \ldots\ldots\ldots & + & n_{p-2}m_2x^p + \ldots \\
 & & & m_3x^3 & + nm_3x^4 + \ldots\ldots\ldots & + & n_{p-3}m_3x^p + \ldots \\
 & & & & m_4x^4 + \ldots\ldots\ldots & + & n_{p-4}m_4x^p + \ldots \\
 & & & & + \ldots\ldots\ldots & + & \ldots\ldots\ldots \\
 & & & & & \vdots & \\
 & & & & \ldots & + & n_2m_{p-2}x^p + \ldots \\
 & & & & \ldots & + & nm_{p-1}x^p + \ldots \\
 & & & & & & m_px^p + \ldots \\
 & & & & & & + \text{u. s. w.} \\
\hline
\end{array}$$

$$\varphi(n) \cdot \varphi(m) = 1 + (n+m)x + (n+m)_2x^2 + (n+m)_3x^3 + (n+m)_4x^4 + \ldots\ldots\ldots + (n+m)_px^p + \ldots$$

Das Resultat ergiebt sich durch Anwendung des Lehrsatzes VI. in §. 175. — Nun ist die Reihe rechts in der That $\varphi(n+m)$; folglich ist, wenn $\varphi(n)$ die Reihe (2.) bedeutet:

$$(3.)\quad \varphi(n)\cdot\varphi(m) = \varphi(n+m)$$

für jeden reellen Werth von n und m.

Setzt man nun $m = n$, so folgt:

$[\varphi(n)]^2 = \varphi(2n)$, und wieder mit $\varphi(n)$ multiplicirt:
$[\varphi(n)]^3 = \varphi(3n)$; eben so:
$[\varphi(n)]^4 = \varphi(4n)$, u. s. w., daher allgemein, wenn q eine positive ganze Zahl ist:

$$(4.)\quad [\varphi(n)]^q = \varphi(qn).$$

Setzt man nun $n = \frac{p}{q}$, unter p auch eine positive ganze Zahl verstanden, so ist

$$(5.)\quad \left[\varphi\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = \varphi(p).$$

Da aber p eine positive ganze Zahl ist, so bedeutet $\varphi(p)$ die endliche Reihe:

$1 + px + p_2x^2 + p_3x^3 + \ldots + p_px^p$, d. h. $(1+x)^p$ [aus (1.)].

Es ist sonach:

$$\left[\varphi\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = (1+x)^p \quad \text{oder} \quad (1+x)^{\frac{p}{q}} = \varphi\left(\frac{p}{q}\right), \text{ also:}$$

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} = 1 + \left(\frac{p}{q}\right)x + \left(\frac{p}{q}\right)_2 x^2 + \left(\frac{p}{q}\right)_3 x^3 + \left(\frac{p}{q}\right)_4 x^4 + \ldots$$

Setzt man $x = \frac{b}{a}$ und multiplicirt nachher beide Seiten mit $a^{\frac{p}{q}}$, so folgt:

$$\text{I. } (a+b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} + \frac{p}{q}\cdot a^{\frac{p}{q}-1}b + \left(\frac{p}{q}\right)_2 a^{\frac{p}{q}-2}b^2 + \left(\frac{p}{q}\right)_3 a^{\frac{p}{q}-3}b^3 + \left(\frac{p}{q}\right)_4 a^{\frac{p}{q}-4}b^4 + \ldots,$$

wodurch der binomische Lehrsatz für gebrochene Exponenten erwiesen ist.

Setzt man ferner in (3.) $-n$ statt m, so folgt:

$$\varphi(n)\cdot\varphi(-n) = \varphi(0).$$

Nun ist aber aus (2.) $\varphi(0) = 1$; folglich ist

$$\varphi(n)\cdot\varphi(-n) = 1 \quad \text{oder} \quad \varphi(-n) = \frac{1}{\varphi(n)}.$$

Es ist aber bereits bewiesen, daß für jeden positiven (auch gebrochenen) Werth von n, $\varphi(n) = (1+x)^n$ ist; folglich ist

$$\varphi(-n) = \frac{1}{(1+x)^n} \text{ oder } (1+x)^{-n} = \varphi(-n), \text{ d. h.}$$

$$(1+x)^{-n} = 1 + (-n)x + (-n)_2 x^2 + (-n)_3 x^3 + (-n)_4 x^4 + \ldots.$$

Setzt man $x = \frac{b}{a}$ und multiplicirt nachher beide Seiten mit a^{-n}, so entsteht:

$$\text{II.} \quad (a+b)^{-n} = a^{-n} + (-n)a^{-n-1}b + (-n)_2 a^{-n-2}b^2 + (-n)_3 a^{-n-3}b^3 + (-n)_4 a^{-n-4}b^4 + \ldots,$$

wodurch der binomische Lehrsatz auch für beliebige negative Exponenten erwiesen ist.

Die Reihen I. und II. sind nur brauchbar, wenn sie convergiren; wir müssen also ihre Convergenz untersuchen. Es sei n eine beliebige gebrochene oder negative Zahl, so ist

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n_2 a^{n-2}b^2 + n_3 a^{n-3}b^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

Dividiren wir das $m+1$ste Glied durch das $m$te, so folgt:

$$\frac{x_{m+1}}{x_m} = \frac{n_m}{n_{m-1}} \cdot \frac{b}{a} = \frac{n-m+1}{m} \cdot \frac{b}{a} = \left(-1 + \frac{n+1}{m}\right)\frac{b}{a}.$$

Für steigende Werthe von m wird aber $\frac{n+1}{m}$ immer kleiner und kleiner und nähert sich der Null; folglich nähert sich $-1 + \frac{n+1}{m}$ für steigende Werthe von m der -1 und wird für $m = \infty$ zu -1. Daher convergirt die Reihe nur, wenn $\frac{b}{a}$ ein echter Bruch ist. Hieraus folgt, daß der binomische Lehrsatz auch bei gebrochenen und negativen Exponenten immer anwendbar ist, wenn a und b ungleich sind; nur muß man ihn so anwenden, daß, wenn $a > b$ ist, eine nach steigenden Potenzen von b fortlaufende Reihe entsteht:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n_2 a^{n-2}b^2 + \ldots..;$$

ist aber $a < b$, so muß man durch Vertauschung von a und b eine nach steigenden Potenzen von a fortlaufende Reihe erzeugen:

$$(b+a)^n = b^n + nb^{n-1}a + n_2 b^{n-2}a^2 + \ldots..$$

Hierbei ist es gleichgültig, ob a und b durch + oder durch — verbunden sind. Die Reihe

$$(1+x)^n = 1 + nx + n_2 x^2 + n_3 x^3 + \ldots.$$

convergirt nur, wenn x ein echter Bruch ist.

Ist also $a > b$, so kann man $(a+b)^n = a^n \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$ setzen, woraus folgt:

$$(a+b)^n = a^n\left[1 + n \cdot \frac{b}{a} + n_2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + n_3\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \ldots..\right]. \text{ z. B.}$$

1) $\sqrt[3]{1010} = \sqrt[3]{1000+10} = \sqrt[3]{1000[1+0{,}01]} = 10\cdot(1+0{,}01)^{\frac{1}{3}}$
$= 10\cdot[1 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}01 + (\frac{1}{3})_2\cdot 0{,}01^2 + (\frac{1}{3})_3\cdot 0{,}01^3 + (\frac{1}{3})_4\cdot 0{,}01^4 + \ldots]$
$= 10\cdot[1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}01 - \frac{1}{9}\cdot 0{,}0001 + \frac{5}{81}\cdot 0{,}000001 - \frac{10}{243}\cdot 0{,}00000001 + \ldots]$.

Das nächste (6te) Glied hat erst in der 13ten Decimalstelle eine Ziffer, die nicht 0 ist; soll also $\sqrt[3]{1010}$ auf 9 Decimalstellen berechnet werden, so genügen die ersten 5 Glieder.

Man erhält $\sqrt[3]{1010} = 10{,}033222836$.

2) $\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \frac{7}{256}x^{10} - - \ldots$

3) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 - \frac{5}{16}x^7 + - + \ldots$

4) $\sqrt[3]{1-x^3} = 1 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^6 - \frac{5}{81}x^9 - \frac{10}{243}x^{12} - - \ldots$

5) $\sqrt[4]{1-x^4} = 1 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{32}x^8 - \frac{7}{128}x^{12} - \frac{77}{2048}x^{16} - - \ldots$

6) Es sei $\varphi x = -\frac{a}{2x} + \frac{a}{2x}\sqrt{1+x}$; welchen Werth hat $\varphi(0)$?

Auflös. $\varphi(0) = -\infty + \infty$, folglich kann $\varphi(0)$ eine endliche Zahl sein. Verwandelt man $\sqrt{1+x}$ in eine Reihe, so folgt $\varphi(0) = \frac{a}{4}$.

7) Es sei $\varphi x = \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3-x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+x}}$; welchen Werth hat $\varphi(1)$?

Auflös. $\varphi x = \frac{2^{\frac{1}{3}} - [2+(1-x)]^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}} - [2-(1-x)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{3}} - [2^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\cdot 2^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-x) + \ldots]}{2^{\frac{1}{2}} - [2^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x) + \ldots]}$.

Löst man jetzt im Zähler und Nenner die Klammern [] auf, hebt den Bruch durch $1-x$ und setzt dann $x = 1$, so folgt:

$$\varphi(1) = -\tfrac{1}{3}\sqrt[6]{32}.\quad \text{(Vergl. §. 92. Beispiel 10).}$$

8) Es sei $\varphi x = \frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{1+x}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{5-x}}$; gesucht $\varphi(2)$.

Auflös. $\varphi(2) = -\frac{3}{4}\sqrt[12]{\frac{1}{3}}$.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten.

§. 204.

Der Null-Satz.

I. Wenn eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe: $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots\ldots$ für jeden Werth von x gleich Null sein soll, so müssen

alle Coefficienten a, b, c, d, e, f, ... einzeln gleich Null sein.

Beweis. Wir wollen den Beweis durch Induction führen. Nehmen wir zuerst eine Reihe, die nur bis zur ersten Potenz von x fortschreitet, also $a + bx$, so folgt aus der Bedingung: es soll für jeden Werth von x

$a + bx = 0$ sein, daß auch
$a + by = 0$ sein muß; hieraus durch Subtraction:

$b(x-y) = 0.$

Weil nun diese Gleichung richtig sein soll, auch wenn x und y ungleich sind, so muß $b = 0$ sein, daher auch $a = 0$.

Nehmen wir jetzt die Reihe, welche bis x^2 fortschreitet. Aus:

1) $a + bx + cx^2 = 0$ für jeden Werth von x, folgt
2) $a + by + cy^2 = 0$ und
3) $a + bz + cz^2 = 0.$

Zieht man 2) von 1) und dann auch 3) von 1) ab, so folgt, wenn man die erste der neuen Gleichungen durch $x - y$, die zweite durch $x - z$ hebt:

4) $b + c(x + y) = 0$
5) $b + c(x + z) = 0$; daher durch Subtraction:

$c(y - z) = 0.$

Wieder soll diese Gleichung richtig sein, auch wenn y und z ungleich sind; folglich muß

$c = 0$ sein, daher aus 4) $b = 0$, daher aus 1) $a = 0$.

So kann man fortfahren. Wir wollen aber jetzt zeigen, daß, wenn das Gesetz wahr ist für die bis x^n fortschreitende Reihe, es dann auch immer für jede bis x^{n+1} fortschreitende Reihe gilt.

Ist also $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + px^n + qx^{n+1} = 0$ für jeden Werth von x, so soll $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, ..., $p = 0$, $q = 0$ sein, vorausgesetzt, daß dasselbe Gesetz für jede bis x^n fortschreitende Reihe schon bewiesen wäre.

Aus der Bedingung, es soll für jeden Werth von x

1) $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots + px^n + qx^{n+1} =$ sein, folgt, 2x statt x gesetzt:
2) $a + 2bx + 4cx^2 + 8dx^3 + 16ex^4 + \ldots + 2^n px^n + 2^{n+1} qx^{n+1} = 0.$ Zieht man 1) von 2) ab:

$bx + 3cx^2 + 7dx^3 + 15ex^4 + \ldots + (2^n - 1)px^n + (2^{n+1} - 1)qx^{n+1} = 0$ für jeden Werth von x. Man kann x absondern und erhält:

$$x \cdot [b + 3cx + 7dx^2 + 15ex^3 + \ldots + (2^n - 1)px^{n-1} + (2^{n+1} - 1)qx^n] = 0$$

für jeden Werth von x. Nun wird der erste Factor nur für einen Werth von x zu Null, nämlich für $x = 0$; folglich muß der zweite

Factor für jeden anderen Werth von x Null sein; für $x = 0$ braucht er es nicht zu sein. Dieser zweite Factor ist aber eine bis x^n fortschreitende Reihe, und nach unserer Voraussetzung sollten alle Coefficienten einer solchen Reihe gleich Null sein, wenn die Reihe selbst für jeden Werth von x gleich Null ist. Im vorliegenden Falle muß nun zwar die Reihe

$$b + 3cx + 7dx^2 + 15ex^3 + \ldots + (2^n - 1)px^{n-1} + (2^{n+1} - 1)qx^n$$

nicht für jeden Werth von x gleich Null sein, aber doch für jeden Werth mit Ausnahme eines einzigen; denn nur, wenn x selbst gleich Null ist, braucht die Reihe nicht nothwendig auch gleich Null zu sein. Nehmen wir diese Ausnahme aber in die Voraussetzung auf, d. h. sprechen wir die Voraussetzung etwa so aus: „jeder Coefficient einer bis x^n fortschreitenden Reihe soll auch dann schon gleich Null sein, wenn die Reihe selbst für jeden Werth von x, mit Ausnahme des Werthes Null für x, gleich Null ist", so folgt:

$$b = 0,\ 3c = 0,\ 7d = 0,\ 15e = 0, \ldots, (2^n - 1)p = 0,\ (2^{n+1} - 1)q = 0,$$

d. h. $b = 0,\ c = 0,\ d = 0,\ e = 0, \ldots\ldots, p = 0,\ q = 0$; daher aus 1) auch $a = 0$.

Wir haben also bewiesen, daß das Gesetz für jede bis x^{n+1} fortschreitende Reihe wahr ist, wenn es für die bis x^n fortschreitende Reihe mit der Beschränkung gilt, daß diese Reihe für jeden Werth von x, mit Ausnahme des Werthes Null für x, gleich Null ist, oder, was doch völlig auf eins hinausläuft, wenn wir dasselbe Gesetz für jede bis x^n fortschreitende Reihe bewiesen haben, ohne daß wir den in der allgemeinen Bedingung (es soll die Reihe für jeden Werth von x gleich Null sein) liegenden besonderen Fall: „es soll die Reihe auch gleich Null sein, wenn man $x = 0$ setzt" zum Beweise benutzten. Nun haben wir aber bewiesen, daß das Gesetz für die Reihen $a + bx$ und $a + bx + cx^2$ gilt, ohne daß wir zu dem Beweise die Bedingung „auch für $x = 0$ soll die Reihe zu Null werden" benutzten; folglich gilt das Gesetz auch für die bis x^3 fortschreitende Reihe $a + bx + cx^2 + dx^3$, folglich dann auch für die bis x^4, x^5, x^6 u. s. w. fortschreitenden Reihen, d. h. für alle.

II. **Wenn zwei nach den Potenzen von x fortschreitende Reihen für jeden Werth von x einander gleich sein sollen, etwa**

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots,$$

so müssen auch die Coefficienten der Glieder beider Reihen, welche gleiche Potenzen von x enthalten, einander gleich sein, d. h. $a = A$, $b = B$, $c = C$, $d = D$, u. s. w.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt:
$(a - A) + (b - B)x + (c - C)x^2 + (d - D)x^3 + \ldots = 0$ für jeden Werth von x; folglich aus I.: $a - A = 0$, $b - B = 0$, $c - C = 0$, u. s. w., d. h. $a = A$, $b = B$, $c = C$, u. s. w.

§. 205.

Die Anwendung dieser Gesetze.

Man wendet diese Gesetze an, um einer Function von x, etwa φx, eine für irgend einen Zweck bequeme Form zu geben, wenn man entweder bestimmt weiß, daß φx diese Form annehmen kann, oder es doch vermuthet. Die in der Form, welche φx annehmen soll, vorkommenden unbekannten Coefficienten bezeichnet man durch $a, b, c, \ldots$ und setzt φx dem neuen Ausdrucke gleich. Kann man dann aus dieser Gleichung durch Umformung, oder auch mit Hülfe besonderer Eigenschaften, welche φx hat, eine neue Gleichung bilden, deren Seiten Reihen sind, die nach Potenzen von x fortschreiten, oder in welcher eine Seite eine solche Reihe, die andere Seite aber Null ist: so liefern resp. die Gesetze II. und I. in §. 204. Gleichungen, aus denen $a, b, c, \ldots$ zu entwickeln sind. Man nennt dieses Verfahren **die Methode der unbestimmten Coefficienten.**

Soll z. B. $6 + 13x + 2x^2$ in ein Product zweier ganzen Functionen des ersten Grades zerlegt werden, so setzt man $6 + 13x + 2x^2 = (a + bx)(c + dx)$. Löst man die Klammern auf, so folgt:

$$6 + 13x + 2x^2 = ac + (ad + bc)x + bdx^2.$$

Hieraus folgt nach dem Satze II.:
$ac = 6$, $ad + bc = 13$ und $bd = 2$. Hieraus a, b, c, d zu bestimmen, ist eine diophantische Aufgabe; man kann also eine Unbekannte wählen, z. B. $a = 2$; dann ist $c = 3$, $2d + 3b = 13$ und $bd = 2$. Die letzten beiden Gleichungen geben $b = 4$ oder $\frac{1}{3}$ und $d = \frac{1}{2}$ oder 6; also hat man erhalten:

$$6 + 13x + 2x^2 = (2 + 4x)(3 + \tfrac{1}{2}x) \text{ oder auch}$$
$$6 + 13x + 2x^2 = (2 + \tfrac{1}{3}x)(3 + 6x).$$

Natürlich giebt es noch unendlich viele andere Auflösungen, alle aber führen schließlich auf:

$$6 + 13x + 2x^2 = (1 + 2x)(6 + x).$$

Besonders wichtig wird die Methode der unbestimmten Coefficienten durch ihre Anwendung bei der Umformung einer Function φx in eine nach den Potenzen von x fortlaufende Reihe. Man kann von der Möglichkeit einer solchen Umformung überzeugt sein, oder sie auch nur vermuthen. Im ersten Falle ist man berechtigt, φx einer solchen Reihe gleich zu setzen, etwa $\varphi x = a + bx + cx^2 + \ldots$; im

zweiten Falle thut man dies auch, hat aber, wenn die unbekannten Coefficienten a, b, c, ... gefunden sind, noch zu prüfen, ob die gefundene Reihe wirklich für φx gesetzt werden darf. Daß dies nicht immer der Fall zu sein braucht, folgt schon daraus, daß die Reihe divergent sein kann, in welchem Falle sie dem endlichen Ausdrucke, dessen Entwicklung sie ist, nicht gleich gesetzt werden darf.

Die Analysis verfährt hierbei ähnlich wie die Algebra. Suchten wir in der Algebra eine Zahl x von gegebener Eigenschaft, so setzten wir eine Gleichung an und entwickelten x. Nun war es allerdings möglich, daß eine Zahl mit der verlangten Eigenschaft nicht existirt, aber wir erwarteten zunächst durch die Auflösung hierüber einen Aufschluß; denn die Auflösung konnte einen Widerspruch aufdecken, oder x imaginär oder in der Form $\frac{1}{0}$ geben. Es kamen aber auch Fälle vor (vergl. S. 257. Beisp. 1. und S. 212. Beisp. 9.), in welchen erst die Probe, d. h. das Einsetzen des gefundenen Werthes von x in die ursprüngliche Gleichung, uns die richtige Auflösung zeigte (bei mehreren Werthen von x), oder uns die Ueberzeugung von der Unauflösbarkeit der Aufgabe gab. So führt die Gleichung

$$+\sqrt{x-9}-\sqrt{x-1}=2 \text{ zu dem Werthe } x=10;$$

die Probe zeigt, daß die Gleichung keine Auflösung hat.

Aehnlich in der Analysis. Wir setzen

$$\varphi x = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots,$$

müssen aber, wenn die Möglichkeit dieser Umformung nicht bereits erwiesen ist, oder die Entwickelung nicht zu einem Widerspruche führt (Beisp. 1.), prüfen, ob die gefundene Reihe auch wirklich für φx gesetzt werden darf.

Beispiel 1. Es soll $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ in eine nach den ganzen positiven Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandelt werden.

Auflös. Wir setzen:

$\sqrt{x}+\sqrt{1-x} = a + bx + cx^2 + \ldots\ldots$; quadrirt giebt:

$1 + 2\sqrt{x-x^2} = a^2 + 2abx + (2ac + b^2)x^2 + \ldots$ oder

$2\sqrt{x-x^2} = (a^2-1) + 2abx + (2ac+b^2)x^2 + \ldots$; quadrirt:

$4x - 4x^2 = (a^2-1)^2 + 4ab(a^2-1)x + \ldots$; hieraus nach II.:

1) $(a^2-1)^2 = 0.$

2) $4ab(a^2-1) = 4$; u. s. w.

Aus 1) folgt $a = \pm 1$. Die Gleichung 2) zeigt nun den Widerspruch $0 = 4$. Durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes sieht man sehr bald, daß $\sqrt{x}+\sqrt{1-x} = x^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}$ sich in eine nur ganze Potenzen von x enthaltende Reihe nicht verwandeln läßt.

Beispiel 2. $\varphi x = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ in eine nach den ganzen positiven Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln.

Auflös. Wir setzen:

$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$; quadrirt:

$$-2\sqrt{1-x^2} = (a^2-2) + 2abx + (2ac+b^2)x^2 + (2ad+2bc)x^3 + (2ae+2bd+c^2)x^4 + \ldots$$

Quadrirt man wieder und wendet das Gesetz II. an, so erhält man die Gleichungen:

1) $(a^2-2)^2 = 4$
2) $4ab(a^2-2) = 0$
3) $2(a^2-2)(2ac+b^2) + 4a^2b^2 = -4$
4) $2(a^2-2)(2ad+2bc) + 4ab(2ac+b^2) = 0$
5) $2(a^2-2)(2ae+2bd+c^2) + 4ab(2ad+2bc) + (2ac+b^2)^2 = 0$

u. s. w.

Aus 1) folgt $a = \pm 2$ und auch $a = 0$.

Nimmt man $a = \pm 2$, so erhält man aus den folgenden Gleichungen: $b = 0$; $c = \mp \frac{1}{4}$; $d = 0$; $e = \pm \frac{5}{64}$; u. s. w.

Nimmt man $a = 0$, so wird 2) identisch; aber aus den folgenden Gleichungen ergeben sich:

$b = \pm 1$; $c = 0$; $d = \pm \frac{1}{8}$; u. s. w. Man erhält sonach vier Reihen:

$$2 - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{5}{64}x^4 - + \ldots$$
$$-2 + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{64}x^4 + \ldots$$
$$x + \tfrac{1}{8}x^3 + \ldots$$
$$-x - \tfrac{1}{8}x^3 - \ldots$$

Wendet man auf $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ den binomischen Lehrsatz an, so findet man, daß die vier Reihen resp. folgenden vier Functionen gleich sind:

$$+\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x};\quad -\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x};\quad +\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x};\quad -\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}.$$

Für unsere Aufgabe ist daher $\varphi x = x + \frac{1}{8}x^3 + \ldots$. Daß wir für φx vier Reihen erhielten, hat offenbar darin seinen Grund, daß eine Quadratwurzel zwei verschiedene Werthe repräsentirt und die Bedingung, daß der absolute Werth von $\sqrt{1-x}$ von dem absoluten Werth der Wurzel $\sqrt{1+x}$ abgezogen werden soll, bei der Entwicklung verloren ging.

Wir sehen hieraus, daß wir bei Reihen, welche durch Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten entstehen, prüfen müssen,

ob sie der Function, deren Entwicklung sie sind, wirklich gleich gesetzt werden können; hierher gehört auch die Untersuchung über ihre Convergenz.

Ehe wir einige Anwendungen geben, schicken wir noch einen Satz voraus, durch welchen die Entwicklung nicht nur einfacher wird, sondern der auch in vielen Fällen die Unmöglichkeit der Umformung in eine Reihe sofort erkennen läßt.

Lehrsatz. Läßt sich φx in eine nach den ganzen positiven Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandeln, so ist das erste Glied derselben $= \varphi(0)$.

Beweis. Soll $\varphi x = a + bx + cx^2 + \ldots$ für jeden Werth von x sein, so folgt, wenn $x = 0$ gesetzt wird: $\varphi(0) = a$.

Ergiebt sich also $\varphi(0)$ imaginär (z. B. $\varphi x = \sqrt{x^2 - 1}$), so ist eine Reihe mit reellen Coefficienten nicht möglich; wird $\varphi(0) = \infty$ $\left(\text{z. B. } \varphi x = \frac{2 + \sqrt{1+x}}{1 - \sqrt{1+x}}\right)$, so ist eine Reihe mit endlichen Coefficienten nicht möglich. Läßt sich aber φx in eine Reihe mit reellen Coefficienten umformen, so hat man in $\varphi(0)$ das erste Glied.

§. 206.

Die Verwandelung gebrochener und irrationaler Functionen in Reihen. Die Umkehrung der Reihen. Das Zerlegen gebrochener Functionen in Partialbrüche.

I. Man wendet die Methode der unbestimmten Coefficienten an, um gebrochene und irrationale Functionen in Reihen zu verwandeln. z. B.

$$1)\quad \varphi x = \frac{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \ldots}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + + \ldots}.$$

Auflös. Es ist $\varphi(0) = 1$, folglich setzt man:

$$\frac{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \ldots}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + + \ldots} = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$$

Hieraus folgt durch Multiplication mit dem Nenner:

$$\begin{aligned}
1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \ldots = 1 &+ ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots \\
&+ x + ax^2 + bx^3 + cx^4 + \ldots \\
&\qquad + x^2 + ax^3 + bx^4 + \ldots \\
&\qquad\qquad + x^3 + ax^4 + \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad + x^4 + \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots
\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen:
$a+1=-1$, $b+a+1=1$, $c+b+a+1=-1$, $d+c+b+a+1=1$, u. s. w. folgt $a=-2$, $b=+2$, $c=-2$, $d=+2$, u. s. w., folglich ist

$$\varphi x = 1-2x+2x^2-2x^3+2x^4-+\ldots$$

Convergent ist diese Reihe, wenn $x<1$ ist.

2) $\varphi x = \frac{1-2x+3x^2}{x^2+2x^3+3x^4}$. Da $\varphi(0)=\frac{1}{0}$, so ist eine Reihe von der Form $a+bx+cx^2+\ldots$ nicht möglich; setzt man aber $\varphi x = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1-2x+3x^2}{1+2x+3x^2}$, so kann man $\frac{1-2x+3x^2}{1+2x+3x^2}$ in eine solche Reihe verwandeln und dann jedes Glied mit $\frac{1}{x^2}$ multipliciren. So entsteht $\varphi x = \frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}+8-4x-16x^2+44x^3+\ldots$

3) $\varphi x = \frac{1-x+x^2}{\pm\sqrt{1-2x-x^2}} = \pm(1+2x^2+3x^3+\frac{13}{2}x^4+14x^5+\ldots)$

4) $\varphi x = \frac{3-x^2}{x-2x^3}$. Man setze $\varphi x = \frac{1}{x}\cdot\frac{3-x^2}{1-2x^2}$. Die Reihe für $\frac{3-x^2}{1-2x^2}$ kann nur gerade Potenzen von x enthalten, weil $\frac{3-x^2}{1-2x^2}$ unverändert bleibt, wenn man $-x$ statt x setzt, und die Reihe dieselbe Eigenschaft haben muß. Man setze daher

$$\frac{3-x^2}{1-2x^2} = 3+ax^2+bx^4+\ldots$$

Man erhält $\varphi x = \frac{3}{x}+5x+10x^3+20x^5+40x^7+\ldots$

Die Reihe convergirt, wenn $x^2<\frac{1}{2}$ ist.

5) $\varphi x = \sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$. Man setze $x^3=y$ und verwandele $\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$ in eine nach den Potenzen von y fortlaufende Reihe. Man erhält:

$$\pm\sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}} = \pm(1+x^3+\tfrac{1}{2}x^6+\tfrac{1}{2}x^9+\tfrac{3}{8}x^{12}+\ldots)$$

6) $\frac{6+3x+2x^2}{9-x+2x^2} = \frac{2}{3}+\frac{11}{27}x+\frac{29}{243}x^2-\frac{169}{2187}x^3-\frac{691}{19683}x^4+\ldots$

7) $\frac{2+3x+2x^2+3x^3+2x^4+3x^5+\ldots}{1-2x+x^2-2x^3+x^4-2x^5+\ldots} = 2+[7x+14x^2+28x^3+56x^4$
$+112x^5+224x^6+\ldots+2^{n-1}\cdot 7x^n+\ldots]$.

Die Klammern deuten hier an, daß das Gesetz, welches durch das nte Glied $2^{n-1}\cdot 7x^n$ ausgedrückt ist, nur von den Gliedern in den Klammern gilt.

II. Wenn y als eine nach den Potenzen von x fortlaufende Reihe gegeben ist, so kann man x in eine nach den Potenzen von y fortlaufende Reihe dann verwandeln, wenn man weiß, daß x und y gleichzeitig Null werden. Weder die gegebene Reihe, noch die gesuchte enthält dann ein constantes Glied. Man nennt dies Verfahren: eine Reihe umkehren.

Beispiel 1. Es sei gegeben:

$$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \ldots;$$

man soll die Reihe umkehren.

Auflös. Setzt man $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + fy^6 + \ldots\ldots$, substituirt diese Reihe statt x in die gegebene und ordnet die entstandene Gleichung, so erhält man:

$$\begin{array}{rrrrrr}
y = ay + & by^2 + & cy^3 + & dy^4 + & ey^5 + & fy^6 + \ldots \\
 & + \frac{1}{2}a^2y^2 + & aby^3 + & acy^4 + & ady^5 + & aey^6 + \ldots \\
 & & + \frac{1}{3}a^3y^3 + & \frac{1}{2}b^2y^4 + & bcy^5 + & bdy^6 + \ldots \\
 & & & + a^2by^4 + & a^2cy^5 + & \frac{1}{2}c^2y^6 + \ldots \\
 & & & + \frac{1}{4}a^4y^4 + & ab^2y^5 + & a^2dy^6 + \ldots \\
 & & & & + a^3by^5 + & 2abcy^6 + \ldots \\
 & & & & + \frac{1}{5}a^5y^5 + & \frac{1}{3}b^3y^6 + \ldots \\
 & & & & + & a^3cy^6 + \ldots \\
 & & & & + & \frac{3}{2}a^2b^2y^6 + \ldots \\
 & & & & + & a^4by^6 + \ldots \\
 & & & & + & \frac{1}{6}a^6y^6 + \ldots \\
 & & & & & + \ldots
\end{array}$$

Hieraus folgt:

$a = 1$

$b^2 + \frac{1}{2}a^2 = 0$

$c + ab + \frac{1}{3}a^3 = 0$

$d + ac + \frac{1}{2}b^2 + a^2b + \frac{1}{4}a^4 = 0$

$e + ad + bc + a^2c + ab^2 + a^3b + \frac{1}{5}a^5 = 0$

$f + ae + bd + \frac{1}{2}c^2 + a^2d + 2abc + \frac{1}{3}b^3 + a^3c + \frac{3}{2}a^2b^2 + a^4b + \frac{1}{6}a^6 = 0$

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = +\frac{1}{6}$, $d = -\frac{1}{24}$, $e = +\frac{1}{120}$, $f = -\frac{1}{720}$, u. s. w.; folglich ist

$$x = y - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} - \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} + - + \ldots\ldots$$

Beispiel 2. $y = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots\ldots$

Man erhält: $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 + - + \ldots\ldots$

Beispiel 3. $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

Man erhält $x = y + \frac{1}{2 \cdot 3}y^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}y^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}y^7 + \ldots$

III. **Das Zerlegen gebrochener Functionen von x in Partialbrüche.** Addirt man zwei echt gebrochene Functionen von der Form $\frac{a}{b+cx}$ und $\frac{\alpha}{\beta+\gamma x}$, so erhält man wieder eine echt gebrochene Function von der Form $\frac{A+Bx}{(b+cx)(\beta+\gamma x)}$. Umgekehrt kann diese Function von x gegeben sein, und man wünscht sie wieder in jene zwei zu zerlegen. Es sind dann a und α die Unbekannten und mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten zu finden. Diese Umformung nennt man das Zerlegen einer gebrochenen Function in ihre **Partialbrüche**. Vorausgesetzt werden immer echt gebrochene Functionen; die unecht gebrochenen verwandelt man in ganze und echt gebrochene (§. 169.). Die Partialbrüche sind dann auch als echt gebrochene Functionen anzunehmen (folgt indirect). z. B.

1) $\varphi x = \frac{5+6x}{(2+x)(3-2x)}$ in Partialbrüche zu zerlegen.

Auflös. Aus $\frac{5+6x}{(2+x)(3-2x)} = \frac{a}{2+x} + \frac{b}{3-2x}$ folgt:

$5+6x = a(3-2x) + b(2+x)$ oder

$5+6x = (3a+2b) + (-2a+b)x$; hieraus:

1) $3a+2b = 5$ und 2) $-2a+b = 6$;

folglich $a = -1$ und $b = 4$, folglich:

$$\frac{5+6x}{(2+x)(3-2x)} = \frac{4}{3-2x} - \frac{1}{2+x}.$$

Sind die Factoren des Nenners in Bezug auf x vom zweiten Grade, so muß der Zähler vom ersten Grade genommen werden. z. B.

2) $\varphi x = \frac{6+4x+x^2}{(2+x^2)(1+x)} = \frac{a+bx}{2+x^2} + \frac{c}{1+x}$; hieraus:

$$6+4x+x^2 = (a+2c) + (a+b)x + (b+c)x^2.$$

Aus $a+2c = 6$, $a+b = 4$, $b+c = 1$ folgt: $a = 4$, $b = 0$, $c = 1$; folglich

$$\varphi x = \frac{4}{2+x^2} + \frac{1}{1+x}.$$

Ueberhaupt ist der Zähler jedes Partialbruches um einen Grad niedriger zu nehmen, als der Nenner. z. B.

3) $\varphi x = \frac{2+x^5}{(1+x^4)(1+x^2)} = \frac{a+bx+cx^2+dx^3}{1+x^4} + \frac{e+fx}{1+x^2}$.

Hieraus folgt:

$$2+x^5 = (a+e) + (b+f)x + (c+a)x^2 + (d+b)x^3 + (e+c)x^4 + (f+d)x^5.$$

Aus $a+e = 2$, $b+f = 0$, $c+a = 0$, $d+b = 0$, $e+c = 0$, $f+d = 1$ folgt:

$a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -1$, $d = \frac{1}{2}$, $e = 1$, $f = \frac{1}{2}$.

Daher $\varphi x = \frac{2 - x - 2x^2 + x^3}{2(1 + x^4)} + \frac{2 + x}{2(1 + x^2)}$.

Hat der Nenner mehr als zwei Factoren, so entstehen auch mehr als zwei Partialbrüche. z. B.

4) $\varphi x = \frac{6 - 5x}{x(x - 1)(x - 2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x - 2}$;

hieraus:

$$6 - 5x = 2a - (3a + 2b + c)x + (a + b + c)x^2.$$

Aus $2a = 6$, $3a + 2b + c = 5$ und $a + b + c = 0$ folgt:

$a = 3$, $b = -1$, $c = -2$; folglich

$$\varphi x = \frac{3}{x} - \frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x - 2}.$$

In allen erwähnten Fällen kann man so, wie angegeben, nur dann verfahren, wenn die Factoren des Nenners ungleich sind. Das nächste Beispiel zeigt, wie man bei gleichen Factoren zerlegen kann.

5) $\varphi x = \frac{12 - 11x + 3x^2}{(2 - x)^3}$ auf die Form

$$\frac{a}{(2 - x)^3} + \frac{b}{(2 - x)^2} + \frac{c}{2 - x}$$

zu bringen.

Auflös. Aus $\frac{12 - 11x + 3x^2}{(2 - x)^3} = \frac{a}{(2 - x)^3} + \frac{b}{(2 - x)^2} + \frac{c}{2 - x}$

folgt: $12 - 11x + 3x^2 = a + b(2 - x) + c(2 - x)^2$ oder

$12 - 11x + 3x^2 = (a + 2b + 4c) + (-b - 4c)x + cx^2$;

daher $a + 2b + 4c = 12$, $b + 4c = 11$, $c = 3$; folglich:

$$\varphi x = \frac{2}{(2 - x)^3} - \frac{1}{(2 - x)^2} + \frac{3}{2 - x}.$$

6) Aus $\frac{3 + x}{(x + 1)(x - 1)(x - 2)} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x - 2}$

folgt:

$$3 + x = a(x - 1)(x - 2) + b(x + 1)(x - 2) + c(x + 1)(x - 1).$$

Man kann jetzt auch a, b und c auf folgende Weise finden: Je zwei Glieder rechts haben immer einen gemeinschaftlichen Factor, fallen also fort, wenn dieser Null ist. Nun ist aber die vorstehende Gleichung für jeden Werth von x richtig. Wählt man also $x = -1$, so folgt $2 = 6a$; $a = \frac{1}{3}$. Wählt man $x = 1$, so folgt $4 = -2b$; $b = -2$. Wählt man $x = 2$, so folgt $5 = 3c$; $c = \frac{5}{3}$; daher

$$\frac{x + 3}{(x + 1)(x - 1)(x - 2)} = \frac{1}{3(x + 1)} - \frac{2}{x - 1} + \frac{5}{3(x - 2)}.$$

7) $\frac{3+2x}{(2+x)(1+2x)} = \frac{1}{3(2+x)} + \frac{4}{3(1+2x)}$.

8) $\frac{2+x+x^2}{(2+x)(1+2x)(2-3x)} = \frac{1}{3(1+2x)} - \frac{1}{6(2+x)} + \frac{1}{2(2-3x)}$.

9) $\frac{38+56x+20x^2}{(2+x)(3+2x)(4+3x)} = \frac{3}{2+x} + \frac{4}{3+2x} - \frac{5}{4+3x}$.

10) $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$.

11) $\frac{2+x^2}{(1+x^2)(1-x)} = \frac{1+x}{2(1+x^2)} + \frac{3}{2(1-x)}$.

12) $\frac{5+13x-12x^2}{12-3x-12x^2+3x^3} = \frac{3}{4-x} + \frac{1}{3(1-x)} - \frac{2}{3(1+x)}$.

Viertes Kapitel.

Reihen für Potenzen und Logarithmen. Weitere Ausführung der Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. Die Kreis-Functionen.

§. 207.

Verwandlung der Potenz A^x in eine Reihe. Das natürliche Logarithmen-System.

Eine der wichtigsten und erfolgreichsten Aufgaben der Analysis ist folgende:

Es sei A eine absolute, x eine beliebige reelle Zahl; man soll A^x in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln.

Auflös. Da $A^0 = 1$ ist, so muß die Reihe mit 1 beginnen; man setzt also:

1) $A^x = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \ldots$.

Da a, b, c, ... von x unabhängig sein sollen, so muß

$A^y = 1 + ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \ldots$ und noch

$A^{x+y} = 1 + a(x+y) + b(x+y)^2 + c(x+y)^3 + d(x+y)^4 + e(x+y)^5 + \ldots$

sein. Soll nun die gesuchte Reihe der Potenz gleich sein, so muß sie auch dem Gesetz der Potenz $A^x A^y = A^{x+y}$ genügen, d. h. es muß

$(1+ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+\ldots)\cdot(1+ay+by^2+cy^3+dy^4+ey^5+\ldots)$

$= 1+a(x+y)+b(x+y)^2+c(x+y)^3+d(x+y)^4+e(x+y)^5+\ldots$

sein. Ordnet man beide Seiten nach den Potenzen von y, so folgt:

$(1+ax+bx^2+cx^3+dx^4+\ldots)+(a+a^2x+abx^2+acx^3+adx^4+\ldots)y+(b+abx+\ldots)y^2+\ldots$

$=(1+ax+bx^2+cx^3+dx^4+\ldots)+(a+2bx+3cx^2+4dx^3+5ex^4+\ldots)y+(b+3cx+\ldots)y^2+\ldots$

Die ersten Glieder beider Reihen sind identisch; weil die Reihen

aber für jeden Werth von y einander gleich sein sollen, so müssen auch die Coefficienten von y^1 einander gleich sein, d. h.

$a + a^2x + abx^2 + acx^3 + adx^4 \ldots = a + 2bx + 3cx^2 + 4dx^3 + 5ex^4 + \ldots,$

und weil wieder diese Gleichung für jeden Werth von x richtig sein soll, so folgt:

$$a = a,$$

$$2b = a^2, \text{ daher } b = \frac{a^2}{2},$$

$$3c = ab \quad " \quad c = \frac{a^3}{3!},$$

$$4d = ac \quad " \quad d = \frac{a^4}{4!},$$

$$5e = ad \quad " \quad e = \frac{a^5}{5!}, \text{ u. s. w.}$$

Der Werth von a bleibt vorläufig unbestimmt; setzt man aber die Werthe von b, c, d, ... in 1) ein, so folgt:

$$2) \quad A^x = 1 + ax + \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^3}{3!}x^3 + \frac{a^4}{4!}x^4 + \frac{a^5}{5!}x^5 + \ldots$$

Da a von x nicht abhängig ist, so kann a nur von A abhängig sein und muß nun durch A ausgedrückt werden. Giebt es aber eine reelle Reihe für A^x, also einen reellen Werth von a, so ist auch $\frac{1}{a}$ reell; folglich muß die Reihe 2) auch richtig werden, wenn man $\frac{1}{a}$ statt x setzt. Dann entsteht aber

$$A^{\frac{1}{a}} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

Diese Reihe haben wir schon früher betrachtet. Sie ist convergent, und wir haben in §. 197. ihre Summe $= 2{,}7182818284\ldots$ gefunden. Wir wollen von jetzt an diese Zahl (nach Euler) mit e bezeichnen, haben also, wenn

$$e = 2{,}7182818284\ldots$$

ist, dann $A^{\frac{1}{a}} = e$, folglich $A = e^a$; daher

$$a = \overset{e}{\log} A$$

Alle Logarithmen zur Basis e bilden das natürliche Logarithmensystem und heißen natürliche oder Nepersche Logarithmen (nach ihrem Erfinder: Napier, Baron von Merchiston; lebte in Schottland 1550—1618), zuweilen auch nach geometrischen Betrachtungen hyperbolische Logarithmen. Den natürlichen Loga-

rithmus bezeichnen wir durch log. nat. (logarithmus naturalis) oder durch ln, und es ist daher

$$a = \ln A.$$

Setzt man diesen Werth in 2) ein, so folgt:

$$\text{I.}\quad A^x = 1 + \frac{\ln A}{1!}x + \frac{(\ln A)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln A)^3}{3!}x^3 + \frac{(\ln A)^4}{4!}x^4 + \ldots.$$

ln e = a
e = e^a
a = 1
ln e = 1

Die Reihe convergirt für jeden reellen Werth von x; denn es ist $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x \ln A}{n}$, und dieser Quotient wird für ein gehörig großes n immer echt und nähert sich für steigende Werthe von n der Null.

Setzt man in I. e statt A, so folgt:

$$\text{II.}\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots.$$

Setzt man endlich in II. $x \ln A$ statt x, so erhält man unmittelbar die Reihe I. wieder, folglich ist noch

$$\text{III.}\quad A^x = e^{x \ln A}.$$

Zur Vervollständigung der Auflösung ist jetzt die Untersuchung nöthig, ob die in I. und II. gefundenen Reihen wirklich den Potenzen A^x und e^x gleich sind, also bei jedem reellen Werthe von x für sie gesetzt werden können. Diese Untersuchung zerfällt in zwei eng zusammenhängende Theile. Wir haben die Reihen durch das Gesetz $A^x \cdot A^y = A^{x+y}$ erhalten; es fragt sich also erstens: ob dies Gesetz so charakteristisch für die Potenz ist, daß es keiner andern Function von x entspricht; zweitens aber: ob die Reihen auch diesem Gesetze und allen Sätzen der Potenz entsprechen.

Die erste Frage ist also folgende: wenn $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x+y)$ ist, muß dann nothwendig φx eine Potenz mit dem Exponenten x und einem constanten Dignanden sein?

Der Beweis ist kurz folgender (vergl. §. 203.):

Aus $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x+y)$ folgt, $x = y$ gesetzt:

$[\varphi(x)]^2 = \varphi(2x)$, daher auch $[\varphi(x)]^3 = \varphi(3x)$, u. s. w.; allgemein, wenn n eine positive ganze Zahl ist:

$$(1.)\quad [\varphi(x)]^n = \varphi(nx).$$

Setzt man $x = 1$, so ist hieraus $[\varphi(1)]^n = \varphi(n)$, und $\varphi(1)$ ist constant, kann also durch A bezeichnet werden. Man hat also:

$$(2.)\quad \varphi(n) = A^n,$$

d. h. $\varphi(x) = A^x$ ist erwiesen, wenn x eine positive ganze Zahl ist.

Aus (1.) folgt, wenn p und q ganze positive Zahlen sind, $\left[\varphi\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = \varphi(p) = A^p$, folglich

$$(3.)\quad \varphi\left(\frac{p}{q}\right) = A^{\frac{p}{q}},$$

d. h. $\varphi(x) = A^x$ ist jetzt auch für gebrochene Werthe von x bewiesen.

Setzt man für x immer kleinere und kleinere Brüche, die sich ohne Aufhören der Null nähern, so nähert sich A^x der 1; folglich ist $\varphi(0) = 1$. Nun folgt aus $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x + y)$, wenn man $y = -x$ setzt: $\varphi(x) \cdot \varphi(-x) = \varphi(0) = 1$; folglich:

$$(4.)\quad \varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{A^x} = A^{-x}.$$

Hiedurch ist endlich $\varphi(x) = A^x$ auch für negative Werthe von x bewiesen.

Um nun zu beweisen, daß die Reihen I. und II. dem Gesetze $A^x \cdot A^y = A^{x+y}$ entsprechen, kann man es füglich von der Reihe II. allein beweisen, weil A^x in $e^{x \ln A}$ verwandelt werden kann. Es fragt sich also, ob die Reihe für e^x mit der für e^y multiplicirt, die Reihe für e^{x+y} giebt. Dies ist, wie folgt, zu zeigen:

$$\begin{array}{l}
e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + \ldots \\
e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{y^n}{n!} + \ldots; \text{ multipl.:} \\
\hline
e^x \cdot e^y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \\
\qquad + y + xy + \frac{x^2 y}{2!} + \frac{x^3 y}{3!} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1} \cdot y}{(n-1)!} + \ldots \\
\qquad\qquad + \frac{y^2}{2!} + \frac{xy^2}{2!} + \frac{x^2 y^2}{2!\,2!} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-2} y^2}{(n-2)!\,2!} + \ldots \\
\qquad\qquad\qquad + \frac{y^3}{3!} + \frac{xy^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-3} y^3}{(n-3)!\,3!} + \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{y^4}{4!} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-4} y^4}{(n-4)!\,4!} + \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots + \frac{x^2 \cdot y^{n-2}}{2!\,(n-2)!} + \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots + \frac{xy^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \frac{y^n}{n!} + \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \ldots \\
\hline
e^x \cdot e^y = 1 + (x+y) + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2!} + \frac{x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3}{3!} + \frac{x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4}{4!} + \ldots \\
\ldots\ldots + \frac{x^n + nx^{n-1} y + n_2 x^{n-2} y^2 + n_3 x^{n-3} y^3 + \ldots + n_2 x^2 y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n}{n!} + \ldots
\end{array}$$

Das allgemeine Glied entsteht mit Hülfe des Satzes:

$$\frac{n!}{(n-a)!\,a!} = n_{n-a} = n_a$$

Nach dem binomischen Lehrsatze ist also:

$$e^x \cdot e^y = 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \frac{(x+y)^4}{4!} + \ldots + \frac{(x+y)^n}{n!} + \ldots,$$

d. h. $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$. Hieraus folgt aber unmittelbar, daß die übrigen Potenz-Sätze für e^x wahr sind, wenn man statt e^x die Reihe in II. setzt. Denn es ist $e^{x-y} \cdot e^y = e^x$, folglich $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$; und $(e^x)^x = e^x \cdot e^x \cdot e^x \ldots = e^{x+x+x+\cdots} = e^{nx}$.

Endlich ist noch $A^x \cdot A^y = e^{x \ln A} \cdot e^{y \ln A} = e^{(x+y)\ln A} = A^{x+y}$; folglich auch $A^{x-y} = \frac{A^x}{A^y}$, und $(A^x)^n = A^{nx}$. Will man noch beweisen, daß $A^x \cdot B^x = (AB)^x$ ist, wenn man statt der Potenzen die Reihen aus I. setzt, so hat man

$$A^x \cdot B^x = e^{x \ln A} \cdot e^{x \ln B} = e^{x(\ln A + \ln B)} = e^{x \ln(AB)} = (AB)^x;$$

hieraus folgt wieder $\frac{A^x}{B^x} = \left(\frac{A}{B}\right)^x$.

§. 208.

Die natürliche Potenz.

Es ist also jetzt vollständig erwiesen, daß

$$\text{I.} \quad A^x = 1 + \frac{\ln A}{1!}x + \frac{(\ln A)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln A)^3}{3!}x^3 + \ldots\ldots \quad \text{und}$$

$$\text{II.} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots$$

für jeden reellen Werth von x ist.

Dem aufmerksamen Leser kann aber nicht entgangen sein, daß in dem letzten Theile des vorigen §. noch mehr bewiesen worden ist, als zu beweisen unsere Absicht war. Indem wir nämlich zeigten, daß $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ ist, wenn man unter e^x, e^y, e^{x+y} die Reihen (aus II.) versteht, haben wir bei dem Beweise die Bedingung, daß x und y reelle Zahlen sein sollen, gar nicht benutzt; folglich haben wir bewiesen, daß die Reihen für A^x und e^x auch dann allen Gesetzen der Potenz entsprechen, wenn x eine ganz beliebige, also auch eine imaginäre oder complexe Zahl ist.

Hieraus folgt, daß man die Reihen in I. und II. bei jedem beliebigen reellen oder imaginären Werthe von x nicht nur durch resp. A^x und e^x bezeichnen, sondern auch, daß man dann immer mit A^x und e^x nach denselben Gesetzen rechnen kann, welche für Potenzen gelten.

Wir bezeichnen daher bei jedem beliebigen reellen oder imaginären Werth von x die Reihe

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

durch e^x und die Reihe

$$1+\frac{\ln A}{1!}x+\frac{(\ln A)^2}{2!}x^2+\frac{(\ln A)^3}{3!}x^3+\frac{(\ln A)^4}{4!}x^4+\dots$$

durch A^x, und nennen e^x die natürliche Potenz und A^x die künstliche Potenz. Letztere ist aber immer auf die natürliche Potenz durch den Satz $A^x = e^{x\ln A}$ zurückzuführen. Hiernach ist z. B.

$$2^{\sqrt{-2}} = 1+\frac{\ln 2}{1!}\sqrt{-2}+\frac{(\ln 2)^2}{2!}(\sqrt{-2})^2+\frac{(\ln 2)^3}{3!}(\sqrt{-2})^3+\dots.$$

Ferner ist $(2^{\sqrt{-2}})^3 = 2^{3\sqrt{-2}}$; $2^{\sqrt{-2}}\cdot 2^3 = 2^{3+\sqrt{-2}}$, u. s. w.

Es ist jetzt noch zu untersuchen, ob eine Potenz mit imaginären Exponenten immer eine bestimmte Zahl vorstellt. Nehmen wir allgemein den Exponenten in der Form $p+qi$, so ist $a^{p+qi} = a^p\cdot a^{qi}$. Weil aber a^p eine bestimmte Zahl vorstellt, so fragt es sich nur noch, ob auch a^{qi} eine bestimmte Zahl ist. Dies ist der Fall und so zu beweisen:

$$a^{qi} = 1+qi\ln a+\frac{(\ln a)^2}{2!}q^2i^2+\frac{(\ln a)^3}{3!}q^3i^3+\frac{(\ln a)^4}{4!}q^4i^4+\frac{(\ln a)^5}{5!}q^5i^5+\dots$$

Setzt man für alle Potenzen von i die Werthe, welche bekanntlich $+1$ oder -1, $+i$ oder $-i$ sind, und faßt alle reellen und alle imaginären Glieder zusammen, so folgt:

$$a^{qi} = \left(1-\frac{(\ln a)^2}{2!}q^2+\frac{(\ln a)^4}{4!}q^4-\frac{(\ln a)^6}{6!}q^6+\dots\right)$$
$$+\left(q\ln a-\frac{(\ln a)^3}{3!}q^3+\frac{(\ln a)^5}{5!}q^5-+\dots\right)i.$$

Die Reihen in den Klammern convergiren für jeden reellen Werth von q, sind also bestimmte Zahlen; folglich ist auch a^{qi} eine solche bestimmte Zahl.

§. 209.

Der allgemeine Logarithmus und die allgemeine Potenz.

Wir können jetzt auch den Logarithmus allgemeiner auffassen, als dies früher geschehen konnte. Es war $\overset{b}{\log} a$ die Zahl, mit welcher b potenzirt, a giebt; folglich mußte, so lange wir nur mit reellen Zahlen potenziren konnten, $\overset{b}{\log} a$ eine relle Zahl sein, und diese Beschränkung führte zu dem reellen Logarithmus, dessen Basis und

Logarithmand positive Zahlen waren; $\overset{b}{\log}$ a war dann immer einer einzigen reellen Zahl gleich.

Der allgemeine natürliche Logarithmus von a, den wir immer Log. nat. a schreiben werden, soll jede reelle oder imaginäre Zahl x bezeichnen, für welche $e^x = a$ ist. Hiernach ist Log. nat. a, d. h. x, aus folgender Gleichung zu entwickeln:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots = a.$$

Man erkennt, daß Log. nat. a auch dann eine Bedeutung hat, wenn a eine beliebige complexe Zahl ist; welche Werthe aber Log. nat. a hat, kann erst später gezeigt werden; doch läßt sich vermuthen, daß Log. nat. a unendlich viele Werthe vorstellt, weil x aus einer Gleichung von unendlichem Grade zu entwickeln ist.

Mittelst des allgemeinen natürlichen Logarithmus können wir nun auch den Begriff des allgemeinen künstlichen Logarithmus $\overset{b}{\text{Log.}}$ a feststellen. Seine Bedeutung liegt in der Gleichung

$$\overset{b}{\text{Log.}}\, a = \frac{\text{Log. nat. } a}{\text{Log. nat. } b}$$

für jeden beliebigen Werth von a und b; oder auch: wenn $\overset{b}{\text{Log.}}\, a = x$ gesetzt wird, ist x aus der Gleichung

$$1 + \frac{\text{Log. nat. } b}{1!}\, x + \frac{(\text{Log. nat. } b)^2}{2!}\, x^2 + \frac{(\text{Log. nat. } b)^3}{3!}\, x^3 + \ldots = a$$

zu entnehmen. Auch dieser Logarithmus muß, wenn schon Log. nat. a unendlich viele Werthe hat, um so mehr ein vieldeutiger Ausdruck sein.

Schließlich können wir noch die allgemeine Potenz a^x dahin definiren, daß sie für beliebige reelle oder imaginäre Werthe von a und x die Bedeutung hat, welche aus folgender Umformung zu entnehmen ist:

$$a^x = e^{x \cdot \text{Log. nat. } a}.$$

Man schreibt die allgemeine Potenz (nach Cauchy) häufig so: $((a^x))$.

§. 210.

Reihen für Logarithmen.

ln x kann in eine nach den steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe nicht verwandelt werden, weil $\ln 0 = -\infty$ ist. Wir stellen daher die Aufgabe: $\ln(1 + x)$ in eine nach steigenden Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln.

Formen wir $(1 + x)^n$ nach §. 208., I. in eine nach den Potenzen von n und dann auch nach dem binomischen Lehrsatze in eine nach den Potenzen von x fortlaufende Reihe um, so müssen beide Reihen für

jeden Werth von n (und auch von x) einander gleich sein; folglich ist:

$$1 + \frac{\ln(1+x)}{1!}n + \frac{[\ln(1+x)]^2}{2!}n^2 + \ldots = 1 + nx + n_2x^2 + \ldots$$

Lassen wir auf beiden Seiten 1 fort und heben dann durch n, so entsteht:

$$\ln(1+x) + \frac{[\ln(1+x)]^2}{2!}n + \ldots = x + \frac{n-1}{2}x^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}x^3$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \ldots$$

Verwandelt man die rechte Seite auch in eine nach den Potenzen von n fortschreitende Reihe, so müssen dann die ersten Glieder beider Reihen nach §. 204., II. einander gleich sein. Diese Glieder erhält man aber bequemer, wenn man in die vorstehende Gleichung 0 statt n setzt; dann entsteht:

$$\text{I.} \quad \ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + - + \ldots$$

Diese Reihe convergirt für $x = 1$ und für jeden Werth von x zwischen $+1$ und -1; sie gestattet also nur eine beschränkte Anwendung. Aber aus ihr ergiebt sich auf folgende Weise eine brauchbare Formel: Setzt man in I. $-x$ statt x, so folgt:

$$\ln(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 - - \ldots.$$

Zieht man diese Gleichung von I. ab und setzt noch

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \text{ so folgt:}$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \ldots\ldots\right].$$

Diese Reihe convergirt, wenn x ein echter Bruch; es läßt sich aber nachweisen, daß x für jeden positiven Werth von $\frac{1+x}{1-x}$ ein echter Bruch ist; denn setzt man $\frac{1+x}{1-x} = z$, so folgt $x = \frac{z-1}{z+1}$, und man erhält:

$$\text{II.} \quad \ln z = 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^7 + \ldots\right].$$

$$\text{z. B.} \quad \ln 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \ldots\right].$$

Die Reihe II. convergirt für jeden positiven Werth von z; sie hat aber den Mangel, daß sie um so langsamer convergirt, je größer z ist. Es lassen sich aber aus ihr schneller convergirende Reihen

ableiten. Setzt man $z = \frac{a+d}{a}$, so ist $\ln z = \ln(a+d) - \ln a$ und $\frac{z-1}{z+1} = \frac{d}{2a+d}$; folglich:

$$\text{III.}\quad \ln(a+d) = \ln a + 2\left[\frac{d}{2a+d} + \frac{1}{3}\left(\frac{d}{2a+d}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{d}{2a+d}\right)^5 + \dots\right].$$

Nach dieser Formel ist $\ln(a+d)$ zu berechnen, wenn $\ln a$ bekannt ist. Wenn d im Verhältniß zu 2a sehr klein ist, so convergirt diese Reihe außerordentlich schnell. Ist z. B. a eine fünfziffrige Zahl und $d = 1$ oder < 1, und nehmen wir den ungünstigsten Fall, nämlich $a = 10000$ und $d = 1$, so ist:

$$\ln 10001 = \ln 10000 + 2\left[\frac{1}{20001} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{20001}\right)^3 + \dots\right].$$

Das zweite Glied $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{20001}\right)^3$ hat erst in der 14ten Decimalstelle eine Ziffer, welche nicht Null ist; man kann daher, wenn $\ln 10001$ auf 7 Decimalstellen berechnet werden soll, mit voller Genauigkeit $\ln(a+d) = \ln a + \frac{2d}{2a+d}$ setzen.

Ferner ist bei unserem Beispiel $\frac{2d}{2a+d} = \frac{2}{20001} = 0{,}0000999950\dots$

Läßt man aber im Nenner des Bruches $\frac{2d}{2a+d}$, d fort, so ist $\frac{2d}{2a} = \frac{d}{a} = 0{,}0001$. Der Unterschied also, wenn man in die letzte Formel $\frac{d}{a}$ statt $\frac{2d}{2a+d}$ setzt, beträgt noch nicht 5 Einheiten der 9ten Decimalstelle. Da hierbei immer der ungünstigste Fall angenommen wurde, so kann man sonach, wenn a eine fünfziffrige Zahl, d aber $= 1$ oder < 1 ist und der Logarithmus auf 7 Decimalstellen berechnet werden soll, mit voller Sicherheit

$$\ln(a+d) = \ln a + \frac{d}{a}$$ setzen. Hieraus folgt

$$\ln(a+d) - \ln a = \frac{d}{a}$$ und auch

$$\ln(a+d') - \ln a = \frac{d'}{a};$$ daher, wenn man dividirt:

$$\text{IV.}\quad \ln(a+d) - \ln a : \ln(a+d') - \ln a = d : d'$$

d. h. die Differenzen der Logarithmen wenig verschiedener Zahlen verhalten sich (beinahe) zu einander, wie die Differenzen der Zahlen selbst.

Nach diesem Gesetz geschieht das Interpoliren. Kennt man z. B. ln 34725 und ln 34726 und soll ln 34725,84 bestimmen, so hat man:

$$\ln 34726 - \ln 34725 : \ln 34725{,}84 - \ln 35725 = 1 : 0{,}84;$$

folglich ist:

$$\ln 34725{,}84 = \ln 34725 + 0{,}84\,(\ln 34726 - \ln 34725).$$

Das Gesetz gilt auch für Briggs'sche Logarithmen, wie nachher gezeigt werden wird. (Vergl. §. 127.)

Setzt man in III. $d = 1$, so folgt:

$$\text{V.}\quad \ln(a+1) = \ln a + 2\left[\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2a+1}\right)^5 + \ldots\right].$$

Eine noch schneller convergirende Reihe entsteht, wenn man in II. $z = \frac{a^2}{a^2-1}$ setzt; dann wird $\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{2a^2-1}$, und man erhält:

$$\text{VI.}\quad \ln(a+1) = 2\ln a - \ln(a-1) - 2\left[\frac{1}{2a^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2a^2-1}\right)^3 + \ldots\right].$$

Bei der Berechnung der Logarithmen der natürlichen Zahlen könnte man hiernach so verfahren:

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \ldots\right] \text{ nach V.}$$

$$\ln 3 = 2\ln 2 - 2\left[\frac{1}{7} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{7}\right)^5 + \ldots\right] \text{ nach VI.}$$

$$\ln 4 = 2\cdot\ln 2.$$

$$\ln 5 = 2\cdot\ln 4 - \ln 3 - 2\left[\frac{1}{31} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{31}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{31}\right)^5 + \ldots\right].$$

$$\ln 6 = \ln 2 + \ln 3.$$

$$\ln 7 = 2\cdot\ln 6 - \ln 5 - 2\left[\frac{1}{71} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{71}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{71}\right)^5 + \ldots\right].$$

$$\ln 8 = 3\cdot\ln 2; \text{ u. s. w.}$$

Anmerkung. Um den natürlichen Logarithmus einer complexen Zahl von der Form $1 + zi$ zu finden, kann man die Formel I. benutzen, indem man zi statt x setzt. Der gesuchte Logarithmus kann nicht reell sein, wie bereits früher gezeigt wurde; wir mußten außerdem vermuthen, daß er unendlich viele Werthe hat, und schrieben diesen allgemeinen Logarithmus: Log. nat. $(1 + zi)$.

Da die Entwickelung der Formel I. zuläßt, daß x imaginär ist, so haben wir:

$$(1.)\quad \text{Log. nat.}\,(1+zi) = zi - \frac{1}{2}(zi)^2 + \frac{1}{3}(zi)^3 - \frac{1}{4}(zi)^4 + - + \ldots$$

Bringen wir die rechte Seite auf die Form $p + qi$, so folgt:

$$(2.)\quad \text{Log. nat.}\,(1+zi) = \frac{1}{2}\left[z^2 - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{3}z^6 - \frac{1}{4}z^8 + - + \ldots\right]$$
$$+ i\left[z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + - + \ldots\right].$$

So ergiebt sich für Log. nat. $(1+zi)$ allerdings nur ein Werth, und wir haben noch zu zeigen, daß es mehr als diesen einen giebt und wie alle zu finden sind. (Folgt in §. 221.) Zunächst kann man für den reellen Theil der rechten Seite in (2.) setzen: $\frac{1}{2}\ln(1+z^2)$ oder $\ln(\sqrt{1+z^2})$; folglich ist:

$$(3.)\quad \text{Log. nat.}\,(1+zi) = \ln[\sqrt{1+z^2}] + i\left[z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - + \ldots\right].$$

Setzt man $-z$ statt z, so folgt:

$$(4.)\quad \text{Log. nat.}\,(1-zi) = \ln[\sqrt{1+z^2}] - i\left[z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - + \ldots\right].$$

Zieht man jetzt (4.) von (3.) ab, so erhält man:

$$(5.)\quad \text{Log. nat.}\left[\frac{1+zi}{1-zi}\right] = 2i\left[z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + - + \ldots\right].$$

Diese Reihe (wie die vorhergehenden) convergirt für $z = \pm 1$ und für jeden Werth von z zwischen den Grenzen $+1$ und -1.

Beispiel. Welchen Werth hat $\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$ für $x = 0$?

Antw. Den Werth 2. — Man setzt für e^x, e^{-x} und $\ln(1+x)$ die Reihen, hebt durch x und schreibt dann 0 statt x.

§. 211.

Reihen für Briggs'sche Logarithmen.

Die entwickelten Formeln dienen aber auch zur Berechnung der Logarithmen eines jeden andern Systems. Es ist

$$\overset{b}{\log} a = \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{1}{\ln b}\cdot \ln a.$$

Den Bruch $\frac{1}{\ln b} = \frac{1}{2\left[\frac{b-1}{b+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^3 + \ldots\right]}$ nennt man den Model des Logarithmen-Systems zur Basis b (in Bezug auf das natürliche; vergl. §. 129.), und mit diesem Model hat man also nur die natürlichen Logarithmen zu multipliciren, um sie in Logarithmen des Systems zur Basis b zu verwandeln. — Der Model des Briggs'schen Logarithmen-Systems ist:

$$M = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}434\,294\,481\,903\ldots$$

Es ist also $\log z = M \cdot \ln z$; daher auch

$$\log z = 2M\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right],$$

und alle andern Formeln des §. 210. lassen sich nun in Formeln für Briggs'sche Logarithmen verwandeln. Die Formel III. im vorigen §. würde lauten:

$$\log(a+d) = \log a + 2M\left[\frac{d}{2a+d} + \frac{1}{3}\left(\frac{d}{2a+d}\right)^3 + \ldots\right].$$

Aus ihr folgt genau wie aus jener Formel (da M sich weghebt) die Näherungs-Formel:

$$\log(a+d) - \log a : \log(a+d') - \log a = d : d'.$$

Die Kreis-Function.

§. 212.

Die Functionen cos x und sin x.

Setzen wir in die natürliche Potenz

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

statt x zuerst xi, dann auch $-xi$ und bringen e^{xi} und e^{-xi} auf die Form $p + qi$ (vergl. den Schluß des §. 208.), so folgt:

$$1)\quad e^{xi} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - + \ldots\right)$$

$$2)\quad e^{-xi} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \ldots\right) - i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - + \ldots\right).$$

Die Reihen in den Klammern, deren merkwürdige Eigenschaften den weiteren Inhalt dieses Kapitels bilden und mit deren Hülfe noch mehrere unerledigt gebliebene Fragen beantwortet werden können, nennt man resp. den Cosinus von x und den Sinus von x und bezeichnet sie durch cos x und sin x. Man hat also:

$$\text{I.}\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \ldots$$

$$\text{II.}\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \ldots$$

Aus 1) und 2) folgt ferner:

$$\text{III.}\quad e^{xi} = \cos x + i \cdot \sin x.$$

$$\text{IV.}\quad e^{-xi} = \cos x - i \cdot \sin x.$$

Durch Addition und Subtraction beider Gleichungen folgt:

$$\text{V.}\quad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}.$$

$$\text{VI.}\quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.$$

Multiplicirt man aber III. mit IV., so folgt, weil $e^0 = 1$ ist:

$$\text{VII.}\quad \cos x^2 + \sin x^2 = 1.$$

Wir schreiben hier $\cos x^2$ und $\sin x^2$ statt $(\cos x)^2$ und $(\sin x)^2$. Hiervon wohl zu unterscheiden sind $\cos(x^2)$ und $\sin(x^2)$.

Die Gleichung VII. giebt zuerst einigen Aufschluß über die Werthe der Functionen $\cos x$ und $\sin x$. Wenn x reell ist, und solche Werthe werden wir immer voraussetzen, so können $\cos x$ und $\sin x$ nur innerhalb der Grenzen $+1$ und -1 liegen, und ist eine dieser Functionen $+1$ oder -1, so ist für dasselbe x die andere $= 0$, und umgekehrt. Uebrigens folgt aus I. und II. unmittelbar:

$$\text{VIII.}\quad \cos 0 = 1 \text{ und } \sin 0 = 0.$$

$$\text{IX.}\quad \cos(-x) = \cos(+x) \text{ und } \sin(-x) = -\sin(+x).$$

Es ist ferner $e^{(x+y)i} = e^{xi} \cdot e^{yi}$, folglich aus III. und IV.:

$$\cos(x+y) + i \cdot \sin(x+y) = (\cos x + i \cdot \sin x)(\cos y + i \cdot \sin y).$$

Löst man rechts die Klammern auf, so entsteht:

$$\cos(x+y) + i \cdot \sin(x+y) = (\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y)$$
$$+ i(\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y);$$ daher nach §. 155.:

$$\text{X.}\quad \cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y.$$

$$\text{XI.}\quad \sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y.$$

Setzt man $-y$ statt y, so folgt mit Hülfe von IX.:

$$\text{XII.}\quad \cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y.$$

$$\text{XIII.}\quad \sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y.$$

§. 213.

Die einfache Moivre'sche Formel. Eine Anwendung derselben.

Aus $(e^{\pm xi})^n = e^{\pm nx \cdot i}$ folgt (§. 212., III. und IV.)

$$\text{I.}\quad (\cos x \pm i \cdot \sin x)^n = \cos(nx) \pm i \cdot \sin(nx).$$

Daher auch $\left(\cos\frac{x}{n} \pm i \cdot \sin\frac{x}{n}\right)^n = \cos x \pm i \cdot \sin x$; folglich

$$\text{II.}\quad \sqrt[n]{\cos x \pm i \cdot \sin x} = \cos\frac{x}{n} \pm i \cdot \sin\frac{x}{n}.$$

Man erkennt hieraus, daß die Formel I. auch gilt, wenn n eine gebrochene Zahl ist. Auch für negative Exponenten gilt sie; denn es ist:

$(\cos x \pm i \cdot \sin x)^{-n} = \dfrac{1}{\cos(nx) \pm i \cdot \sin(nx)} = \cos(nx) \mp i \cdot \sin(nx)$ (§. 212. VII.) $= \cos(-nx) \pm i \sin(-nx)$ (§. 212., IX.)

Die Formel I. oder II. wird die Moivre'sche Formel genannt (de Moivre lebte 1667—1754). Sie erhält später eine Vervollständigung.

Wendet man auf $(\cos x + i \cdot \sin x)^n$ die Moivre'sche Formel und dann auch den binomischen Lehrsatz an, so folgt:

$$\cos(nx) + i \cdot \sin(nx) = \cos x^n + n \cos x^{n-1} \sin x \cdot i + n_2 \cos x^{n-2} \sin x^2 \cdot i^2 + n_3 \cos x^{n-3} \sin x^3 \cdot i^3 + n_4 \cos x^{n-4} \sin x^4 \cdot i^4 + \ldots.$$

Trennt man die reellen Glieder von den imaginären, so folgt:

$$\cos(nx) + i \cdot \sin(nx) = (\cos x^n - n_2 \cos x^{n-2} \sin x^2 + n_4 \cos x^{n-4} \sin x^4 - + \ldots) + i(n \cos x^{n-1} \sin x - n_3 \cos x^{n-3} \sin x^3 + n_5 \cos x^{n-5} \sin x^5 - + \ldots)$$

Hieraus folgt nach §. 155.:

$$\text{III.} \quad \cos(nx) = \cos x^n - n_2 \cos x^{n-2} \sin x^2 + n_4 \cos x^{n-4} \sin x^4 - n_6 \cos x^{n-6} \sin x^6 + - + \ldots$$

$$\text{IV.} \quad \sin(nx) = n \cos x^{n-1} \sin x - n_3 \cos x^{n-3} \sin x^3 + n_5 \cos x^{n-5} \sin x^5 - n_7 \cos x^{n-7} \sin x^7 + - + \ldots$$

Das Gesetz des Fortschreitens dieser Reihen ist klar; sie brechen ab, sobald der Binomial-Coefficient Null wird. z. B.

$$\text{V.} \quad \cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2.$$

Weil aber $\cos x^2 + \sin x^2 = 1$ ist, so folgt aus V. noch:

$$\text{VI.} \quad \cos 2x = 2 \cos x^2 - 1 = 1 - 2 \sin x^2.$$ Ferner:

$$\text{VII.} \quad \cos 3x = \cos x^3 - 3 \cos x \cdot \sin x^2; \text{ u. s. w.}$$

$$\text{VIII.} \quad \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x.$$

$$\text{IX.} \quad \sin 3x = 3 \cos x^2 \sin x - \sin x^3; \text{ u. s. w.}$$

§. 214.

Stetigkeit der Functionen cos x und sin x. Ihre Ableitungen.

Es ist $\cos(x + k) = \cos x \cdot \cos k - \sin x \cdot \sin k$
$\sin(x + k) = \sin x \cdot \cos k + \cos x \cdot \sin k.$

Setzt man für cos k und sin k die Reihen, so folgt:

$$\cos(x+k) = \cos x \left(1 - \frac{k^2}{2!} + \frac{k^4}{4!} - + \ldots\right) - \sin x \left(k - \frac{k^3}{3!} + \frac{k^5}{5!} - + \ldots\right)$$

$$\sin(x+k) = \sin x \left(1 - \frac{k^2}{2!} + \frac{k^4}{4!} - + \ldots\right) + \cos x \left(k - \frac{k^3}{3!} + \frac{k^5}{5!} - + \ldots\right)$$

Ordnet man, so entsteht:

$$\cos(x+k) = \cos x - \sin x \cdot k - \frac{\cos x}{2!}k^2 + \frac{\sin x}{3!}k^3 + \frac{\cos x}{4!}k^4 - \ldots.$$

$$\sin(x+k) = \sin x + \cos x \cdot k - \frac{\sin x}{2!}k^2 - \frac{\cos x}{3!}k^3 + \frac{\sin x}{4!}k^4 + \ldots.$$

Alle Coefficienten dieser Reihen sind echte Brüche, die nach und nach (der Nenner wegen) immer kleiner werden; folglich sind cos x und sin x stetige Functionen von x. Man erkennt ferner aus diesen Reihen:

die erste Ableitung von cos x ist — sin x
die erste Ableitung von sin x ist + cos x.

Nimmt man wieder von der ersten Ableitung die Ableitung, so folgt:

die zweite Ableitung von cos x ist — cos x
die zweite Ableitung von sin x ist — sin x.

Hieraus folgt, wenn man noch erwägt, daß cos x und sin x nicht für denselben Werth von x zu Null werden können, daß bei einem fortwährenden Wachsen von x:

1) cos x dann auch wächst, so lange sin x negativ ist, hingegen fällt, wenn sin x positiv ist; sin x aber wächst für die Werthe von x, für welche cos x positiv ist, und fällt, so lange cos x negativ ist.

2) Jeder Werth von x, welcher die eine beider Functionen zu Null macht, macht die andere zu einem Maximum oder Minimum, je nachdem diese andere Function dann einen positiven oder negativen Werth annimmt.

§. 215.

Die Functionen tg x, cotg x, sec x und cosec x.

Die Quotienten $\frac{\sin x}{\cos x}$, $\frac{\cos x}{\sin x}$, $\frac{1}{\cos x}$, $\frac{1}{\sin x}$, welche wieder Functionen von x sind, nennt man resp. die Tangente, Cotangente, Secante und Cosecante von x. Man hat sonach folgende Gleichungen, welche auch die Schreibart dieser Functionen zeigen:

$$\text{I.} \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

$$\text{II.} \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$\text{III.} \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

$$\text{IV.} \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Zwischen den sechs Functionen sin x, cos x, tg x, cotg x, sec x und cosec x, welche man ihrer Anwendung auf die Geometrie wegen Kreis-Functionen oder trigonometrische Functionen nennt, lassen sich noch manche für Anwendungen wichtige Formeln bilden.

z. B. $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$.

Dividirt man Zähler und Nenner durch $\cos x \cdot \cos y$, so entsteht:

$$\text{V.}\quad \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Setzt man in die Formel $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ für sin x und cos x die Reihen, so kann man nach der Methode der unbestimmten Coefficienten tg x in eine nach den Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandeln. Wichtiger aber ist eine Reihe, welche x durch tg x ausdrückt. Man erhält sie auf folgende Weise:

Es war $\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$ und $\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$; folglich durch Division:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2xi} - 1}{e^{2xi} + 1}.$$

Hieraus folgt:

$i \cdot \operatorname{tg} x \cdot (e^{2xi} + 1) = e^{2xi} - 1$. Aus dieser Gleichung läßt sich e^{2xi} entwickeln. Man erhält

$$e^{2xi} = \frac{1 + i \cdot \operatorname{tg} x}{1 - i \cdot \operatorname{tg} x}, \text{ folglich } 2xi = \text{Log. nat.}\left(\frac{1 + i \cdot \operatorname{tg} x}{1 - i \cdot \operatorname{tg} x}\right).$$

Setzt man aber in die Formel (5.) in der Anmerkung zu §. 210. tg x statt z, so entsteht:

$$2xi = 2i\,[\operatorname{tg} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg} x^3 + \tfrac{1}{5}\operatorname{tg} x^5 - \tfrac{1}{7}\operatorname{tg} x^7 + - + \ldots].$$

Hieraus folgt:

$$\text{VI.}\quad x = \operatorname{tg} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg} x^3 + \tfrac{1}{5}\operatorname{tg} x^5 - \tfrac{1}{7}\operatorname{tg} x^7 + \tfrac{1}{9}\operatorname{tg} x^9 - + \ldots$$

Die Reihe convergirt nur, wenn tg x innerhalb der Grenzen +1 und −1 liegt.

Anmerk. Die Reihe, welche für Log. nat. $\left(\frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}\right)$ gesetzt wurde, giebt nur einen Werth dieses Logarithmus; daher giebt auch die Formel VI. nur einen Werth für x. Bestätigt sich aber unsere Vermuthung, daß jener Logarithmus mehr als einen Werth hat, so wird auch x mehr als einen Werth haben, wenn tg x gegeben ist. In diesem Falle bedarf die Formel VI. einer Vervollständigung, welche sie auch in §. 217. V. erhält.

§. 216.
Auflösung der Gleichung $\cos x = 0$. Reihen für π. Periodicität der Kreis-Functionen.

Wir wollen jetzt den Functionen $\cos x$ und $\sin x$ noch näher treten und uns namentlich eine Uebersicht über alle Werthe verschaffen, welche diese Functionen annehmen, während x die reelle Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft. Da finden wir zunächst, daß unsere Untersuchung sich nur auf positive Werthe von x zu erstrecken braucht; denn es ist $\cos(-x) = \cos(+x)$ und $\sin(-x) = -\sin(+x)$.

Nun war $\cos 0 = 1$; es fragt sich also: wenn x von 0 an wächst, wie ändert sich $\cos x$?

Schreibt man aber die Reihe für $\sin x$ so:

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{2\cdot 3}\right)+\frac{x^5}{5!}\left(1-\frac{x^2}{6\cdot 7}\right)+\frac{x^9}{9!}\left(1-\frac{x^2}{10\cdot 11}\right)++\ldots,$$

so werden für $x = 2$ noch alle Differenzen in den Klammern positiv; dasselbe findet Statt, wenn x zwischen 0 und 2 liegt; folglich ist $\sin x$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 2$ eine positive Zahl, und $\cos x$ muß daher innerhalb dieser Grenzen fortwährend fallen, während x wächst (§. 214., 1.); es fragt sich, ob $\cos x$, wenn x von Null an wächst, für einen Werth von x zu Null wird. Wir wollen also jetzt den kleinsten positiven Werth von x suchen, für welchen $\cos x = 0$ ist.

Nach §. 213., VII. ist

$$\cos x = \left(\cos\frac{x}{3}\right)^3 - 3\cos\frac{x}{3}\left(\sin\frac{x}{3}\right)^2;$$

folglich setzen wir:

$$\left(\cos\frac{x}{3}\right)^3 - 3\cos\frac{x}{3}\left(\sin\frac{x}{3}\right)^2 = 0 \text{ oder}$$

$$\cos\frac{x}{3}\left[\left(\cos\frac{x}{3}\right)^2 - 3\left(\sin\frac{x}{3}\right)^2\right] = 0.$$

Dies Product wird Null, wenn entweder

$$\cos\frac{x}{3} = 0, \text{ oder } \left(\cos\frac{x}{3}\right)^2 = 3\left(\sin\frac{x}{3}\right)^2$$

ist. Die erste dieser beiden Gleichungen sagt nur, daß, wenn für irgend einen Werth von x der cos. gleich Null ist, dann der cos. des dreifachen Werthes ebenfalls Null ist. Aus

$$\left(\cos\frac{x}{3}\right)^2 = 3\left(\sin\frac{x}{3}\right)^2$$

folgt aber (§. 215., I.):

$$1 = 3\left(\operatorname{tg}\frac{x}{3}\right)^2 \text{ oder } \operatorname{tg}\frac{x}{3} = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Aus §. 215., VI. folgt daher:

$$1)\ \frac{x}{3} = \sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^9 - + \ldots$$

Hätten wir $\operatorname{tg}\frac{x}{3} = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ gesetzt, so hätten wir dieselbe Reihe negativ erhalten; wir wissen aber auch bereits, daß, wenn $\cos x = 0$ ist, dann auch $\cos(-x) = 0$ sein muß. Sondern wir in obiger Reihe $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ab und multipliciren noch mit 3, so folgt:

$$2)\ x = \sqrt{3}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^4 - + \ldots\right]$$

Diese Reihe convergirt leidlich schnell und giebt für x den Zahlenwerth:
$$x = 1{,}5707963\ldots.$$

Da diese Zahl innerhalb der Grenzen 0 und 2 liegt, so ist sie wirklich der kleinste positive Werth von x, für welchen $\cos x = 0$ ist.

Die eben gefundene Zahl ist in der Mathematik von der größten Wichtigkeit. Man bezeichnet das Doppelte dieser Zahl durch π und hat (wenn man noch weiter rechnet):

$$\text{I.}\quad \pi = 3{,}14159\,26535\,89793\ldots$$

Bekanntlich giebt dieselbe Zahl in der Geometrie das Verhältniß der Peripherie eines Kreises zum Durchmesser an, und wir finden dort (Geometr. §. 205.) für π ganz dieselbe Reihe, welche entsteht, wenn wir in 2) $\frac{\pi}{2}$ statt x setzen und noch mit 2 multipliciren:

$$\text{II.}\quad \pi = 2\sqrt{3}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^4 - + \ldots\right].$$

Man nennt diese Reihe die Lagny'sche Reihe. Der französische Mathematiker Lagny (geb. zu Lyon 1660, starb in Paris 1734) berechnete im Jahre 1719 nach dieser Reihe π auf 127 Decimalstellen.

Wir haben jetzt: $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, und weil $\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$ ist und $\sin x$ für jeden Werth von x zwischen 0 und 2 positiv, so hat man noch: $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Da ferner $\cos x$ von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ fällt, aber $\cos 0 = 1$ und $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ist: so muß innerhalb dieser Grenzen $\cos x$ immer positiv, folglich $\sin x$ im fortwährenden Steigen

begriffen sein (§. 214., 1.). Stellen wir dies zusammen, so haben wir

$x =$	0	wächst bis	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x =$	1	fällt bis	0
$\sin x =$	0	steigt bis	1

Nehmen wir noch für x den mittleren Zahlenwerth $\frac{\pi}{4}$, so ist nach §. 213., VI.

$$\cos\frac{\pi}{2} = 2\cos\frac{\pi^2}{4} - 1 = 1 - 2\sin\frac{\pi^2}{4}, \text{ woraus folgt:}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = +\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Hieraus folgt noch $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$; daher aus §. 215. VI.:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - + \cdots$$

Diese Reihe heißt die Leibnitz'sche Reihe. Leibnitz (geb. zu Leipzig 1646, starb 1716 in Hannover) fand sie im Jahre 1673.

Euler (geb. 1707 zu Basel, starb 1783 in Petersburg) gab folgendes Verfahren zur Berechnung von π an:

Zerlegt man $\frac{\pi}{4}$ in eine Summe, etwa $\frac{\pi}{4} = y + z$, so ist

$$\operatorname{tg}(y+z) = 1 = \frac{\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z} \text{ (§. 215. V.), woraus folgt:}$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{1 - \operatorname{tg} z}{1 + \operatorname{tg} z}.$$

Setzt man nun $\operatorname{tg} z = \frac{1}{2}$, so wird $\operatorname{tg} y = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$; folglich aus §. 215. VI.:

$$y = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + - + \cdots$$

$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + - + \cdots$$

Weil aber $y + z = \frac{\pi}{4}$ ist, so folgt:

$$\frac{\pi}{4} = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - + \cdots \\ + \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - + \cdots \end{array} \right\}.$$

Auf demselben Wege hat man später noch schneller convergirende Reihen für π gefunden.

Man findet noch einen Zusammenhang zwischen dem Cosinus und Sinus solcher zwei Zahlen, deren Summe gleich $\frac{\pi}{2}$ ist. Es ist nämlich nach §. 212., XII. und XIII.:

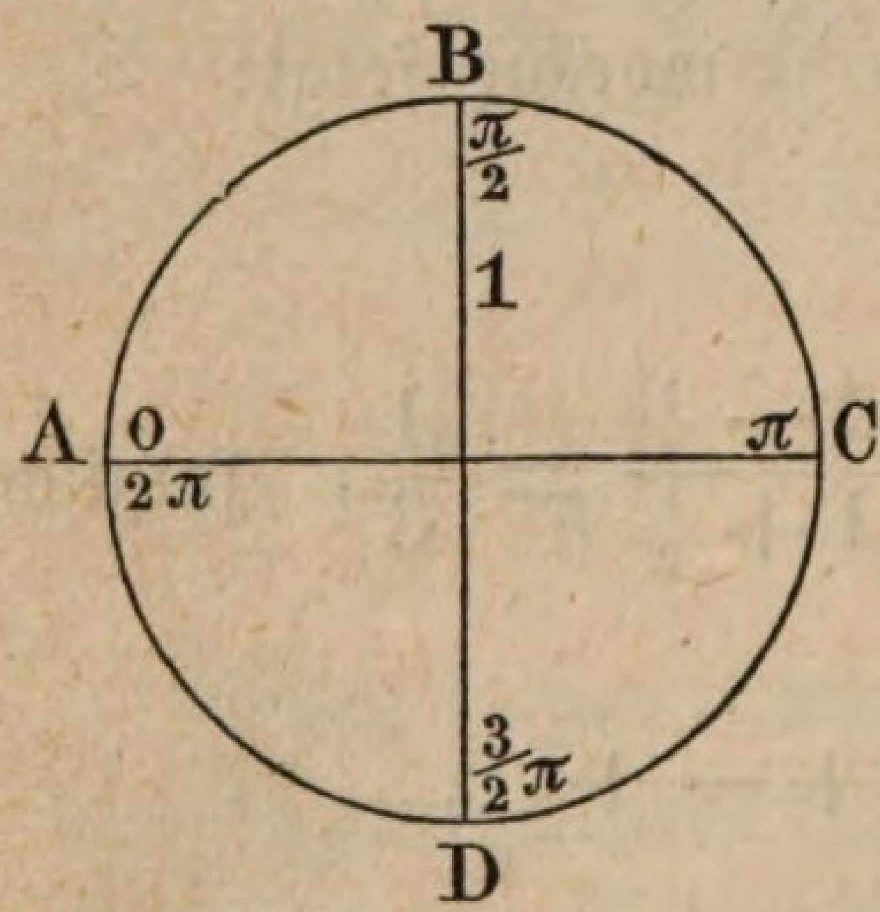
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos z + \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin z = \sin z$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\cdot z - \cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin z = \cos z.$$

III. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z.$

Hieraus folgt, daß $\cos x$, wenn x von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, nach und nach dieselben Werthe annimmt, welche $\sin x$ erhält, wenn x von $\frac{\pi}{2}$ bis 0 fällt, und umgekehrt.

Nachdem wir uns so eine allgemeine Uebersicht der Functionen cos. und sin. aller Zahlen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ verschafft haben, soll gezeigt werden, wie der cos. und sin. jeder größeren Zahl auf resp. cos. und sin. einer Zahl zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zurückzuführen ist. Um die Zahlen bequem zu übersehen, wollen wir sie in Abtheilungen theilen und diese Abtheilungen **Quadranten** nennen. Wir können nämlich jede Zahl als die Länge eines Bogens zum Radius 1 betrachten. Sind AC und BD zwei auf einander senkrechte Durchmesser, und nehmen wir A als Anfangspunkt jedes Bogens, denken uns den Bogen selbst aber in der Richtung von A nach B hin abgetragen: so hat bekanntlich Bogen AB die Länge $\frac{\pi}{2}$, AC die Länge π, AD die Länge $\frac{3}{2}\pi$, AA die Länge 2π, u. s. w. Ist also x eine Bogenlänge, so endet x im 1sten Quadranten, wenn x eine Zahl zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ist, im 2ten Quadranten, wenn x eine Zahl zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π ist, u. s. w. Sonach liegen



alle Zahlen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ im 1sten Quadranten,

" " " $\frac{\pi}{2}$ " π " 2ten "

alle Zahlen zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$ im 3ten Quadranten,

" " " $\frac{3}{2}\pi$ " 2π " 4ten "

" " " 2π " $\frac{5}{2}\pi$ " 5ten "

u. s. w. Die Zahl x selbst wollen wir einen **Bogen** nennen.

Bezeichnet nun z einen Bogen im ersten Quadranten, so liegt $\pi - z$ im 2ten, $\pi + z$ im 3ten und $2\pi - z$ im 4ten Quadranten. Nach den Formeln in §. 212., X.—XIII. findet man aber:

$$\cos\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -1; \ \sin\pi = 0.$$

$$\cos\frac{3}{2}\pi = 0; \ \ \sin\frac{3}{2}\pi = -1.$$

$\cos 2\pi = +1; \ \sin 2\pi = 0.$ Hieraus dann:

IV. $\cos(\pi - z) = -\cos z$ und $\sin(\pi - z) = +\sin z.$

V. $\cos(\pi + z) = -\cos z$ und $\sin(\pi + z) = -\sin z.$

VI. $\cos(2\pi - z) = +\cos z$ und $\sin(2\pi - z) = -\sin z.$

Endlich findet man noch, wenn x einen beliebigen Bogen (Zahl) bezeichnet:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \ \ \sin(x + 2\pi) = \sin x,$$

d. h. durch Addition (also auch durch Subtraction) von 2π zu x ändert sich weder der Cosinus, noch der Sinus. Daher ist allgemein:

VII. $\cos x = \cos(x \pm 2a\pi).$

VIII. $\sin x = \sin(x \pm 2a\pi).$

Die letzten beiden Formeln zeigen nun deutlich, daß cos x und sin x **periodische Functionen** sind, d. h. solche, welche periodisch immer wieder dieselben auf einander folgenden Werthe annehmen. Denn sie sagen, daß cos x und sin x unverändert bleiben, wenn man zu x ein beliebig Vielfaches von 2π addirt oder von x abzieht. Hiernach sind die Werthe dieser Functionen in den ersten 4 Quadranten genau dieselben, wie in den nächsten 4 Quadranten und wieder in den folgenden vieren (oder auch in den vorhergehenden 4 Quadranten) u. s. w. Wird z. B. cos 28,5 gesucht, so ist $4 \cdot 2\pi = 25{,}1327\ldots.$, folglich $\cos 28{,}5 = \cos(28{,}5 - 4 \cdot 2\pi) = \cos 3{,}3673$; wodurch cos 28,5 auf den Cosinus eines Bogens im 3ten Quadranten reducirt ist.

Durch die Formeln IV.—VI. kann man weiter cos. und sin. eines Bogens im 2ten, 3ten oder 4ten Quadranten auf den cos. und sin. eines Bogens im 1sten Quadranten reduciren; denn diese Formeln

sagen, daß sowohl die cos., als auch die sin. der 4 Bogen (Zahlen)

$$z, \quad \pi - z, \quad \pi + z, \quad 2\pi - z$$

gleiche absolute Werthe haben und nur die Vorzeichen verschieden sind. Diese sind in den 4 auf einander folgenden Quadranten

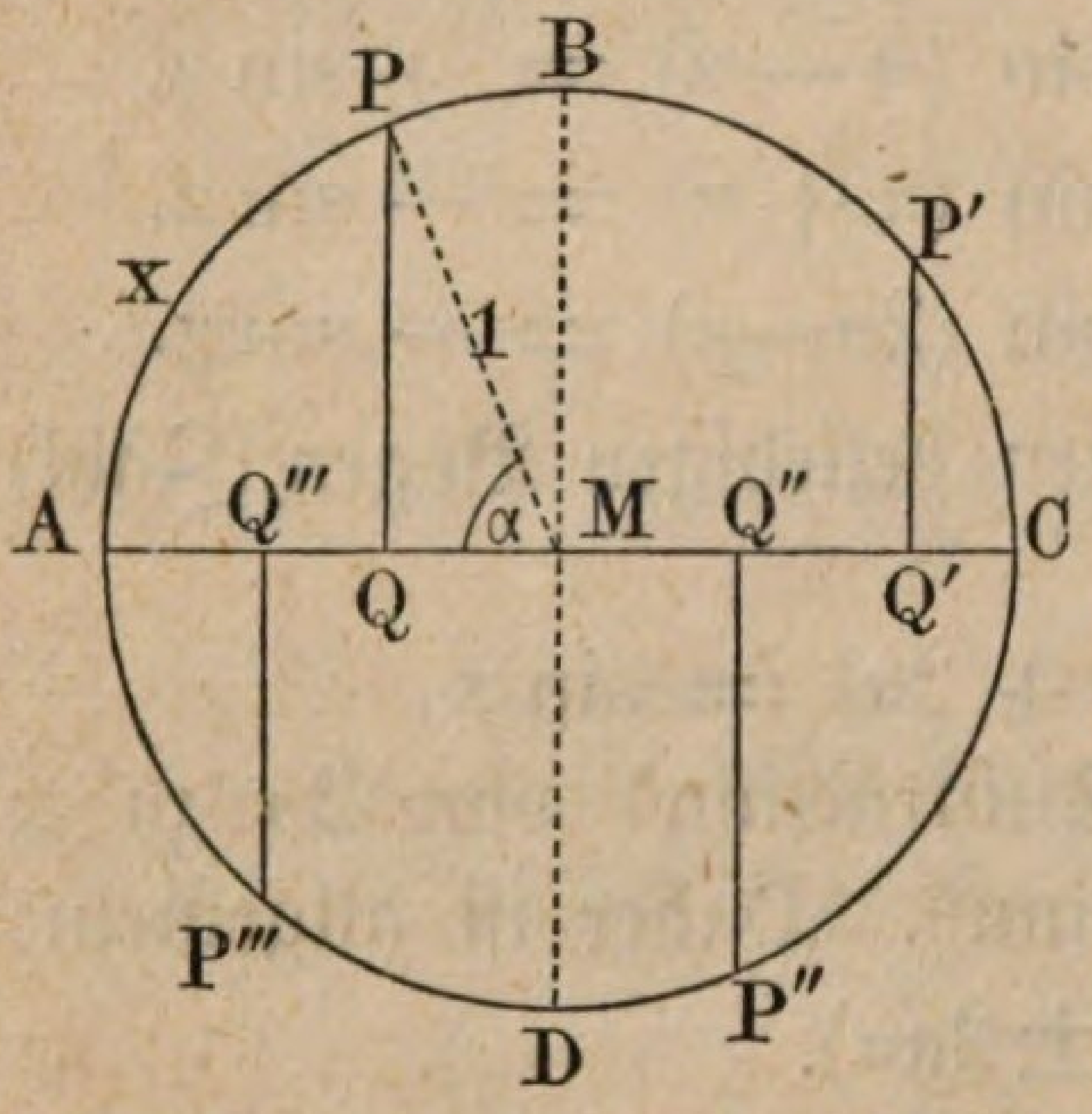
bei dem cos: $+ - - +$

bei dem sin: $+ + - -$

So ist also $\cos 3{,}3673 = -\cos(3{,}3673 - \pi) = -\cos 0{,}2257$. Je nachdem also x im 2ten, 3ten, 4ten Quadranten liegt, hat man resp.:

$$\cos x = -\cos(\pi - x); \quad \sin x = +\sin(\pi - x),$$
$$\cos x = -\cos(x - \pi); \quad \sin x = -\sin(x - \pi),$$
$$\cos x = +\cos(2\pi - x); \quad \sin x = -\sin(2\pi - x).$$

Um aber das von den Functionen $\cos x$ und $\sin x$ Gesagte bequemer zu übersehen und dem Gedächtniß einzuprägen, kann man eine Anwendung derselben auf die Geometrie (in der Trigonometrie) zu Hülfe nehmen.



Ist der Radius des Kreises um M gleich 1, AC ein Durchmesser, und wird jeder Bogen der Peripherie von A aus, wenn er positiv ist, nach B hin, wenn er negativ ist, nach D hin abgetragen: so hat der Endpunkt für AC als Abscissenlinie und M als Anfangspunkt der Abscissen eine bestimmte Abscisse und eine bestimmte Ordinate. Ist z. B. Bogen $AP = x$, so ist MQ die Abscisse, PQ die Ordinate des Punktes P. Es wird nun in der Trigonometrie (Geometr. §. 229.) nachgewiesen, daß $MQ = \cos x$ und $PQ = \sin x$ ist, und dies gilt für jeden beliebigen Werth von x, also auch für die Bogen AP', AP'', AP'''. Die Abscissen (also die cos.) sind positiv oder negativ, je nachdem sie links oder rechts von M liegen, die Ordinaten (also die sin.), je nachdem sie oberhalb oder unterhalb AC liegen. Da ferner der Bogen $AP = x$ der Arcus des Centriwinkels AMP ist, den wir α nennen wollen, da also $x = \text{arc}\,\alpha$ ist, folglich zu jedem x nur ein α, zu jedem α nur ein x gehört: so sagt man in der Regel $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ statt $\cos x$ und $\sin x$, und zwar geschieht dies hauptsächlich deshalb, weil die Tafeln, welche die cos. und die sin. oder ihre Logarithmen enthalten, nicht die Arcus, sondern die zugehörigen Winkel in Graden, Minuten und Secunden angeben. Der Leser wird hieraus erkennen, daß die Anwendung der Functionen cos. und sin. auf die Geometrie hier schon deshalb angeführt werden mußte, weil ohne die Benutzung von Tafeln, in welchen $\cos x$ und

sin x zu finden sind, die Analysis von diesen Functionen keinen bequemen Gebrauch machen kann; man würde dann in jedem Falle erst cos x und sin x berechnen müssen. Um aber die vorhandenen Tafeln benutzen zu können, muß man jede Zahl x als einen Arcus betrachten und den zugehörigen Winkel bestimmen, und kann dann erst mittelst der Tafeln cos x und sin x oder log cos x und log sin x finden. Ist aber $x = \text{arc}\,\alpha$, so findet man α aus x, oder x aus α mittelst der Gleichung $x : \pi = \alpha^\circ : 180^\circ$; folglich ist

$$\alpha^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ \text{ und } x = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi.$$

Man halte also wohl fest, daß folgende Ausdrücke identisch sind: $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ$; $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ$; $\cos\pi = \cos 180^\circ$; $\sin\frac{3}{2}\pi = \sin 270^\circ$; $\cos 3\pi = \cos 540^\circ$; $\sin 2\pi = \sin 360^\circ$; $\cos\frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ$; $\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ$; $\cos\frac{\pi}{6} = \cos 30^\circ$; allgemein:

$$\cos\left(\frac{n}{m}\pi\right) = \cos\left(\frac{n}{m}180^\circ\right); \quad \sin\left(\frac{n}{m}\pi\right) = \sin\left(\frac{n}{m}180^\circ\right).$$

Bemerkt mag noch werden, daß alle folgenden praktischen Rechnungen mit Hülfe der Logarithmen-Tafeln von Vega ausgeführt sind, und daß dieses Handbuch auch eine Tafel zur Reduction der Arcus auf Winkel und umgekehrt der Winkel auf Arcus enthält.

Was nun die wirkliche Ausrechnung der cos. und sin. betrifft, so geht aus III. hervor, daß man sie nur für Bogen von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ zu berechnen braucht. Setzt man jeden Bogen innerhalb dieser Grenze $= \frac{n}{m} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{n}{m} \cdot \text{arc}\,90^\circ$, so ist $\frac{n}{m} < \frac{1}{2}$, und man erhält:

$$\text{IX.} \quad \cos\left(\frac{n}{m} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{n}{m}\,90^\circ\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{n}{m}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{2^2 \cdot 2!} + \left(\frac{n}{m}\right)^4 \cdot \frac{\pi^4}{2^4 \cdot 4!} - \left(\frac{n}{m}\right)^6 \cdot \frac{\pi^6}{2^6 \cdot 6!} + - + \ldots$$

$$\text{X.} \quad \sin\left(\frac{n}{m} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{n}{m}\,90^\circ\right)$$

$$= \left(\frac{n}{m}\right) \cdot \frac{\pi}{2} - \left(\frac{n}{m}\right)^3 \cdot \frac{\pi^3}{2^3 \cdot 3!} + \left(\frac{n}{m}\right)^5 \cdot \frac{\pi^5}{2^5 \cdot 5!} - \left(\frac{n}{m}\right)^7 \cdot \frac{\pi^7}{2^7 \cdot 7!} + - + \ldots$$

Die Zahlenwerthe $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi^2}{2^2 \cdot 2!}$, $\frac{\pi^3}{2^3 \cdot 3!}$, u. s. w. hat Euler in

seiner Analysis des Unendlichen auf 28 Decimalstellen angegeben, bis zu dem Gliede, welches $\left(\frac{n}{m}\right)^{30}$ enthält.

Uebrigens hat man nur nöthig, die cos. und sin. bis $\frac{\pi}{6}$ (30°) direct zu berechnen. Um dies nachzuweisen, hat man:

$$\sin\frac{\pi}{3} = 2\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6}.$$

Weil aber $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ ist, so ist $\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6}$ (III.), folglich:

$$\cos\frac{\pi}{6} = 2\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6},$$ und hieraus:

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Daher noch $\cos\frac{\pi}{6} = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\cos\frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Bezeichnet nun z einen Bogen zwischen 0 und $\frac{\pi}{6}$, so hat man

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-z\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos z + \sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin z.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+z\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos z - \sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin z.$$

Subtrahirt man, und setzt $\frac{1}{2}$ statt $\sin\frac{\pi}{6}$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-z\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}+z\right) = \sin z,$$ folglich

$$\text{XI.}\quad \cos\left(\frac{\pi}{6}+z\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}-z\right) - \sin z.$$

Auf dieselbe Weise erhält man:

$$\text{XII.}\quad \sin\left(\frac{\pi}{6}+z\right) = \cos z - \sin\left(\frac{\pi}{6}-z\right).$$

z. B. $\cos 40^\circ = \cos 20^\circ - \sin 10^\circ.$
$\sin 34^\circ = \cos 4^\circ - \sin 26^\circ.$

§. 217.

Folgerungen.

1) Zu jedem Bogen x gehört nur ein cos. und ein sin.; hingegen haben unendlich viele Bogen denselben cos. und ebenfalls un-

endlich viele denselben sin. Dasselbe gilt für die anderen trigonometrischen Functionen. So ist $\cos x = 0$ für folgende Werthe von x: $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3}{2}\pi$, $\pm\frac{5}{2}\pi$, $\pm\frac{7}{2}\pi$ u. s. w. Ferner ist $\sin x = 0$, wenn x die Werthe hat: 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 4\pi$, u. s. w. Allgemein ist I. $\cos\left(\pm\frac{2a+1}{2}\pi\right) = 0$; $\sin(\pm a\pi) = 0$.

Eben so haben wir gefunden:

$$\text{II.}\quad \cos(\pm 2a\pi) = +1;\quad \sin\left(\frac{4a+1}{2}\pi\right) = +1.$$

$$\text{III.}\quad \cos[\pm(2a+1)\pi] = -1;\quad \sin\left(\frac{4a+3}{2}\pi\right) = -1.$$

Die Figur im vorigen §. zeigt deutlich alle diese Werthe; sie bestätigt auch das in §. 214., 1. und 2. Gesagte.

2) Ist $\cos x = p$ gegeben, so hat x innerhalb der ersten 4 Quadranten zwei Werthe, welche im 1sten und 4ten, oder im 2ten und 3ten Quadranten liegen, je nachdem p positiv, oder negativ ist. Zu jedem dieser Werthe kann man dann noch $\pm 2a\pi$ addiren. Ist $\sin x = q$ gegeben, so hat wieder x innerhalb der ersten 4 Quadranten zwei Werthe, welche im 1sten und 2ten, oder im 3ten und 4ten Quadranten liegen, je nachdem q positiv, oder negativ ist. Zu jedem kann man wieder noch $\pm 2a\pi$ addiren.

3) Sind aber zugleich $\cos x = p$ und $\sin x = q$ gegeben (so daß $p^2 + q^2 = 1$ sein muß), so hat x innerhalb der ersten 4 Quadranten nur einen Werth, und zwar liegt:

x im 1sten Quadranten, wenn p positiv, q positiv,
" 2ten " " p negativ, q positiv,
" 3ten " " p negativ, q negativ,
" 4ten " " p positiv, q negativ ist.

Zu diesem Werthe von x ist dann noch $\pm 2a\pi$ zu addiren. Da nun die Tafeln nur die cos. und sin., oder deren Logarithmen, für Bogen im ersten Quadranten (spitze Winkel) enthalten, so muß man immer zunächst aus dem absoluten Werthe von p oder q den Bogen x im ersten Quadranten mittelst der Tafeln suchen und ihn dann auf den richtigen Quadranten reduciren. Erhält man im richtigen Quadranten den Bogen $= \varphi$ oder den Winkel $= \alpha^\circ$, so ist

$$x = \varphi \pm 2a\pi \quad \text{oder} \quad x = \alpha^\circ \pm a \cdot 360^\circ.$$

4) Ist $\cos x = \cos y$ und zugleich

$\sin x = \sin y$,

so folgt aus §. 212., XII., VII. und XIII.:

$$\cos(x - y) = +1$$

$$\sin(x - y) = 0;$$ daher ist

$x - y = 0 \pm 2a\pi$, so daß innerhalb der ersten 4 Quadranten x und y einander gleich sein müssen.

5) Es ist $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin(x \pm 2a\pi)}{\cos(x \pm 2a\pi)} = \operatorname{tg}(x \pm 2a\pi)$.

Weil aber auch $\frac{\sin(x \pm \pi)}{\cos(x \pm \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$ ist, so ist auch $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x \pm \pi \pm 2a\pi)$. Hieraus folgt, daß überhaupt:

$$\text{IV.} \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x \pm a\pi) \text{ ist.}$$

Ist also $\operatorname{tg} x$ gegeben, und hat man einen Werth von x gefunden, so erhält man alle, wenn man noch $\pm a\pi$ addirt. Hieraus folgt, daß die Formel §. 215. VI., welche nur **einen** Werth von x angiebt, vervollständigt so heißt:

$$\text{V.} \quad x = \pm a\pi + \operatorname{tg} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg} x^3 + \tfrac{1}{5}\operatorname{tg} x^5 - \tfrac{1}{7}\operatorname{tg} x^7 + - + \ldots$$

§. 218.

Die verbesserte Moivre'sche Formel.

Nach §. 213. II. ist:

$$\sqrt[n]{\cos(x \pm 2a\pi) + i\sin(x \pm 2a\pi)} = \cos\left(\frac{x}{n} \pm \frac{a}{n}2\pi\right) \pm i\sin\left(\frac{x}{n} \pm \frac{a}{n}2\pi\right).$$

Der Radicand der nten Wurzel hat aber immer nur **einen** Werth, welche ganzen Zahlen man auch für a setzen mag, nämlich denselben, welchen er für $a = 0$ annimmt (§. 216., VII. und VIII.); folglich ist obige Formel kürzer so zu schreiben:

$$\text{I.} \quad \sqrt[n]{\cos x \pm i\sin x} = \cos\left(\frac{x}{n} \pm \frac{a}{n}2\pi\right) \pm i\sin\left(\frac{x}{n} \pm \frac{a}{n}2\pi\right).$$

Dies ist die **verbesserte Moivre'sche Formel**; aus ihr geht hervor, daß $\sqrt[n]{\cos x \pm i\sin x}$ mehr als einen Werth hat. Wie viele Werthe, werden wir gleich untersuchen; zunächst soll gezeigt werden, daß man, ohne einen Werth zu verlieren, die Formel I. einfacher so schreiben kann:

$$\text{II.} \quad \sqrt[n]{\cos x \pm i\sin x} = \cos\left(\frac{x}{n} + \frac{a}{n}2\pi\right) \pm i\sin\left(\frac{x}{n} + \frac{a}{n}2\pi\right);$$

d. h. man kann vor $\frac{a}{n}2\pi$ nur + statt ± setzen, dabei aber immer festhalten, daß für a nur 0 und positive ganze Zahlen gesetzt werden sollen. Der Grund aber, daß die Formel II. alle Werthe von

$\sqrt[n]{\cos x \pm i \sin x}$ enthält, welche in der Formel I. liegen, ist der, daß in II., wenn man für a setzt:

$$-1, \quad -2, \quad -3, \quad -4, \quad -5, \ldots\ldots, \quad -n$$

genau dasselbe herauskommt, als wenn man für a resp. setzt:

$$n-1, n-2, n-3, n-4, n-5, \ldots\ldots, n-n.$$

Die Bogen $\left(\frac{x}{n}+\frac{a}{n}2\pi\right)$ nämlich, welche sich für zwei zusammengehörige Werthe dieser zwei Reihen ergeben, sind immer um $\frac{n}{n}2\pi$, d. h. um 2π verschieden, haben also denselben cos. und denselben sin. Setzt man aber für a die Werthe

$$-n-1, -n-2, -n-3, \ldots\ldots,$$

so kommt aus demselben Grunde wieder dasselbe heraus, als wenn man resp. für a setzt:

$$-1, \quad -2, \quad -3, \ldots\ldots$$

Wie viel verschiedene Werthe für $\sqrt[n]{\cos x \pm i \sin x}$ enthält aber die Formel II.? Es sind deren gerade n, d. h. so viele, als der Wurzel-Exponent Einheiten hat. Setzt man nämlich für a die Werthe

$$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, n-2, n-1,$$

so erhält man n verschiedene Werthe für $\sqrt[n]{\cos x \pm i \sin x}$. Daß diese Werthe einander nicht gleich sind, geht daraus hervor, daß die Bogen $\left(\frac{x}{n}+\frac{a}{n}2\pi\right)$, welche sich für diese Werthe von a ergeben, von einander um weniger als 2π abweichen; folglich können wohl einmal ihre cos. oder auch ihre sin. einander gleich sein, nie aber gleichzeitig ihre cos. und ihre sin., wie dies aus §. 217., 4. folgt.

Setzt man ferner für a die Zahlen

$$n, n+1, n+2, n+3, \ldots\ldots, n+m$$

so kommen wieder dieselben Werthe heraus, welche sich resp. für a gleich: $\quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots\ldots, \quad m$

ergeben, weil die Bogen dann immer wieder um 2π verschieden sind; denn es ist

$$\left(\frac{x}{n}+\frac{n+m}{n}\cdot 2\pi\right)-\left(\frac{x}{n}+\frac{m}{n}2\pi\right)=2\pi.$$

Setzt man also für a: 0, 1, 2, 3, ... bis ∞, so kehren dieselben n verschiedenen Werthe von $\sqrt[n]{\cos x \pm i \sin x}$ periodisch immer wieder.

§. 219.

Verwandlung der complexen Zahl in die Form $r(\cos x + i \sin x)$.

Die complexe Zahl $p + qi$, in welcher p und q beliebig reell (auch Null) sein können, läßt sich immer auf die Form

$$r[\cos x + i \sin x] \text{ oder } r \cdot e^{xi}$$

bringen, und r kann hierbei immer positiv bestimmt werden.

Setzt man nämlich $r(\cos x + i \sin x) = p + qi$, so folgt aus §. 155.:

$$1) \quad r \cos x = p;$$
$$2) \quad r \sin x = q.$$

Hieraus, wenn man beide Gleichungen quadrirt und dann addirt:

$$r^2 = p^2 + q^2, \text{ folglich:}$$
$$3) \qquad r = + \sqrt{p^2 + q^2};$$
$$4) \quad \cos x = \frac{p}{r};$$
$$5) \quad \sin x = \frac{q}{r}.$$

(Man kann auch $\operatorname{tg} x = \frac{q}{p}$ nehmen.) Aus 4) und 5) ist x mittelst der Tafeln zu bestimmen. Innerhalb der ersten 4 Quadranten hat x nur einen Werth, und bezeichnet α° denselben als Winkel und ist $\operatorname{arc} \alpha^\circ = \varphi$, so hat man:

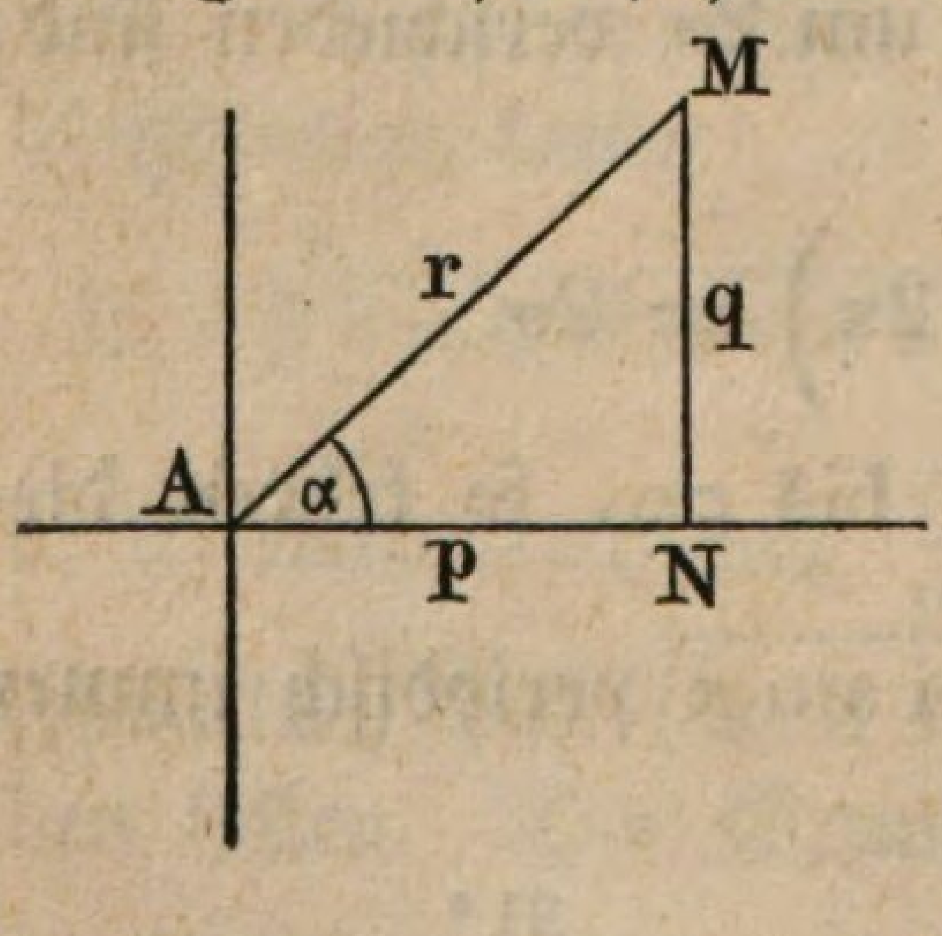
$$6) \quad p + qi = r[\cos(\alpha^\circ + \mathfrak{a} \cdot 360^\circ) + i \sin(\alpha^\circ + \mathfrak{a} \cdot 360^\circ)]$$

oder auch:

$$7) \quad p + qi = r[\cos(\varphi + 2\mathfrak{a}\pi) + i \sin(\varphi + 2\mathfrak{a}\pi)].$$

Man hätte freilich auch $r = -\sqrt{p^2 + q^2}$ nehmen können; dann würde sich aber der zweite Factor in 6) und 7) entgegengesetzt ergeben haben; das Product wäre also kein anderes geworden.

Für r hat sich der Model $\sqrt{p^2 + q^2}$ der complexen Zahl $p + qi$ ergeben. Ist M der Repräsentant der complexen Zahl $p + pi$ (vergl. §. 154.), also



$$AN = p \text{ und } NM = q, \text{ so ist}$$
$$AM = r = \sqrt{p^2 + q^2},$$

und der Winkel MAN ist $= \alpha$; denn für diesen Winkel sind die Gleichungen 1) und 2) richtig. Man erkennt auch aus dieser Figur,

und die Rechnung bestätigt es, daß für $q = 0$, $\alpha = 0°$ oder $180°$ wird, je nachdem p positiv oder negativ ist; r ist dann dem absoluten Werthe von p gleich. Für $p = 0$ wird $\alpha = 90°$ oder $270°$ $(-90°)$, je nachdem q positiv oder negativ ist; r ist dann dem absoluten Werthe von q gleich.

Beispiel 1. Es sei $p + qi = 1 - \sqrt{-1}$, so ist

$$r \cos x = 1,$$
$$r \sin x = -1.$$

Hieraus $r = +\sqrt{2}$, $\cos x = +\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $\sin x = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}$; folglich $x = 360° - 45° = 315°$; daher:

$$1 - \sqrt{-1} = \sqrt{2}[\cos(315° + a \cdot 360°) + i \sin(315° + a \cdot 360°)].$$

Da der Summand $a \cdot 360°$ hier nur die Form, nicht den Werth des Ausdrucks ändert, so kann man

$$1 - \sqrt{-1} = \sqrt{2}(\cos 315° + i \sin 315°) \text{ setzen, oder}$$
$$1 - \sqrt{-1} = \sqrt{2}(\cos 45° - i \sin 45°).$$

Denselben Werth hätte man unmittelbar erhalten, wenn

$$1 - \sqrt{-1} = r(\cos x - i \sin x)$$

gesetzt worden wäre. (Vergl. die Anmerk. unten.)

Beispiel 2. Es sei $p + qi = -2$, so folgt

$$r \cos x = -2,$$
$$r \sin x = 0;$$

folglich $r = +2$, $\cos x = -1$, $\sin x = 0$; folglich $x = \pi$, also $-2 = 2[\cos \pi + i \sin \pi]$.

Beispiel 3. Es sei $p + qi = -3i$, so folgt

$$r \cos x = 0,$$
$$r \sin x = -3;$$

folglich $r = +3$, $\cos x = 0$, $\sin x = -1$, $x = \frac{3}{2}\pi$; daher

$$-3i = 3\left[\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi\right] \text{ oder}$$

$$-3i = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}\right) = 3(\cos 90° - i \cdot \sin 90°).$$

Beispiel 4. $p + qi = -3 + 4\sqrt{-1}$. Man erhält

$$r = 5, \quad \cos x = -0{,}6 \text{ und } \sin x = +0{,}8;$$

folglich:

$$-3 + 4\sqrt{-1} = 5(\cos 126° \, 52' \, 12'' + i \sin 126° \, 52' \, 12'') \text{ oder}$$
$$-3 + 4\sqrt{-1} = 5(\cos 2{,}21429923 + i \sin 2{,}21429923).$$

Zu dem Winkel kann noch $a \cdot 360°$, zu dem Bogen $2a\pi$ addirt werden.

Anmerk. Aus $p + qi = r(\cos x + i \sin x)$ folgt, r positiv vorausgesetzt, daß $\sin x$ positiv oder negativ sein muß, je nachdem q positiv oder negativ ist. Man kann daher das Vorzeichen von q in jene Gleichung aufnehmen, also, wenn q eine absolute Zahl bezeichnet, $p \pm qi = r(\cos x \pm i \sin x)$ setzen. Bei allen Rechnungen mit bestimmten Zahlen ist dieses Verfahren dem oben angegebenen vorzuziehen; es gewährt den Vortheil, daß q (innerhalb der ersten vier Quadranten) nur im ersten oder zweiten Quadranten liegen kann. Aus

$$r \cos x = p \text{ und}$$
$$r \sin x = q$$

folgt, da q absolut ist, daß x im ersten oder zweiten Quadranten liegt, je nachdem p positiv oder negativ ist.

Beispiel. Ist $-\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{-1}$ gegeben, so setzt man:

$$-\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}i = r(\cos x - i \sin x); \text{ dann folgt:}$$

$$r \cos x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$r \sin x = +\frac{1}{3}, \text{ folglich}$$

$$r^2 = \frac{4}{9}, \text{ also } r = +\frac{2}{3}; \text{ daher}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ und } \sin x = +\frac{1}{2}, \text{ also } x = 150^\circ + a \cdot 360^\circ.$$

Es entsteht also $-\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{-1} = \frac{2}{3}(\cos 150^\circ - i \cdot \sin 150^\circ)$.

§. 220.

Bestimmung aller Werthe der allgemeinen Wurzel $\sqrt[n]{p + qi}$.

Die allgemeine Wurzel $\sqrt[n]{p + qi}$ bezeichnet jeden reellen oder imaginären Ausdruck, welcher mit n potenzirt, $p + qi$ giebt. Es kann jetzt nachgewiesen werden, daß $\sqrt[n]{p + qi}$ n Werthe hat. Setzt man $p + qi = r(\cos x + i \sin x)$, so folgt:

$$r = +\sqrt{p^2 + q^2}, \quad \cos x = \frac{p}{r}, \quad \sin x = \frac{q}{r},$$

und x selbst sei $= \varphi$; dann ist

$$\sqrt[n]{p + qi} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)};$$

daher nach der Moivre'schen Formel (§. 218.):

$$\sqrt[n]{p+qi} = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{a}{n}2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{a}{n}2\pi\right)\right].$$

In §. 218. ist gezeigt worden, daß der zweite Factor der rechten Seite n verschiedene Werthe hat, welche man erhält, wenn man für a setzt: 0, 1, 2, 3, ... bis n — 1. Jeder Werth ist mit der absoluten Wurzel $\sqrt[n]{r}$ zu multipliciren.

Beispiele: 1) Welche Werthe hat $\sqrt[n]{+1}$?

Auflös. Aus $r\cos x = 1$, $r\sin x = 0$ folgt: $r = +1$, $x = 0 + 2a\pi$; folglich: $\sqrt[n]{+1} = \cos\left(\frac{a}{n}2\pi\right)+i\sin\left(\frac{a}{n}2\pi\right)$.

Für a = 0 folgt $\sqrt[n]{+1} = +1$; die nächsten Werthe sind: $\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$; $\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}$; $\cos\frac{6\pi}{n}+i\sin\frac{6\pi}{n}$, u. s. w. bis $\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$.

Ist n eine gerade Zahl, so hat a auch den Werth $\frac{n}{2}$; folglich hat $\sqrt[n]{+1}$ auch den Werth $\cos\frac{\frac{1}{2}n}{n}2\pi+i\sin\frac{\frac{1}{2}n}{n}2\pi$, d. h.

$$\cos\pi+i\sin\pi = -1.$$

Alle anderen Werthe sind imaginär.

2) Welche Werthe hat $\sqrt[3]{+1}$?

Auflös. $\sqrt[3]{+1} = \cos\frac{a}{3}2\pi+i\sin\frac{a}{3}\cdot 2\pi$.

Für a = 0 entsteht $\cos 0 + i\sin 0 = +1$.

Für a = 1 entsteht $\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

$$= -\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} \text{ (§. 216., IV.)}$$

$$= -\frac{1}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$ (§. 216., hinter Formel X.).

Für a = 2 entsteht: $\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi = -\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$

$$= -\frac{1}{2}-i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Es hat daher $\sqrt[3]{+1}$ folgende 3 Werthe:

$$+1, \quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

3) Welchen Werth hat $\sqrt[n]{-1}$?

Auflös. Aus $r \cos x = -1$, $r \sin x = 0$ folgt: $r = +1$, $x = \pi + 2a\pi = (2a+1)\pi$; daher:

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{2a+1}{n}\pi + i \sin\frac{2a+1}{n}\pi.$$

Nur wenn n ungerade ist, wird der Bruch $\frac{2a+1}{n}$ einmal, nämlich für $a = \frac{n-1}{2}$, zu 1; dann hat $\sqrt[n]{-1}$ den einen reellen Werth

$$\cos\pi + i \sin\pi = -1.$$

4) Welche Werthe hat $\sqrt[n]{+a}$?

Auflös. Aus $r \cos x = a$, $r \sin x = 0$ folgt: $r = +a$, $x = 2a\pi$, daher:

$$\sqrt[n]{+a} = \sqrt[n]{a} \cdot \left[\cos\frac{a}{n}2\pi + i \sin\frac{a}{n}2\pi\right],$$

d. h. man findet alle n Werthe von $\sqrt[n]{+a}$, wenn man den einen absoluten Werth ($\sqrt[n]{a}$) mit allen Werthen von $\sqrt[n]{+1}$ multiplicirt (vergl. Beispiel 1.).

5) Eben so findet man $\sqrt[n]{-a}$, wenn man alle Werthe von $\sqrt[n]{-1}$ mit der absoluten Wurzel $\sqrt[n]{a}$ multiplicirt.

6) $\sqrt[n]{+i} = \cos\left(\frac{4a+1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{4a+1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}\right).$

Für $n = 2$ entsteht $\sqrt{+i} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$

7) Welche Werthe hat $\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$?

Auflös. Aus $2 - 11i = r(\cos x - i \sin x)$ folgt:

$r = \sqrt{125}$ und $x = 79° \, 41' \, 52{,}54'' + a \cdot 360°$; daher:

$\sqrt[3]{2-11i} = \sqrt{5} \cdot [\cos(26° \, 33' \, 54{,}18'' + a \cdot 120°) - i \sin(26° \, 33' \, 54{,}18'' + a \cdot 120°)].$

Hieraus ergeben sich für $\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$ die drei Werthe:

$$2-\sqrt{-1};\quad -1{,}8660254-1{,}2320508\cdot\sqrt{-1}$$

$$\text{und } -0{,}1339746+2{,}2320508\cdot\sqrt{-1}.$$

§. 221.

Bestimmung einiger allgemeinen Logarithmen und Potenzen.

Zum Schlusse dieses Abschnittes sollen noch die Werthe einiger allgemeinen Logarithmen und Potenzen bestimmt werden.

Beispiel 1. Log. nat. (a + bi) zu bestimmen.

Auflös. Wir setzen Log. nat. (a + bi) = p + qi, so folgt:

$$e^{p+qi} = a + bi \quad \text{oder} \quad e^p \cdot e^{qi} = a + bi$$

$$\text{oder} \quad e^p \cdot (\cos q + i \sin q) = a + bi. \quad \text{Hieraus:}$$

$$1)\quad e^p \cdot \cos q = a,$$

$$2)\quad e^p \cdot \sin q = b.$$

Hieraus folgt auf bekanntem Wege

$$e^p = +\sqrt{a^2+b^2};\quad \text{folglich } p = \ln(\sqrt{a^2+b^2})$$

$$\text{und} \quad \cos q = \frac{a}{+\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin q = \frac{b}{+\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Aus beiden Gleichungen ist q zu bestimmen. Es sei $q = \varphi \pm 2a\pi$, so folgt

$$\text{Log. nat. } (a+bi) = \ln(\sqrt{a^2+b^2}) + (\varphi \pm 2a\pi)i.$$

Es hat also Log. nat. (a + bi) unendlich viele Werthe, von denen nur einer reell sein kann. Ist nämlich b = 0 und a positiv, so wird φ = 0, und in diesem einen Falle entsteht für a = 0 der reelle Werth ln a.

Beispiel 2. Log. nat. 1 zu bestimmen. Hier ist a = 1, b = 0; folglich Log. nat. 1 = ± 2aπi. Unter allen Werthen ist der einzige reelle: 0.

Beispiel 3. Log. nat. (— 1) = ± (2a + 1)πi. Alle Werthe sind imaginär.

Beispiel 4. Log. nat. (+ a) = ln a ± 2aπi, d. h.
Log. nat. (+ a) = ln a + Log. nat. 1.

Beispiel 5. Log. nat. (— a) = ln a + Log. nat. (— 1). Alle Werthe sind imaginär.

Beispiel 6. Log. nat. e zu bestimmen. Hier ist a = e, b = 0, p = ln e = 1, q = ± 2aπ; folglich Log. nat. e = 1 ± 2aπi.

Beispiel 7. $\text{Log. nat.}\, i = \left(\frac{\pi}{2} \pm 2a\pi\right) i$; folglich hat $\text{Log. nat.}\, i$ die Werthe $\frac{1}{2}\pi i$, $\frac{5}{2}\pi i$, $\frac{9}{2}\pi i$, ..., $-\frac{3}{2}\pi i$,

$$-\frac{7}{2}\pi i,\ -\frac{11}{2}\pi i,\ \ldots.$$

Beispiel 8. Alle Werthe von $\overset{+4}{\text{Log.}}(-2)$ zu bestimmen, namentlich die reellen anzugeben.

Auflös. $\overset{+4}{\text{Log}}(-2) = \dfrac{\text{Log. nat.}(-2)}{\text{Log. nat.}(+4)} = \dfrac{\ln 2 \pm (2a+1)\pi i}{\ln 4 \pm 2b\pi i}$.

Macht man den Nenner reell, so folgt:

$$\overset{+4}{\text{Log.}}(-2) = \frac{[\ln 2 \pm (2a+1)\pi i]\,[\ln 4 \mp 2b\pi i]}{(\ln 4)^2 + 4b^2\pi^2}.$$

Bringt man den Zähler durch Multiplication auf die Form $p + qi$ und dividirt jedes Glied durch den Nenner, so entsteht:

$$\overset{+4}{\text{Log.}}(-2) = \frac{\ln 2 \cdot \ln 4 + 2b(2a+1)\pi^2}{(\ln 4)^2 + 4b^2\pi^2} \pm \frac{(2a+1)\pi \ln 4 - 2b\pi \ln 2}{(\ln 4)^2 + 4b^2\pi^2} \cdot i.$$

Ob unter diesen unendlich vielen Werthen reelle sind, hängt davon ab, ob der Zähler des zweiten Gliedes für ganze positive Werthe von a und b Null wird. In den meisten Fällen wird dies nicht Statt finden. Untersuchen wir, für welche Werthe von a und b

$$(2a+1)\pi \cdot \ln 4 - 2b\pi \cdot \ln 2 = 0 \text{ ist.}$$

Da sich π forthebt, so muß

$$(2a+1)\ln 4 = 2b \cdot \ln 2 \text{ sein.}$$

Schreibt man $\dfrac{2a+1}{2b} = \dfrac{\ln 2}{\ln 4}$, so sieht man, daß diese Gleichung nur Statt finden kann, wenn $\dfrac{\ln 2}{\ln 4}$ rational ist. Dies ist hier der Fall; denn es ist $\dfrac{\ln 2}{\ln 4} = \dfrac{\ln 2}{2\ln 2} = \dfrac{1}{2}$.

Aus $\dfrac{2a+1}{2b} = \dfrac{1}{2}$ folgt aber $b = 2a+1$.

Da man nun für b und a beliebige ganze positive Zahlen und 0 setzen kann, so scheint es, daß $\overset{+4}{\text{Log.}}(-2)$ unendlich viele reelle Werthe haben müsse. Dies ist nicht der Fall; denn setzt man $b = 2a+1$, so folgt:

$$\overset{+4}{\text{Log.}}(-2) = \frac{\ln 2 \cdot \ln 4 + 2(2a+1)^2\pi^2}{(\ln 4)^2 + 4(2a+1)^2\pi^2} \text{ oder}$$

$$\overset{+4}{\text{Log.}}(-2) = \frac{2[(\ln 2)^2 + (2a+1)^2\pi^2]}{4[(\ln 2)^2 + (2a+1)^2\pi^2]} = \frac{1}{2}.$$

Es hat also $\overset{+4}{\text{Log.}}(-2)$ den einen reellen Werth $\frac{1}{2}$; alle anderen Werthe sind imaginär. Setzt man z. B. $a = 0$ und $b = 0$, so erhält man

$$\overset{+4}{\text{Log.}}(-2) = \frac{1}{2} \pm \frac{\pi}{2 \ln 2} \cdot i.$$

Durch dieses Beispiel ist der Weg angegeben, auf dem man $\overset{+b}{\text{Log.}}(-a)$, $\overset{-b}{\text{Log.}}(+a)$ und $\overset{-b}{\text{Log.}}(-a)$ untersuchen kann.

Beispiel 9. Welche Werthe hat die allgemeine Potenz 1^i?

Auflös. Zur Erläuterung der Frage Folgendes: Versteht man unter 1^i die künstliche Potenz, so hat 1^i nur einen Werth, der durch die Reihe (§. 208., I.)

$$1^i = 1 + \ln 1 \cdot i + \frac{(\ln 1)^2}{2!} i^2 + \frac{(\ln 1)^3}{3!} i^3 + \ldots.$$

dargestellt ist. Da $\ln 1 = 0$, so folgt $1^i = 1$. Wird aber 1^i als allgemeine Potenz aufgefaßt, so bedeutet 1^i die Reihe

$$1^i = 1 + \text{Log. nat. } 1 \cdot i + \frac{(\text{Log. nat. } 1)^2}{2!} i^2 + \frac{(\text{Log. nat. } 1)^3}{3!} i^3 + \ldots$$

Da nun Log. nat. 1 unendlich viele Werthe hat, so wird 1^i ebenfalls unendlich viele Werthe haben. Man findet sie so (§. 209.):

$$1^i = e^{i \,\text{Log. nat. } 1} = e^{i(\pm 2a\pi i)} = e^{\mp 2a\pi}.$$

Es hat also 1^i unendlich viele Werthe; aber alle sind reell, nämlich:

$$1, \quad e^{\pm 2\pi}, \quad e^{\pm 4\pi}, \quad e^{\pm 6\pi}, \quad \text{u. s. w.}$$

Beispiel 10. Welche Werthe hat i^i?

Auflös. $i^i = e^{i \,\text{Log. nat. } i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} \pm 2a\pi\right)i} = e^{-\frac{\pi}{2} \pm 2a\pi}$. Auch hier sind alle Werthe reell, und zwar sind sie:

$$e^{-\frac{\pi}{2}}, \quad e^{-\frac{\pi}{2} \pm 2\pi}, \quad e^{-\frac{\pi}{2} \pm 4\pi}, \quad \text{u. s. w.}$$

Beispiel 11. Welche Werthe hat die allgemeine Potenz i^{-1}?

Auflös. $i^{-1} = e^{-\text{Log. nat. } i} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} \pm 2a\pi\right)i}$.

Der erste Werth entsteht, wenn man $a = 0$ setzt. Er ist

$i^{-1} = e^{-\frac{\pi}{2} \cdot i}$ oder: $i^{-1} = \cos\frac{\pi}{2} - i \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -i$. Allgemein ist

$$i^{-1} = \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm 2a\pi\right) - i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm 2a\pi\right);$$

folglich sind alle Werthe einander gleich.

Beispiel 12. Welchen Werth hat die allgemeine Potenz $e^{\sqrt{2}}$?

Auflös. $e^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Log.nat.}\,e} = e^{\sqrt{2}[1 \pm 2a\pi i]} = e^{\sqrt{2}} \cdot e^{\pm 2\sqrt{2}a\pi i}$
$= e^{\sqrt{2}} \cdot [\cos(2\sqrt{2}a\pi) \pm i \cdot \sin(2\sqrt{2}a\pi i)]$.
In diesem Ausdrucke stellt $e^{\sqrt{2}}$ den einzigen reellen Werth vor, welchen die allgemeine Potenz $e^{\sqrt{2}}$ hat, und $e^{\sqrt{2}}$, als allgemeine Potenz aufgefaßt, hat unendlich viele Werthe.

Ueberhaupt findet man, daß a^n, als allgemeine Potenz aufgefaßt, wenn n eine ganze Zahl ist, nur einen Werth hat; ist n gebrochen, etwa $= \pm \frac{p}{q}$, und ist $\frac{p}{q}$ ein gehobener Bruch: so hat a^n gerade q Werthe; ist aber n irrational, so hat a^n unendlich viele Werthe.

Fünftes Kapitel.

Die höheren Gleichungen.

Allgemeine Gesetze.

Vorbemerkung. Die nach fallenden Potenzen von x geordnete rationale ganze Function von x vom nten Grade, deren erstes Glied den Coefficienten $+1$ hat,

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \ldots + px^2 + qx + r$$

soll durch $\overset{(n)}{\varphi}(x)$, $\overset{(n)}{f}(x)$, ... oder $\overset{(n)}{\varphi}x$, $\overset{(n)}{f}x$, ... bezeichnet werden.

§. 222.

Lehrsatz.

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Wurzeln der Gleichung $\overset{(n)}{\varphi}x = 0$, d. h. machen diese Werthe, statt x gesetzt, den Ausdruck

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px^2 + qx + r$$

identisch gleich Null, so ist $\overset{(n)}{\varphi}x$ durch $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, u. s. w. theilbar.

Beweis Dividirt man mit $x-\alpha$ in $\overset{(n)}{\varphi}x$, bis der Rest kein x mehr enthält, und bezeichnet R diesen constanten Rest: so behauptet der vorstehende Satz, daß $R = 0$ sein müsse. Bei der Division wird der Quotient eine Function von x, die vom $n-1$ten Grade ist; folglich kann man $\frac{\overset{(n)}{\varphi}x}{x-\alpha} = \overset{(n-1)}{f}(x) + \frac{R}{x-\alpha}$ setzen. Hieraus folgt die identische Gleichung:

$$\overset{(n)}{\varphi}x = (x-\alpha) \cdot \overset{(n-1)}{f}(x) + R.$$

Diese Gleichung ist für jeden Werth von x richtig, folglich auch für $x = \alpha$. Nach der Voraussetzung ist aber $\overset{(n)}{\varphi}(\alpha) = 0$; setzt man also $x = \alpha$, so entsteht:

$$0 = 0 + R.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, daß die Auflösung einer Gleichung vom nten Grade, wenn man eine Wurzel kennt, auf die Auflösung einer Gleichung vom n — 1ten Grade zurückzuführen ist. Denn aus

$$\overset{(n)}{\varphi}x = (x - \alpha) \cdot \overset{(n-1)}{f}(x)$$

folgt, daß jeder Werth von x, für welchen $\overset{(n-1)}{f}(x) = 0$ ist, auch eine Wurzel der Gleichung $\overset{(n)}{\varphi}(x) = 0$ sein muß.

z. B. Die Gleichung $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ hat die Wurzel $x = 2$, und durch Division mit $x - 2$ in $x^3 - x^2 - x - 2$ erhält man:

$$x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(x^2 + x + 1).$$

Weil aber aus $x^2 + x + 1 = 0$ folgt: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, so sind $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ und $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ auch Wurzeln der Gleichung $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$.

§. 223.

Folgerungen.

Aus dem vorstehenden Satze lassen sich noch Folgerungen ziehen. Hat die Gleichung $\overset{(n)}{\varphi}(x) = 0$ die Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, so fanden wir, daß die identische Gleichung Statt finden muß: $\overset{(n)}{\varphi}(x) = (x - \alpha) \cdot \overset{(n-1)}{f}(x)$. Wird also die linke Seite auch für $x = \beta$, $x = \gamma$, $x = \delta$ u. s. w. zu Null, so muß es auch die rechte Seite werden. Der erste Factor $x - \alpha$ wird nur für $x = \alpha$ zu Null; folglich müssen β, γ, δ u. s. w. nothwendig $\overset{(n-1)}{f}(x)$ zu Null machen, d. h. Wurzeln der Gleichung $\overset{(n-1)}{f}(x) = 0$ sein. Hieraus folgt weiter, daß $x - \beta$ ein Theiler von $\overset{(n-1)}{f}(x)$ sein muß (natürlich auch $x - \gamma$, u. s. w.), und weil die Division nur einen Quotienten vom n — 2ten Grade geben kann, so ist

$$\overset{(n-1)}{f}(x) = (x - \beta) \overset{(n-2)}{F}(x)$$

zu setzen, also auch:

$$\overset{(n)}{\varphi}(x) = (x - \alpha)(x - \beta) \cdot \overset{(n-2)}{F}(x).$$

Hieraus folgt, genau wie oben, daß γ, δ, ... Wurzeln der Gleichung $\overset{(n-2)}{F}(x) = 0$ sein müssen, und daß $\overset{(n-2)}{F}(x)$ durch $x - \gamma$, $x - \delta$, ... theilbar ist. Man kann also $\overset{(n-2)}{F}(x) = (x - \gamma) \cdot \overset{(n-3)}{\psi}(x)$ setzen, und erhält:

$$\overset{(n)}{\varphi}(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \cdot \overset{(n-3)}{\psi}(x).$$

So kann man fortfahren, dem Producte $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ nach und nach auch noch die Factoren $x - \delta$, $x - \varepsilon$, u. s. w. hinzuzufügen. Der letzte Factor $\overset{(n-3)}{\psi}(x)$ sinkt bei jedem neu hinzutretenden Factor um einen Grad; folglich muß man einmal auf eine Function vom ersten Grade $\overset{(1)}{\Phi}(x)$ kommen, und dies muß eintreten, wenn das Product $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \ldots$ gerade $n - 1$ Factoren hat. Alle noch nicht in die Rechnung gezogenen Wurzeln der Gleichung $\overset{(n)}{\varphi}(x) = 0$ müssen dann wieder Wurzeln der Gleichung $\overset{(1)}{\Phi}(x) = 0$ sein. Weil aber diese Gleichung nur eine Wurzel hat, so folgt hieraus, daß jede Gleichung vom $n$ten Grade nur n Wurzeln haben kann, und daß, wenn diese Wurzeln bekannt sind, $\overset{(n)}{\varphi}(x)$ in ein Product von n Factoren zu zerlegen ist, von denen jeder die Differenz von x und einer der Wurzeln ist.

Ist ferner α eine Wurzel der Gleichung $\overset{(n)}{\varphi}(x) = 0$, also $\overset{(n)}{\varphi}(x) = (x - \alpha)\overset{(n-1)}{f}(x)$, so mußte jede Wurzel der Gleichung $\overset{(n-1)}{f}(x) = 0$ auch eine Wurzel der Gleichung $\overset{(n)}{\varphi}(x) = 0$ sein. Nun kann aber $\overset{(n-1)}{f}(x) = 0$ auch die Wurzel $x = \alpha$ haben, und dasselbe kann offenbar auch bei den Gleichungen $\overset{(n-2)}{F}(x) = 0$, $\overset{(n-3)}{\psi}(x) = 0$, u. s. w. Statt finden. Man sagt dann, $\overset{(n)}{\varphi}(x) = 0$ habe die Wurzel α zweimal, dreimal, u. s. w. Wenn also die Gleichung $\overset{(n)}{\varphi}(x) = 0$ im Allgemeinen n Wurzeln haben kann, so können doch unter diesen auch beliebig viele gleiche vorkommen.

Beispiel. Es ist die arithmetische Progression gegeben:

$$1, -1, 0, 5, 15, 31, 54, \ldots;$$

man soll das $n$te Glied und die Summe der ersten n Glieder finden und die erhaltenen Ausdrücke so weit wie möglich in rationale Factoren zerlegen.

Auflös. Man findet $y_n = \frac{1}{6}(n^3 + 3n^2 - 28n + 30)$;

$$S_n = \frac{n}{24}(n^3 + 6n^2 - 49n + 66).$$

Hier liegt nun der Fall vor, daß man in y_n einen Werth von n kennt, in S_n aber zwei Werthe von n, für welche der Ausdruck in der Klammer Null wird; denn aus der gegebenen Progression geht unmittelbar hervor, daß y_n für $n = 3$, so wie, daß S_n für $n = 2$ und auch für $n = 3$ zu Null werden muß; es muß also y_n den Factor $n - 3$, S_n aber die Factoren $n - 2$ und $n - 3$ haben. Man erhält:

$$y_n = \frac{n-3}{6}(n^2 + 6n - 10), \quad S_n = \frac{n}{24}(n-2)(n-3)(n+11).$$

Beispiel 2. Dieselbe Aufgabe für die Progression:

$$2,\ 1,\ -1,\ -2,\ 0,\ 7,\ 21,\ 44,\ 78, \ldots.$$

Auflös. $y_n = \frac{n}{6}(n-5)(2n-5)$; $S_n = \frac{n}{12}(n-4)(n-5)(n+1)$.

Beispiel 3. Es ist folgende Progression gegeben:

$$-1,\ +1,\ 0,\ -2,\ -3,\ -1,\ 6,\ 20,\ 43, \ldots;$$

es soll die Summe der ersten n Glieder ohne Anwendung der Summenformel gefunden werden.

Auflös. Man findet, daß die Progression vom dritten Grade ist; daher muß S_n in Bezug auf n eine algebraische ganze Function vom vierten Grade sein. Weil ferner S_n immer den Factor n hat, und weil aus der Progression unmittelbar erkannt wird, daß S_2, S_3 und S_7 den Werth Null haben, so muß

$$S_n = a \cdot n(n-2)(n-3)(n-7)$$

sein, wenn a eine nach n constante Zahl ist. Um a zu finden, setzt man für n am bequemsten 1; so entsteht, weil $S_1 = -1$ ist:

$$-1 = a(-1)(-2)(-6);$$

folglich ist $-1 = -12a$ oder $a = \frac{1}{12}$; daher:

$$S_n = \frac{n}{12}(n-2)(n-3)(n-7).$$

§. 224.

Das Bilden einer Gleichung aus ihren Wurzeln.

Kennt man die Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ einer Gleichung, so ist die Gleichung selbst aus diesen Wurzeln leicht zu bilden. Sie ist folgende:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots. = 0.$$

Der Grad der Gleichung stimmt mit der Anzahl der Factoren überein.

Welches ist aber die bequemste Weise, dieses Product zu bilden? Bezeichnen wir die entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung (also $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma, \ldots$) durch a, b, c, ..., so fragt es sich, welche Form

$$\varphi x = (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots(x+r)$$

hat, wenn die Anzahl der Factoren gleich n ist, alle Klammern auf-

gelöst werden und die entstandene Summe nach fallenden Potenzen von x geordnet wird.

Durch Multiplication erhält man:

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$

$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc$

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = x^4 + (a + b + c + d)x^3$
$+ (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 + (abc + abd + acd + bcd)x$
$+ abcd.$

u. s. w.

Hat also das Product 4 Factoren, so ist das erste Glied $= x^4$; das zweite ist gleich x^3 multiplicirt mit der Summe der Zahlen a, b, c, d; das dritte ist gleich x^2 multiplicirt mit der Summe der Combinationen der 2ten Klasse ohne Wiederholung aus den Elementen a, b, c, d, wenn man jede Combination als Product gelten läßt; das vierte ist gleich x multiplicirt mit der Summe der Combinationen der 3ten Klasse, und das fünfte ist die Combination der 4ten, also letzten Klasse. Bezeichnet also $S\overset{m}{C}$ die Summe aller Combinationen der mten Klasse ohne Wiederholung bei n Elementen, wenn jede Combination als Product ihrer Elemente betrachtet wird, so ist allgemein das Product von n Factoren:

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)\ldots(x + r)$$
$$= x^n + S\overset{1}{C}\cdot x^{n-1} + S\overset{2}{C}\cdot x^{n-2} + S\overset{3}{C}\cdot x^{n-3} + \ldots\ldots + S\overset{n-1}{C}\cdot x + S\overset{n}{C}.$$

Statt $S\overset{n}{C}$ kann auch $\overset{n}{C}$ gesetzt werden, weil die letzte Klasse nur eine Combination enthält. Der vollständige Beweis kann durch Induction erfolgen. Man nimmt an, das Gesetz wäre für n Factoren richtig, und multiplicirt beide Seiten noch mit einem $n + 1$sten Factor $x + s$. Hierdurch ergiebt sich, daß es dann auch für $n + 1$ Factoren gelten muß.

Uebrigens geht die vorstehende Gleichung in den binomischen Lehrsatz über, wenn man $a = b = c = d =$ u. s. w. setzt.

Soll also eine Gleichung aus ihren Wurzeln α, β, γ, ... gebildet werden, so vergesse man bei der Anwendung des eben entwickelten Gesetzes nicht, daß a, b, c, ... die entgegengesetzten Wurzeln sind. Namentlich ist wichtig: Hat die Gleichung n Wurzeln, so ist das erste Glied der geordneten Gleichung $= x^n$, der Coefficient des zweiten Gliedes ist die Summe aller entgegengesetzten Wurzeln, und das letzte Glied ist das Product aller entgegengesetzten Wurzeln.

Beispiel 1. Welche kubische Gleichung hat die Wurzeln 1, 2 und 3?
Antw. $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ oder $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Beispiel 2. Welche Gleichung hat die Wurzeln 1, —1 und 3?
Antw. $(x-1)(x+1)(x-3) = 0$ oder $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$.

Beispiel 3. Welche Gleichung hat die Wurzeln 7 und 9?
Antw. $x^2 - 16x + 63 = 0$.

Beispiel 4. Welche Gleichung hat die Wurzeln 4, —3 und —1?
Antw. $(x-4)(x+3)(x+1) = 0$ oder $x^3 - 13x - 12 = 0$.

Beispiel 5. Welche Gleichung hat die Wurzeln 1, 2, 3 und die Wurzel —1 zweimal?
Antw. $(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)(x+1) = 0$ oder
$x^5 - 4x^4 + 10x^2 - x - 6 = 0$.

Beispiel 6. Welche Gleichung hat die vier gleichen Wurzeln 2?
Antw. $(x-2)^4 = 0$ oder $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = 0$.

Beispiel 7. Welche Gleichung hat die vier Wurzeln:
$a,\ -a,\ 2a$ und $-3a$?
Antw. $x^4 + ax^3 - 7a^2x^2 - a^3x + 6a^4 = 0$.

Beispiel 8. Welche Gleichung hat die Wurzeln $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ und $-\frac{3}{4}$?
Antw. $x^4 - \frac{5}{4}x^3 - \frac{7}{36}x^2 + \frac{101}{144}x - \frac{5}{24} = 0$.

§. 225.

Die reducirte Gleichung.

Ist die Summe aller Wurzeln der Gleichung $\overset{(n)}{\varphi} x = 0$ der Null gleich, so fehlt in $\overset{(n)}{\varphi} x$ das zweite, mit x^{n-1} behaftete Glied (weil dessen Coefficient Null wird), und die Gleichung heißt dann eine reducirte. Sind z. B. die Wurzeln einer biquadratischen Gleichung: +1, +2, +3 und —6, so entsteht:

$$x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0.$$

Soll die Gleichung

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \ldots + r = 0$$

reducirt werden, so setze man $x = y + z$ und bestimme z so, daß nach Substitution von $y + z$ statt x in die gegebene Gleichung, wenn nach den Potenzen von y geordnet ist, der Factor von y^{n-1} zu Null wird. Man erhält nach dem binomischen Lehrsatz:

$$\left.\begin{array}{llll} y^n + ny^{n-1}z + & n_2 y^{n-2} z^2 & + \ldots \\ \quad + a y^{n-1} & + (n-1) a y^{n-2} z & + \ldots \\ \quad + & b y^{n-2} & + \ldots \\ & & + \ldots \end{array}\right\} = 0 \text{ oder:}$$

$$y^n + (nz + a) y^{n-1} + [n_2 z^2 + (n-1) az + b] y^{n-2} + \ldots = 0.$$

Wählt man jetzt z so, daß $nz + a = 0$ wird, also:

$$z = -\frac{a}{n},$$

so folgt: $y^n + \left(b - \frac{n-1}{2n}a^2\right)y^{n-2} + \ldots = 0.$

Kann man aus dieser Gleichung y finden, so hat man auch x, nämlich:

$$x = y - \frac{a}{n}.$$

Hieraus folgt die Regel: Um eine Gleichung in eine reducirte zu verwandeln, setze man statt x eine Hülfs-Unbekannte y minus den Bruch, welcher entsteht, wenn man den Factor des zweiten Gliedes durch den höchsten Exponenten von x dividirt.

Beispiel 1. $x^3 - 6x^2 + x - 1 = 0$. Setzt man $x = y + 2$, so folgt: $y^3 - 11y - 15 = 0$.

Beispiel 2. $x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{27} = 0$. Setzt man $x = y - \frac{1}{3}$, so folgt: $y^3 - y = 0$. Aus dieser Gleichung $y(y^2 - 1) = 0$ folgt $y = 0$, $y = +1$ und $y = -1$; folglich hat die gegebene Gleichung die 3 Wurzeln: $-\frac{1}{3}$, $+\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{3}$.

Beispiel 3. $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$. Setzt man $x = y + 4$, so folgt $y^3 - 4y = 0$. Die gegebene Gleichung hat die Wurzeln: 4, 6 und 2.

Beispiel 4. Welche Wurzeln hat die Gleichung

$$x^4 + 2x^3 - \tfrac{7}{2}x^2 - \tfrac{9}{2}x + \tfrac{45}{16} = 0?$$

Auflös. Die reducirte Gleichung wird $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$. Die gesuchten Wurzeln sind: $+\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$, $+\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$.

§. 226.

Kann man beweisen, daß jede Gleichung von beliebigem Grade eine Wurzel haben muß, so folgt, daß jede auch so viele Wurzeln hat, als der höchste Exponent von x Einheiten. Denn hat $\overset{(n)}{\varphi}x = 0$ die Wurzel α, so ist $\overset{(n)}{\varphi}x = (x - \alpha)\cdot\overset{(n-1)}{f}x$, und weil jede Wurzel der Gleichung $\overset{(n-1)}{f}x = 0$ auch eine Wurzel der Gleichung $\overset{(n)}{\varphi}x = 0$ ist, so hat jede Gleichung vom nten Grade eine Wurzel mehr, als eine Gleichung vom $n-1$sten Grade. Nun hat aber jede quadratische Gleichung zwei Wurzeln, folglich jede kubische drei, daher jede biquadratische vier, u. s. w. Der nächste §. enthält den wichtigen Satz, daß jede Gleichung vom nten Grade auch n Wurzeln hat. Zum Verständniß des Beweises mag Folgendes vorausgeschickt werden:

Zwei beliebige reelle oder imaginäre Zahlen können wir uns immer in der Form $p_1 + q_1 i$ und $p_2 + q_2 i$ gegeben denken, und diese Ausdrücke sind noch so umzuformen:

$$1)\quad p_1 + q_1 i = r_1 [\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1] = r_1 \cdot e^{\varphi_1 i}.$$
$$2)\quad p_2 + q_2 i = r_2 [\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2] = r_2 \cdot e^{\varphi_2 i}.$$

r_1 und r_2 sind die Model dieser complexen Zahlen; denn es ist $r_1 = \sqrt{p_1^2 + q_1^2}$, $r_2 = \sqrt{p_2^2 + q_2^2}$. (Vergl. S. 484. und S. 274.).

Wenn wir nun $p_1 + q_1 i$ und $p_2 + q_2 i$ addiren, so entsteht:
$(p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)i = (r_1 \cos\varphi_1 + r_2 \cos\varphi_2) + i(r_1 \sin\varphi_1 + r_2 \sin\varphi_2)$.

Diesen Ausdruck können wir wieder auf die Form

$$\varrho [\cos\psi + i \sin\psi] = \varrho \cdot e^{\psi i}$$

bringen, und ϱ ist dann der Model der Summe der complexen Zahlen, und zwar ist:

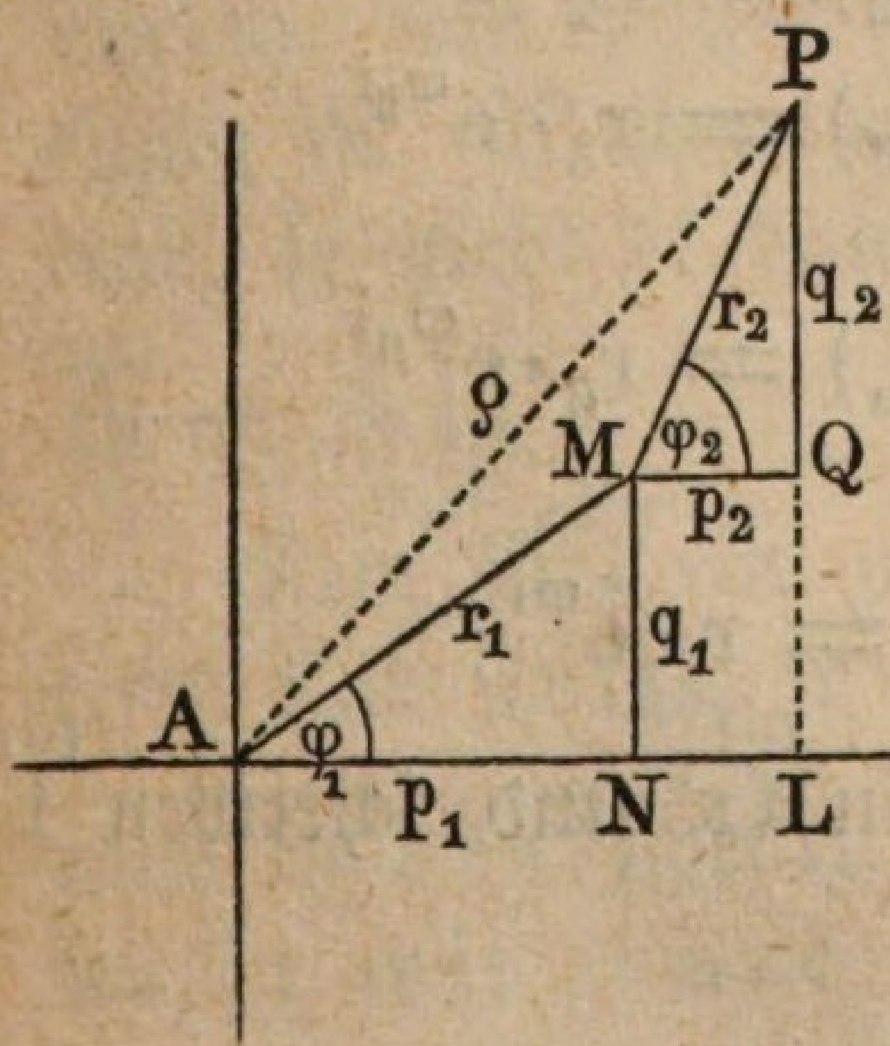
$$\varrho = \sqrt{(r_1 \cos\varphi_1 + r_2 \cos\varphi_2)^2 + (r_1 \sin\varphi_1 + r_2 \sin\varphi_2)^2} \text{ oder}$$
$$\varrho = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \text{ (§. 212., VII. und XII.).}$$

Nun kann $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ positiv, Null, negativ sein; der größte Werth aber, den $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ haben kann, ist $+1$, wenn nämlich $\varphi_1 = \varphi_2$ ist. In diesem einzigen Falle ist $\varrho = r_1 + r_2$; in jedem andern Falle ist $\varrho < r_1 + r_2$. Hiermit ist also bewiesen: **der Model der Summe zweier complexen Zahlen ist kleiner, höchstens gleich der Summe der Model der einzelnen Zahlen.** (Der letzte Fall tritt nur ein, wenn sich $p_1 : q_1 = p_2 : q_2$ verhält.)

Das Gesetz läßt sich ohne Weiteres auf drei und mehr complexe Zahlen ausdehnen. Addirt man zu $\varrho [\cos\psi + i \sin\psi]$ noch $r_3 [\cos\varphi_3 + i \sin\varphi_3]$, und bezeichnet R den Model der Summe, so ist, wie eben bewiesen wurde:

$$R \leqq \varrho + r_3 \text{ und } \varrho \leqq r_1 + r_2, \text{ folglich}$$
$$R \leqq r_1 + r_2 + r_3, \text{ u. s. w.}$$

Wir halten also fest: **Der Model der Summe beliebig vieler complexen Zahlen ist kleiner, höchstens gleich der Summe der Model aller einzelnen Zahlen.**



Dasselbe Gesetz ergiebt sich geometrisch, wenn man die complexen Zahlen durch Punkte einer Ebene versinnlicht. Ist r_1 der Model der Zahl $p_1 + q_1 i$, r_2 der Model der Zahl $p_2 + q_2 i$ und ϱ der Model der Summe $(p_1 + p_2) + (q_1 + q_2) i$; ist noch M der Repräsentant von $p_1 + q_1 i$, also $AN = p_1$, $NM = q_1$: so folgt $AM = r_1$ und

$\angle MAN = \varphi_1$. Zieht man nun $MQ \mp AL$, macht $MQ = p_2$, zieht ferner durch Q die Linie PL senkrecht auf AL und macht $QP = q_2$, so ist $MP = r_2$ und Winkel $PMQ = \varphi_2$ (aber P nicht der Repräsentant von $p_2 + q_2 i$). Hierbei sind p_1 und p_2 nach rechts oder links, q_1 und q_2 nach oben oder unten abzutragen, je nachdem diese Werthe positiv oder negativ sind. Der Punkt P ist jetzt der Repräsentant der Summe $(p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)i$, weil $AL = p_1 + p_2$ und $LP = q_1 + q_2$; folglich ist $AP = \varrho$ und Winkel $PAL = \psi$. Daß nun $\varrho \overline{\overline{<}} r_1 + r_2$ sein muß, folgt aus einem bekannten geometrischen Satze. Der Fall $\varrho = r_1 + r_2$ tritt ein, wenn MP die Verlängerung von AM ist. Bekanntlich verhält sich dann auch

$$p_1 : q_1 = p_2 : q_2.$$

§. 227.

Lehrsatz.

Jede Gleichung vom nten Grade hat n Wurzeln von der Form $p + qi$, in welcher p und q beliebig reell, also auch Null sein können.

Beweis. Es sei $\overset{(n)}{f}x = 0$ gegeben, nämlich:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Setzen wir $x = p + qi$, so wird behauptet, daß es immer zwei zusammen gehörige Werthe von p und q giebt, für welche $\overset{(n)}{f}(p+qi) = 0$ eine identische Gleichung ist. Die Coefficienten der Gleichung können beliebig reell oder imaginär sein; wir wollen sie uns auf folgende Form gebracht denken:

$$a_1 = p_1 + q_1 i = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1 \cdot e^{\varphi_1 i}$$
$$a_2 = p_2 + q_2 i = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2 \cdot e^{\varphi_2 i}$$
$$a_3 = p_3 + q_3 i = r_3(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3) = r_3 \cdot e^{\varphi_3 i}$$
$$\vdots$$
$$a_n = p_n + q_n i = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) = r_n \cdot e^{\varphi_n i}$$

Endlich setzen wir noch:

$$x = p + qi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{\varphi i}.$$

Substituiren wir nun alle diese Werthe in $\overset{(n)}{f}x$ und schreiben $\overset{(n)}{f}$ statt $\overset{(n)}{f}(r \cdot e^{\varphi i})$, so folgt:

$$\overset{(n)}{f} = r^n \cdot e^{n\varphi i} + r_1 \cdot e^{\varphi_1 i} \cdot r^{n-1} \cdot e^{(n-1)\varphi i} + r_2 \cdot e^{\varphi_2 i} \cdot r^{n-2} \cdot e^{(n-2)\varphi i}$$
$$+ r_3 \cdot e^{\varphi_3 i} \cdot r^{n-3} \cdot e^{(n-3)\varphi i} + \ldots\ldots + r_{n-1} \cdot e^{\varphi_{n-1} i} \cdot r e^{\varphi i} + r_n \cdot e^{\varphi_n i}.$$

Hieraus folgt:

$$\overset{(n)}{f} = r^n \cdot e^{n\varphi i} + r_1 \cdot r^{n-1} \cdot e^{[\varphi_1 + (n-1)\varphi]i} + r_2 \cdot r^{n-2} \cdot e^{[\varphi_2 + (n-2)\varphi]i}$$
$$+ r_3 \cdot r^{n-3} \cdot e^{[\varphi_3 + (n-3)\varphi]i} + \ldots\ldots + r_{n-1} \cdot r \cdot e^{(\varphi_{n-1} + \varphi)i} + r_n \cdot e^{\varphi_n i}.$$

Hierfür können wir schreiben:

$$\begin{aligned}\overset{(n)}{f} = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi) &+ r_1 \cdot r^{n-1}[\cos(\varphi_1 + (n-1)\varphi) + i\sin(\varphi_1 + (n-1)\varphi)] \\ &+ r_2 \cdot r^{n-2}[\cos(\varphi_2 + (n-2)\varphi) + i\sin(\varphi_2 + (n-2)\varphi)] \\ &+ r_3 \cdot r^{n-3}[\cos(\varphi_3 + (n-3)\varphi) + i\sin(\varphi_3 + (n-3)\varphi)] \\ &+ \\ &\vdots \\ &+ r_{n-1} \cdot r[\cos(\varphi_{n-1} + \varphi) + i\sin(\varphi_{n-1} + \varphi)] \\ &+ r_n \cdot [\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n].\end{aligned}$$

Das erste Glied dieser Summe ist von den Coefficienten a_1, a_2, a_3 ... unabhängig; aber die übrigen Glieder sind von diesen Coefficienten abhängig. Die Summe aller Glieder, mit Ausnahme des ersten, wollen wir in ein Glied zusammenfassen, und wir können uns diese Summe auf die Form $\varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$ gebracht denken. Der Model ϱ dieser Summe ist dann nach dem vorigen §. kleiner als die Summe der Model aller einzelnen Glieder, oder höchstens dieser Summe gleich; folglich hat man:

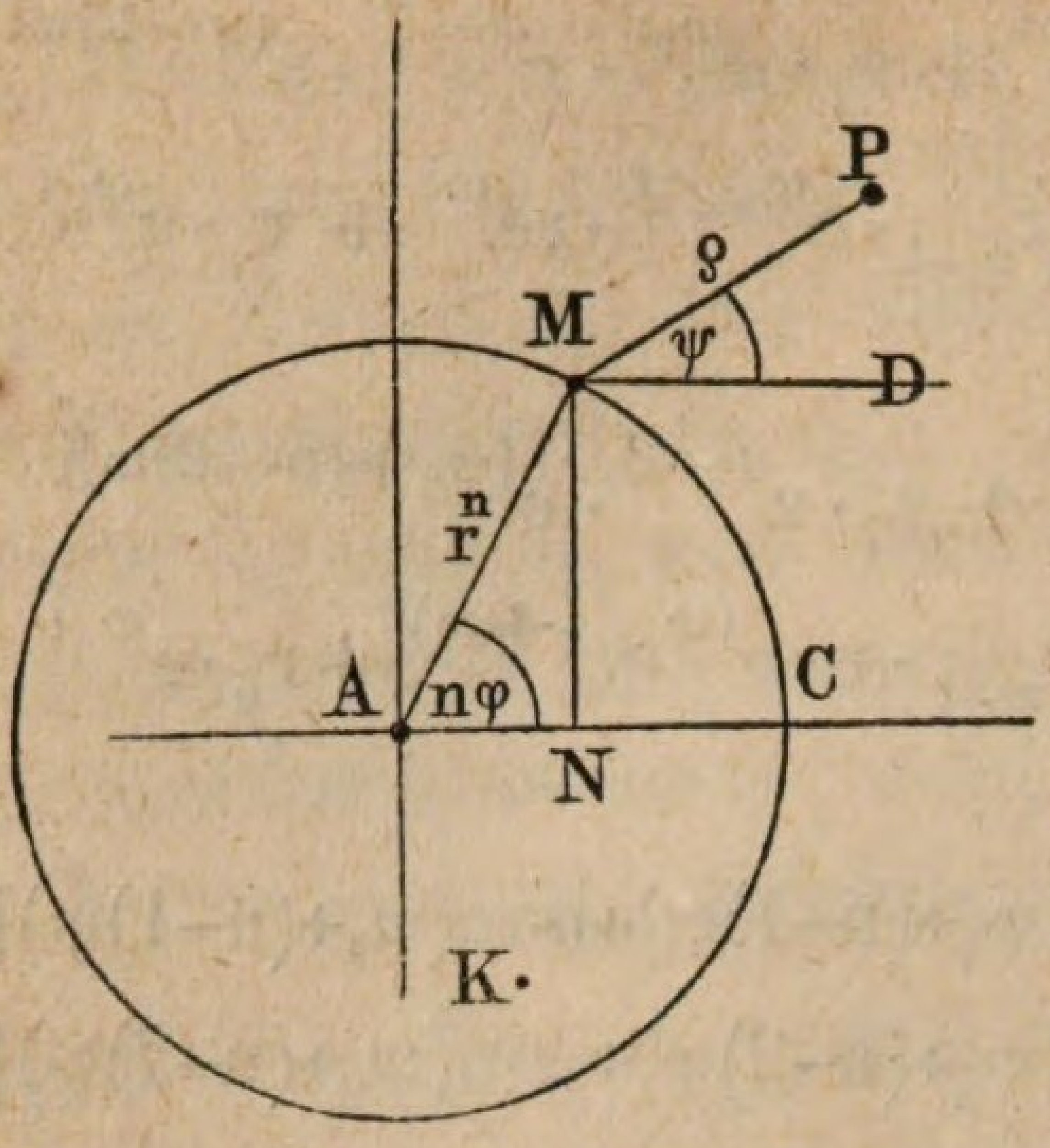
(1.) $\varrho \leqq r_1 \cdot r^{n-1} + r_2 \cdot r^{n-2} + r_3 \cdot r^{n-3} + \ldots + r_{n-1} \cdot r + r_n$.

Es ist jetzt also $\overset{(n)}{f}$ auf folgende Form gebracht:

(2.) $\overset{(n)}{f} = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$.

Wir haben nun zu zeigen, daß es immer zwei zusammengehörige Werthe von φ und r giebt, für welche $\overset{(n)}{f} = 0$ eine identische Gleichung ist. Weil nämlich $r\cos\varphi = p$, $r\sin\varphi = q$ und $x = p + qi$ war, so giebt es dann auch immer einen Werth von x, für welchen $\overset{(n)}{f}x = 0$ ist.

Nun ist $\overset{(n)}{f}$ ein zweigliedriger Ausdruck, und *jedes Glied ändert sich stetig mit r und φ* (man übersehe nicht, daß r und φ auch in dem zweiten Gliede enthalten sind); folglich muß sich auch $\overset{(n)}{f}$ *stetig mit r und φ ändern.*



Es sei nun M der Repräsentant des ersten Gliedes von $\overset{(n)}{f}$, d. h. von $r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, also $\angle MAN = n\varphi$ und $AM = r^n$. Denkt man sich nun $\angle PMD = \psi$ und $MP = \rho$ gemacht, so ist nach dem vorigen §. P der Repräsentant des ganzen Ausdrucks $\overset{(n)}{f}$, und für jeden bestimmten Werth von φ und r nimmt P eine bestimmte Lage an; fällt P in A, so ist $\overset{(n)}{f} = 0$ (vergl. Seite 274). Der Beweis hat sonach zu zeigen, daß es wenigstens immer ein Paar zusammengehöriger Werthe von φ und r giebt, für welche P in A fällt.

Man kann nun immer r so groß wählen, daß $r^n > r_1 r^{n-1} + r_2 r^{n-2} + r_3 r^{n-3} + \ldots + r_{n-1} r + r_n$ wird, weil $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$ bestimmte endliche Zahlen sind*). Bei dieser Wahl von r wird dann auch [aus (1.)] $r^n > \rho$, d. h. $AM > MP$, und einen solchen Werth denken wir uns zuerst statt r gesetzt; in der Figur stelle AM zunächst r^n für diesen Werth von r vor. Jetzt haben wir noch die Wahl von φ. Setzen wir nun für φ nach und nach alle stetig auf einander folgenden Werthe von 0° bis 360°, so erhält $n\varphi$ nach und nach alle stetig auf einander folgenden Werthe von 0° bis $n \cdot 360°$, d. h. der Punkt M, welcher für $\varphi = 0$ in C fällt, durchläuft von C aus nmal die Peripherie des Kreises um A mit dem Radius r^n. Für jede bestimmte Lage des Punktes M hat aber auch der Punkt P eine einzige bestimmte Lage, weil $\rho[\cos\psi + i \sin\psi]$, wie $\overset{(n)}{f}$ selbst, ein eindeutiger Ausdruck ist. Diese Lage kann zwar nicht näher bestimmt werden, weil sie von r und φ und den Constanten $r_1, r_2, r_3 \ldots, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ abhängt; da aber $r^n > \rho\,(AM > MP)$ ist und die Lage von P sich stetig

---

*) Erläuterung. Betrachtet man die endliche Reihe:

1) $r^n + r_1 \cdot r^{n-1} + r_2 \cdot r^{n-2} + r_3 \cdot r^{n-3} + \ldots\ldots + r_{n-1} \cdot r + r_n$

und sondert r^n ab, so entsteht:

2) $r^n\left[1 + r_1\left(\frac{1}{r}\right) + r_2\left(\frac{1}{r}\right)^2 + r_3\left(\frac{1}{r}\right)^3 + \ldots\ldots + r_{n-1}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} + r_n\left(\frac{1}{r}\right)^n\right]$.

Nach §. 199. I. kann man nun $\frac{1}{r}$ immer so klein, also r immer so groß wählen, daß das erste Glied in den Klammern der Reihe 2) größer wird, als die Summe aller folgenden Glieder, und bei dieser Wahl von r wird dann auch das erste Glied der Reihe 1) größer als die Summe aller folgenden Glieder.

ändert, wenn φ sich stetig ändert: so begleitet der Punkt P den Punkt M, während dieser die Peripherie des Kreises um A nmal durchläuft, in einer solchen Entfernung, daß die Spur des Punktes P, wenn er bei dieser Bewegung eine solche zurück ließe, eine Kurve sein würde, welche den Punkt A in n Windungen umschlingt. (Der Leser möge sich klar machen, daß diese Windungen nicht nothwendig A umschlingen müßten, wenn $AM < MP$ wäre; denn in diesem Umschlingen und in der Stetigkeit von $\overset{(n)}{f}$ liegt die Pointe des Beweises.)

Bisher gaben wir dem r einen einzigen bestimmten Werth, nämlich einen solchen, für welchen $AM > MP$ sein mußte. Nun denke man sich für r alle stetig auf einander folgenden immer kleineren Werthe gesetzt, von dem zuerst gewählten an, bis $r = 0$, und für jeden einzelnen lasse man wieder φ alle Werthe von 0° bis 360° durchlaufen. Der Punkt P begleitet dann den Punkt M so, daß er für jeden Werth von r immer wieder n Windungen macht, während M *jede* Kreisperipherie zwischen C und A nmal durchläuft, und *alle diese Windungen müssen sich stetig an einander anschließen* (gerade so, wie alle Kreisperipherien, welche zwischen A und der Kreisperipherie durch C möglich sind, sich stetig an einander anschließen). Setzt man zuletzt $r = 0$ (für welchen Werth $x = 0$ wird), so fällt M in A, und P ist jetzt Repräsentant des constanten Ausdrucks $r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$ oder a_n, also von φ unabhängig. Der Punkt P erhält also für $r = 0$ eine feste Lage und fällt irgend wo hin, etwa in K, während er kurz vorher für einen sehr kleinen Werth von r ganz in der Nähe von K noch n sehr kleine Windungen machte [denn $\overset{(n)}{f}$ weicht für sehr kleine Werthe von r sehr wenig von $r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$ oder a_n ab]. Während also P zuerst n Windungen machte, die den Punkt A umschlangen, haben sich diese Windungen später immer enger und enger zusammengezogen und endeten zuletzt in *einem* Punkte K. Da aber alle diese Windungen sich stetig an einander anschließen mußten, weil $\overset{(n)}{f}$ eine stetige Function ist, so muß nothwendig jede einzelne Windung einmal durch den Punkt A gegangen sein, und für diese Lage des Punktes P ist $\overset{(n)}{f} = 0$; folglich giebt es immer zwei zusammenhängende Werthe von r und φ, d. h. immer wenigstens *einen* Werth von x, für welchen $\overset{(n)}{f}x = 0$ wird; diese Gleichung hat also mindestens eine Wurzel. Daß die Gleichung nicht immer n von einander verschiedene Wurzeln zu haben braucht, obwohl jede Windung durch A gehen

muß, hat darin seinen Grund, daß mehrere oder alle Windungen gleichzeitig, d. h. für dieselben Werthe von r und φ, durch A gegangen sein können, und dieser Fall wird eintreten, wenn die Gleichung $\overset{(n)}{f}x = 0$ mehrere oder lauter gleiche Wurzeln hat.

Diesen Beweis hat in wenig anderer Form J. C. Ullherr im Crelle'schen Journal bekannt gemacht.

§. 228.

Verwandlung einer Gleichung mit imaginären Coefficienten in eine Gleichung mit reellen Coefficienten.

Jede Gleichung mit imaginären Coefficienten läßt sich auf eine Gleichung mit reellen Coefficienten zurückführen; nur wird diese von doppelt so hohem Grade.

Die gegebene Gleichung sei:

$$x^n + (p_1 + q_1 i)x^{n-1} + (p_2 + q_2 i)x^{n-2} + \ldots + (p_n + q_n i) = 0,$$

so kann man die reellen Glieder von den imaginären trennen:

$$(x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n) + i(q_1 x^{n-1} + q_2 x^{n-2} + \ldots + q_n) = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit der neuen:

$$(x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n) - i(q_1 x^{n-1} + q_2 x^{n-2} + \ldots + q_n) = 0,$$

so erhält man, weil der imaginäre Factor i fortfällt ($i^2 = -1$), eine Gleichung vom 2nten Grade mit reellen Coefficienten; unter ihren Wurzeln sind aber auch die der gegebenen Gleichung.

z. B. $x^3 - x^2\sqrt{-1} + x\sqrt{-1} + 1 = 0$.

Man schreibe diese Gleichung so:

$$(x^3 + 1) - i(x^2 - x) = 0$$

und multiplicire mit:

$$(x^3 + 1) + i(x^2 - x) = 0;$$

dann folgt:

$$(x^3 + 1)^2 + (x^2 - x)^2 = 0.$$

Ordnet man, so entsteht:

$$(1) \quad x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

Setzt man $x^2 = y$, so reducirt sich diese Gleichung auf eine kubische:

$$(2) \quad y^3 + y^2 + y + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad (y^2 + 1)(y + 1) = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind -1, $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$, folglich hat die Gleichung (1) die Wurzeln:

$$\pm\sqrt{-1}; \quad \pm\sqrt{+\sqrt{-1}}; \quad \pm\sqrt{-\sqrt{-1}}.$$

Durch Substitution in die gegebene Gleichung findet man, daß diese folgende drei Wurzeln hat:

$$+\sqrt{-1},\ +\sqrt{-\sqrt{-1}} \text{ und } -\sqrt{-\sqrt{-1}}.$$

Auf Grund des vorstehenden Satzes werden wir fortan immer Gleichungen mit reellen Coefficienten voraussetzen.

§. 229.

Lehrsatz.

Wenn eine Gleichung mit reellen Coefficienten eine imaginäre Wurzel von der Form $p+qi$ hat, so ist auch immer $p-qi$ eine Wurzel dieser Gleichung.

Hieraus folgt dann unmittelbar, daß imaginäre Wurzeln immer paarweise vorkommen müssen und daß jede Gleichung von einem ungeraden Grade wenigstens eine reelle Wurzel haben muß.

Beweis. Ist die gegebene Gleichung folgende:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

so soll nach der Voraussetzung

$$(p+qi)^n + a_1 (p+qi)^{n-1} + a_2 (p+qi)^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(p+qi) + a_n = 0$$

eine identische Gleichung sein. Setzt man

$$p + qi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so folgt nach der Moivre'schen Formel:

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + a_1 r^{n-1}[\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi]$$
$$+ a_2 r^{n-2}[\cos(n-2)\varphi + i\sin(n-2)\varphi] + \ldots + a_{n-1} r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$+ a_n = 0.$$

Nimmt man die reellen Glieder zusammen und dann auch die imaginären, so folgt:

$$[r^n\cos n\varphi + a_1 r^{n-1}\cos(n-1)\varphi + a_2 r^{n-2}\cos(n-2)\varphi + \ldots + a_{n-1} r\cos\varphi + a_n]$$
$$+ [r^n\sin n\varphi + a_1 r^{n-1}\sin(n-1)\varphi + a_2 r^{n-2}\sin(n-2)\varphi + \ldots + a_{n-1} r\sin\varphi]\, i$$
$$= 0.$$

Bezeichnet man die beiden Summen in den großen Klammern resp. mit f und F, so hat man:

$$1)\quad f + i\cdot F = 0.$$

Hätte man $x = p - qi$ gesetzt, so würde man erhalten haben:

$$2)\quad f - i\cdot F = 0.$$

Denn man kann $p - qi = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ setzen und r und φ aus den Gleichungen $r\cos\varphi = p$, $r\sin\varphi = q$ bestimmen. Es

haben daher r und φ dieselben Werthe, welche sie erhalten, wenn man $p+qi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ setzt.

Unser Satz wäre nun richtig, wenn aus der Gleichung 1) die Richtigkeit der Gleichung 2) folgen müßte. Dies ist aber der Fall; denn aus 1) folgt (§. 155. Anmerk. 1.):

$$f = 0 \text{ und } F = 0;$$

folglich ist auch $$f - i \cdot F = 0.$$

Da $[x-(p+qi)]\cdot[x-(p-qi)] = (x-p)^2+q^2$, also reell ist, so kann jeder Ausdruck $\overset{(n)}{fx}$ mit reellen Coefficienten in ein Product verwandelt werden, dessen Factoren entweder reelle einfache von der Form $x+\alpha$, oder reelle Doppel-Factoren von der Form $x^2+\alpha x+\beta$, oder endlich Factoren beider Art sind.

Anmerkung. Es mag noch bemerkt werden, daß, wenn man in eine Gleichung $\varphi(x) = 0$ statt x den Ausdruck $y-a$ substituirt, dann jede Wurzel der neuen Gleichung $f(y) = 0$ um a größer ist, als eine Wurzel der ursprünglichen Gleichung; setzt man aber $x = \frac{y}{a}$, so wird jede Wurzel das afache einer Wurzel der ursprünglichen Gleichung.

Die numerischen Gleichungen.

§. 230.

Erklärung. Lehrsatz.

Jede Gleichung, deren Coefficienten numerische ganze oder gebrochene Zahlen sind, wird eine numerische genannt.

Sind die Coefficienten einer numerischen Gleichung ganze Zahlen (oder Null), so sind alle rationalen Wurzeln derselben ebenfalls ganze Zahlen und Theiler des letzten Gliedes.

Beweis. Wäre die gebrochene Zahl $\frac{\alpha}{\beta}$, in welcher wir α und β relativ prim annehmen dürfen, eine Wurzel der Gleichung

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px^2 + qx + r = 0,$$

deren Coefficienten ganze Zahlen sein sollen: so würde aus der identischen Gleichung

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} + b\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-2} + \ldots + p\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + q\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + r = 0,$$

wenn man mit β^n multiplicirt, folgen, daß auch

$$\alpha^n = -[a\alpha^{n-1}\beta + b\alpha^{n-2}\beta^2 + \ldots + p\alpha^2\beta^{n-2} + q\alpha\beta^{n-1} + r\beta^n]$$

sein müßte. Die rechte Seite ist aber eine durch β theilbare ganze Zahl; folglich müßte auch die linke Seite α^n durch β theilbar sein, und dies widerspricht der Annahme, daß α und β relativ prim sind.

Ist aber die ganze Zahl δ eine Wurzel der gegebenen Gleichung, d. h. ist folgende Gleichung eine identische:

$$\delta^n + a\delta^{n-1} + b\delta^{n-2} + \ldots + p\delta^2 + q\delta + r = 0,$$

so folgt:

$$\delta^n + a\delta^{n-1} + b\delta^{n-2} + \ldots + p\delta^2 + q\delta = -r.$$

Da die linke Seite eine durch δ theilbare ganze Zahl ist, so muß auch r durch δ theilbar sein.

Wir haben jetzt schon ein Mittel in Händen, alle rationalen Wurzeln einer Gleichung mit ganzen Coefficienten zu finden. Wir suchen alle positiven und negativen Theiler des letzten Gliedes und substituiren jeden statt x in die gegebene Gleichung; erzeugt kein Theiler eine identische Gleichung, so kann die gegebene Gleichung nur irrationale und imaginäre Wurzeln haben. Es sei z. B. gegeben:

$$x^4 - 20x^2 + 28x + 15 = 0.$$

Die Theiler des letzten Gliedes sind:

$$+1, \; -1, \; +3, \; -3, \; +5, \; -5, \; +15, \; -15.$$

Hat die Gleichung überhaupt rationale Wurzeln, so sind sie unter diesen Zahlen zu suchen. Man findet durch die Probe die zwei Wurzeln $x = +3$ und $x = -5$. Die andern Wurzeln sind irrational oder imaginär; man erhält sie, wenn man die gegebene Gleichung durch $(x-3)(x+5)$ oder $x^2 + 2x - 15$ dividirt, den Quotienten $x^2 - 2x - 1$ gleich Null setzt und x entwickelt. Die beiden fehlenden Wurzeln sind $1 + \sqrt{2}$ und $1 - \sqrt{2}$.

Die Untersuchung, ob ein Theiler des letzten Gliedes eine Wurzel ist oder nicht, wird durch den Satz im nächsten §. erleichtert.

§. 231.

Das Auffinden aller rationalen Wurzeln einer Gleichung mit ganzen Coefficienten.

Hat eine Gleichung

$$x^n + ax^{n-1} + \ldots + px^2 + qx + r = 0,$$

in welcher fehlende Glieder mit dem Factor 0 hinzugefügt sind, nur ganze Coefficienten und ist die ganze Zahl α eine Wurzel, so muß α folgendes Gesetz erfüllen: Dividirt man mit α in r, addirt zum Quotienten q, dividirt die Summe wieder durch α, addirt zum Quotienten p, dividirt die Summe wieder durch α u. s. w., bis man zum

Schluß auch a addirt, die Summe wieder durch α dividirt und endlich noch zum Quotienten den Factor des ersten Gliedes $+1$ addirt hat: so muß

1) jede Division (durch α) aufgehen, und

2) das End-Resultat gleich Null sein.

Wir wollen zunächst sehen, ob dies Gesetz durch die Wurzeln $+3$ und -5 im Beispiel des vorigen §. bestätigt wird.

Die Gleichung war

$$x^4 + 0 \cdot x^3 - 20x^2 + 28x + 15 = 0.$$

Das Glied $0 \cdot x^3$ müssen wir als zweites hinzufügen. Man überzeugt sich nun leicht von der Richtigkeit des Gesetzes in diesem besondern Falle; es ist

$$\frac{15}{3} = 5 \qquad \text{und auch} \qquad \frac{15}{-5} = -3$$

$$\frac{5+28}{3} = 11 \qquad\qquad \frac{-3+28}{-5} = -5$$

$$\frac{11-20}{3} = -3 \qquad\qquad \frac{-5-20}{-5} = +5$$

$$\frac{-3+0}{3} = -1 \qquad\qquad \frac{+5+0}{-5} = -1$$

$$-1+1 = 0. \qquad\qquad -1+1 = 0.$$

Der Beweis ist sehr einfach und wird hinreichend klar, wenn wir auch nur eine Gleichung vom vierten Grade zum Grunde legen:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Es sei die ganze Zahl α eine Wurzel der Gleichung, so hat man folgende identische Gleichung:

$$\alpha^4 + a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0.$$

Hieraus:

$$\frac{d}{\alpha} = -c - b\alpha - a\alpha^2 - \alpha^3 \qquad \text{(also eine ganze Zahl)},$$

$$\frac{\frac{d}{\alpha} + c}{\alpha} = -b - a\alpha - \alpha^2 \qquad \text{(also eine ganze Zahl)},$$

$$\frac{\frac{\frac{d}{\alpha} + c}{\alpha} + b}{\alpha} = -a - \alpha \qquad \text{(also eine ganze Zahl)},$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{d}{\alpha}+c}{\alpha}+b}{\alpha}+a}{\alpha} = -1; \text{ daher endlich:}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{d}{\alpha}+c}{\alpha}+b}{\alpha}+a}{\alpha} + 1 = 0.$$

Verfolgt man die Rechnung rückwärts, so überzeugt man sich leicht, daß aus der letzten Gleichung sich die ursprüngliche

$$\alpha^4 + a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0$$

wieder herstellen läßt. Hieraus folgt aber, daß der bewiesene Satz auch umgekehrt wahr ist, d. h. wenn ein Theiler α des letzten Gliedes der geordneten Gleichung mit ganzen Coefficienten das angegebene Gesetz erfüllt, so ist er eine Wurzel dieser Gleichung.

Aus dem Beweise ergiebt sich, daß die Coefficienten auch Null sein können, aber ebenfalls in die Rechnung gezogen werden müssen.

Die Untersuchung, ob ein Theiler des letzten Gliedes eine Wurzel der Gleichung ist, kann nach dem angegebenen Gesetze sehr wohl mit allen Theilern zugleich geschehen, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = 0.$$

Theiler von 12:	1	— 1	2	— 2	3	— 3	4	— 4	6	— 6	12	—12
dividirt (in — 12):	—12	12	— 6	6	— 4	4	— 3	3	— 2	2	— 1	1
— 16 addirt:	—28	— 4	—22	—10	—20	—12	—19	—13	—18	—14	—17	—15
dividirt:	—28	4	—11	5		4			— 3			
— 1 addirt:	—29	3	—12	4		3			— 4			
dividirt:	—29	— 3	— 6	— 2		— 1						
+ 4 addirt:	—25	1	— 2	2		3						
dividirt:	—25	— 1	— 1	— 1		— 1						
+ 1 addirt:	—24	0	0	0		0						

Die Wurzeln der Gleichung sind also: — 1, + 2, — 2 und — 3.

Da + 1 und — 1 als Theiler immer vorkommen, man aber erst

am Schlusse erfährt, ob sie Wurzeln sind, oder nicht so ist es bequemer, sie durch unmittelbare Substitution zu beseitigen.

Beispiel 2. $x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 6x + 20 = 0$.

Da $\varphi(1) = +18$, $\varphi(-1) = +20$ ist, so sind $+1$ und -1 nicht Wurzeln der Gleichung.

Theiler von 20:	2	−2	4	−4	5	−5	10	−10	20	−20
dividirt (in +20):	10	−10	5	−5	4	−4	2	−2	1	−1
−6 addirt:	4	−16	−1	−11	−2	−10	−4	−12	−5	−7
dividirt:	2	8				2				
−2 addirt:	0	6				0				
dividirt:	0	−3				0				
+5 addirt:	5	2				5				
dividirt:		−1				−1				
+1 addirt:		0				0				

Die Gleichung hat nur zwei rationale Wurzeln: -2 und -5. Die beiden andern Wurzeln ergeben sich (auf bekanntem Wege) aus der Gleichung $x^2 - 2x + 2 = 0$. Sie sind $1 + \sqrt{-1}$ und $1 - \sqrt{-1}$.

Beispiel 3. $x^4 - 14x^2 - 11x + 12 = 0$.

Man erhält die rationalen Wurzeln -3 und $+4$ und die irrationalen $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Beispiel 4. $x^5 + 2x^4 - 11x^3 - 8x^2 + 20x + 16 = 0$.

Die Wurzeln sind: -4, $+2$, $+2$, -1 und -1.

Beispiel 5. $x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 22x + 12 = 0$.

Auflös. Die reellen Wurzeln dieser Gleichung müssen negativ sein. Man findet die Wurzeln: -2, -3, $-1 + \sqrt{-1}$ und $-1 - \sqrt{-1}$.

Beispiel 6. $x^5 - 6x^4 - 4x^3 + 40x^2 + 27x - 10 = 0$.

Auflös. Die Wurzeln sind: -1, -2, $+5$, $2 + \sqrt{3}$ und $2 - \sqrt{3}$.

Beispiel 7. $x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 = 0$.

Auflös. Die Wurzeln sind: $+5$, -2, $1 + \sqrt{2}$ und $1 - \sqrt{2}$.

Beispiel 8. $x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 10x^2 - 24x - 24 = 0$.

Auflös. Die Wurzeln sind: -2, -2, $+\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $+i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$.

Beispiel 9. Die rationalen Wurzeln der Gleichung $x^5 + 3x^2 - 5x + 10 = 0$ zu finden.

Auflös. Die Gleichung hat nur die eine rationale Wurzel: -2.

§. 232.

Das Auffinden aller rationalen Wurzeln einer Gleichung mit gebrochenen (rationalen) Coefficienten.

Sind alle Coefficienten einer numerischen Gleichung rationale Zahlen, beliebig viele derselben aber Brüche, so sind alle rationalen Wurzeln der Gleichung ebenfalls leicht zu finden. Eine solche Gleichung läßt sich immer auf eine andere reduciren, deren Coefficienten ganze Zahlen sind. Man setzt für die Unbekannte x einen Bruch, dessen Zähler eine Hülfs-Unbekannte y und dessen Nenner das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner aller gebrochenen Coefficienten ist. Es sei z. B. gegeben:

$$(1.)\quad x^3 + \frac{11}{6}x^2 + x + \frac{1}{6} = 0.$$

Setzt man $x = \frac{y}{6}$, so folgt

$$\left(\frac{y}{6}\right)^3 + \frac{11}{6}\left(\frac{y}{6}\right)^2 + \frac{y}{6} + \frac{1}{6} = 0.$$

Multiplicirt man mit 6^3, so entsteht

$$(2.)\quad y^3 + 11y^2 + 36y + 36 = 0.$$

Alle rationalen Wurzeln dieser Gleichung sind ganze Zahlen und nach §. 231. zu finden; jede giebt, durch 6 dividirt, eine Wurzel der Gleichung (1.). Die Gleichung (2.) kann offenbar nur negative Wurzeln haben (oder imaginäre); folglich braucht man das im vorigen §. angegebene Verfahren nur mit den negativen Theilern von 36 vorzunehmen. Man erhält als Wurzeln der Gleichung (2.): -2, -3 und -6; folglich hat die Gleichung (1.) die Wurzeln $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$ und -1.

Indem man aber, Behufs der Reduction einer Gleichung mit gebrochenem Coefficienten auf eine mit ganzen, $x = \frac{y}{m}$ setzt, ist es nicht immer nöthig, daß m der General-Nenner aller gegebenen gebrochenen Coefficienten sei; häufig reicht man mit einem kleineren Nenner aus; nur muß m so gewählt werden, daß, nach Auflösung der Klammern, der Nenner des ersten Gliedes die übrigen Nenner zu Theilern hat; denn mit diesem Nenner des ersten Gliedes muß die Gleichung multiplicirt werden, weil der Coefficient des ersten Gliedes 1 werden soll. Ist z. B. die Gleichung

$$x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9}x - \frac{2}{27} = 0$$

gegeben, so braucht man nicht $x = \frac{y}{27}$, nicht einmal $x = \frac{y}{9}$ zu setzen; es genügt $x = \frac{y}{3}$. Man erhält dann

$$\frac{y^3}{27} + \frac{2}{3} \cdot \frac{y^2}{9} - \frac{1}{9} \cdot \frac{y}{3} - \frac{27}{2} = 0 \text{ oder}$$
$$y^3 + 2y^2 - y - 2 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind $+1$, -1 und -2; folglich hat die gegebene Gleichung die Wurzeln $+\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$ und $-\frac{2}{3}$.

Zur Uebung. Beispiel 1. $x^3 + 2x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$.

Auflös. Man setze $x = \frac{y}{2}$. Die gesuchten Wurzeln sind:

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \text{ und } -2.$$

Beispiel 2. $x^3 - 2x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{2}{3} = 0$.

Auflös. Die Wurzeln sind: $+3$, $-\frac{1}{3}$ und $-\frac{2}{3}$.

Beispiel 3. $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{18}x - \frac{1}{9} = 0$.

Auflös. Man setzt $x = \frac{y}{6}$. Die Wurzeln sind: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$.

Beispiel 4. $x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16} = 0$.

Auflös. Die Wurzeln sind: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$.

Beispiel 5. $x^4 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{9}x^2 - \frac{5}{27}x - \frac{2}{27} = 0$.

Auflös. Die Wurzeln sind: $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ und -1.

Beispiel 6. $x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{36}x^2 + \frac{2}{27}x - \frac{1}{108} = 0$.

Auflös. Die Wurzeln sind: $+\frac{1}{6}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ und $+\frac{1}{2}$.

Beispiel 7. $x^3 + \frac{11}{6}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = 0$.

Auflös. Die Wurzeln sind: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ und -2.

Beispiel 8. $x^4 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{37}{36}x^2 - \frac{5}{216}x + \frac{1}{36} = 0$.

Auflös. Man setzt $x = \frac{y}{6}$. Die Wurzeln sind: $\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{2}{3}$ und $-\frac{3}{2}$.

Beispiel 9. $x^5 - \frac{5}{12}x^4 + \frac{11}{24}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{13}{24}x + \frac{1}{4} = 0.$

Auflös. Die Wurzeln sind: $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, +\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$.

Beispiel 10. Welche Wurzeln hat die Gleichung

$$\frac{(x+1)^2}{x+9} + \frac{2x^2}{(x+9)(x+1)} + 1 = 0?$$

Antw. $-2, -2+\sqrt{-1}$ und $-2-\sqrt{-1}$.

Beispiel 11. $x^6 + x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 6 = 0.$

Auflös. Die Wurzeln sind: $+1, -2, +\sqrt{3}, -\sqrt{3}, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$.

Beispiel 12. $\frac{(x+1)^5 - (x-1)^5 - 2}{10} = x^4 + x^3 + x + 4.$

Auflös. Die Wurzeln sind -1, $\frac{1}{2}(3+\sqrt{-7})$, und $\frac{1}{2}(3-\sqrt{-7})$.

§. 233.

Das Auffinden der irrationalen Wurzeln nach der Newton'schen Methode.

Hat die gegebene Gleichung $\overset{(n)}{\varphi x} = 0$ keine rationalen Wurzeln, so kann man die irrationalen auf folgende Weise zu bestimmen suchen: Da $\overset{(n)}{\varphi x}$ eine stetige Function von x ist, so muß, wenn für einen Werth von x, etwa a, $\varphi(a)$ positiv, für einen andern, etwa b, $\varphi(b)$ negativ wird, nothwendig zwischen den Zahlen a und b wenigstens eine Zahl liegen, welche für x gesetzt, $\overset{(n)}{\varphi x}$ zu Null macht, und diese Zahl ist dann eine Wurzel der Gleichung $\overset{(n)}{\varphi x} = 0$. Es handelt sich also zuerst darum, zwei solche Grenzwerthe von x zu finden, zwischen denen eine Wurzel liegen muß. Zur Bestimmung solcher Grenzwerthe kann man zunächst den Satz benutzen:

Man kann x immer so groß wählen, daß das erste Glied der linken Seite der Gleichung

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \ldots + px^2 + qx + r = 0$$

größer wird, als die absolute Summe aller übrigen Glieder.

Zum Beweise wollen wir annehmen, daß unter allen Coefficienten ohne Rücksicht auf das Vorzeichen der größte = A sei. Setzen wir ferner den ungünstigsten Fall voraus, in welchem alle Glieder vom zweiten an dasselbe Vorzeichen haben, so leuchtet die Richtigkeit des Satzes in jedem Falle ein, wenn man x so groß wählen kann, daß (A absolut gedacht)

$$(1.)\quad x^n > Ax^{n-1} + Ax^{n-2} + Ax^{n-3} + \ldots + Ax^2 + Ax + A$$

wird. Die rechte Seite ist eine geometrische Progression von n Gliedern, deren Summe gleich $\frac{x^n - 1}{x - 1} \cdot A$ ist. Man hat also x so zu bestimmen, daß

$$(2.)\quad x^n > \frac{x^n}{x-1} \cdot A - \frac{A}{x-1}$$

wird. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn

$$(3.)\quad x^n = \frac{x^n}{x-1} \cdot A$$

ist, vorausgesetzt, daß aus dieser Gleichung sich $x > 1$ ergiebt. Dies ist aber der Fall; denn es entsteht:

$$x = A + 1.$$

Natürlich wird die Bedingung in (2.), also auch die in (1.), um so mehr erfüllt, wenn man

$$x > A + 1$$

wählt.

Setzt man also in $\overset{(n)}{\varphi}x = 0$ für x eine Zahl, welche um 1 größer ist, als (vom Vorzeichen abgesehen) der größte Coefficient vom 2ten Gliede an, so ist das erste Glied in $\overset{(n)}{\varphi}x$ größer als die Summe aller übrigen.

Hieraus folgt, daß man x immer so groß wählen kann, daß der Werth von $\overset{(n)}{\varphi}x$ positiv wird; denn das erste Glied x^n wird für $x = A + 1$ positiv und größer als die Summe aller übrigen Glieder. Ist n eine gerade Zahl, so findet dasselbe Statt, wenn man $x = -(A + 1)$ setzt; ist aber n ungerade, so wird in diesem Falle nicht nur x^n negativ, sondern auch $\overset{(n)}{\varphi}x$ selbst. Ist z. B.

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x - 4 = 0$$

gegeben, und setzt man $x = 5 + 1$, d. h. $x = 6$, oder auch $x = -6$, so wird in beiden Fällen der Werth der linken Seite positiv. Dies ist um so mehr der Fall, wenn man $x > 6$ oder $x < -6$ wählt, und man erkennt sofort, daß, wenn die Gleichung $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x - 4 = 0$ überhaupt reelle Wurzeln hat, diese zwischen $+6$ und -6 liegen müssen. Weil ferner in dem vorliegenden Beispiele das letzte Glied der linken Seite negativ ($= -4$) ist, so wird für $x = 0$ der Werth der linken Seite negativ; folglich muß die vorliegende Gleichung wenigstens zwei reelle Wurzeln haben, von denen die eine zwischen 0 und $+6$, die andere zwischen 0 und -6 liegt. — Wäre das letzte Glied positiv, so würde die Existenz reeller Wurzeln so lange zweifelhaft sein, bis ein Werth von x nachgewiesen ist,

welcher die linke Seite negativ macht. Bekanntlich kann die Gleichung von geradem Grade lauter imaginäre Wurzeln haben.

Nehmen wir jetzt eine Gleichung von ungeradem Grade:

$$x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0.$$

Für $x = 4$ ist der Werth der linken Seite positiv, für $x = -4$ aber negativ; folglich muß eine Wurzel der Gleichung zwischen $+4$ und -4 liegen. Weil aber das letzte Glied positiv $(+1)$ ist, also für $x = 0$ der Werth der linken Seite positiv, so können wir engere Grenzen angeben: es muß eine Wurzel zwischen $x = 0$ und $x = -4$ liegen. Wäre das letzte Glied negativ, so müßte eine Wurzel zwischen $x = 0$ und $x = +4$ liegen. Ueber die beiden Grenzen $+4$ und -4 hinaus kann aber überhaupt keine Wurzel der Gleichung liegen.

Fassen wir das, was diese Beispiele lehren, allgemein auf, so folgt: Ist A (vom Vorzeichen abgesehen) der größte Coefficient, so müssen

1) bei jeder Gleichung von einem geraden Grade, wenn sie überhaupt reelle Wurzeln hat, diese zwischen den Grenzen $x = A + 1$ und $x = -(A + 1)$ liegen. Ist das letzte Glied negativ, so liegt wirklich eine reelle Wurzel zwischen $x = 0$ und $x = A + 1$, und eine zweite zwischen $x = 0$ und $x = -(A + 1)$. Ist aber das letzte Glied positiv, so ist die Existenz reeller Wurzeln so lange zweifelhaft, bis ein Werth von x [zwischen $A + 1$ und $-(A + 1)$] nachgewiesen ist, der die linke Seite negativ macht.

2) Bei der Gleichung von einem ungeraden Grade muß, wenn das letzte Glied negativ ist, eine Wurzel zwischen $x = 0$ und $x = A + 1$ liegen; ist das letzte Glied positiv, so muß eine Wurzel zwischen $x = 0$ und $x = -(A + 1)$ liegen. Eine reelle Wurzel muß eine solche Gleichung mindestens haben; aber alle reelle Wurzeln, welche sie überhaupt hat, liegen zwischen den Grenzen $x = A + 1$ und $x = -(A + 1)$.

Wenn man zwei Grenzwerthe gefunden hat, zwischen denen eine Wurzel der Gleichung $\varphi x = 0$ liegen muß, so kommt es darauf an, diese Grenzwerthe nach und nach näher aneinander zu rücken, so daß ihr Unterschied möglichst klein wird, zunächst wenigstens nicht größer als 1. In diesem Falle hat man dann zwei um 1 verschiedene Zahlen, von denen die eine statt x gesetzt, φx positiv, die andere statt x gesetzt, φx negativ macht. Bezeichnet a eine dieser Zahlen, und $a + 1$ die andere, so kann man $x = a + z$ setzen, und z ist dann jedenfalls kleiner als 1. Die vorliegende Methode, deren sich Newton (lebte 1642 bis 1727) zuerst bediente, besteht nun darin, daß man, um z zu finden, den Werth $x = a + z$ in $\varphi x = 0$ statt x substituirt, alle Klammern auflöst und alle höheren Potenzen von z,

also z^2, z^3, z^4, ... außer Acht läßt, d. h. alle Glieder, welche diese Potenzen von z enthalten, fortläßt. Dadurch erhält man eine Gleichung vom ersten Grade, aus welcher z zu entwickeln ist. Weil z ein echter Bruch sein muß, so werden z^2, z^3, z^4, ... im Verhältniß zu z immer kleiner und kleiner, also unbedeutender, und man erhält durch die Entwicklung von z ein annähernd richtiges Resultat. Addirt man dann den gefundenen Werth von z zu a, so hat man für x einen Näherungswerth.

Dasselbe Verfahren kann man nun beliebig oft wiederholen. Ist a' der gefundene Näherungswerth von x, so setzt man wieder $x = a' + z$ und findet auf dieselbe eben angegebene Weise z. Dadurch erhält man für x einen zweiten, genaueren Näherungswerth a'' und kann wieder $x = a'' + z$ setzen und so nach und nach x immer genauer bestimmen.

Setzt man aber $x = a + z$ in die Gleichung $\varphi x = 0$ ein, so entsteht:

$$(1.) \quad \varphi(a + z) = 0.$$

Ordnet man aber $\varphi(x + z)$ nach den Potenzen von z, so ist bekanntlich:

$$\varphi(x + z) = \varphi x + \varphi' x \cdot z + C \cdot z^2 + \ldots.$$

und setzt man jetzt $x = a$, so folgt:

$$\varphi(a + z) = \varphi(a) + \varphi'(a) \cdot z + C \cdot z^2 + \ldots.$$

Läßt man die Glieder, welche z^2, z^3, ... enthalten, fort, so ergiebt sich also aus (1.) die Gleichung $\varphi(a) + \varphi'(a) \cdot z = 0$, und aus ihr folgt:

$$(2.) \quad z = -\frac{\varphi(a)}{\varphi'(a)},$$

d. h. z ist dem entgegengesetzten Bruche gleich, welcher entsteht, wenn man in φx und $\varphi' x$ statt x, a setzt und dann $\varphi(a)$ durch $\varphi'(a)$ dividirt.

Zu bemerken ist noch, daß es bei dem Aufsuchen der Grenzwerthe von x, zwischen denen eine Wurzel der Gleichung $\varphi x = 0$ liegt, zu wissen wichtig ist, für welche Werthe von x die Function φx steigt oder fällt, daß also bei dieser Untersuchung die Ableitung $\varphi' x$ wesentliche Dienste leisten kann.

Ein Beispiel wird dies und das ganze Verfahren erläutern. Es sei folgende Gleichung aufzulösen:

Beispiel 1. $x^3 - 2x^2 - 6x + 8 = 0$.

Auflös. Eine Wurzel muß nothwendig zwischen $x = 0$ und $x = -9$ liegen, und weil das letzte Glied positiv ist, so müssen die andern Wurzeln, falls sie reell sind, beide positiv oder beide ne-

gativ sein (§. 224., am Schlusse). Mittelst der Ableitung der linken Seite bekommen wir bald engere Grenzen. Es sei:

$$\varphi x = x^3 - 2x^2 - 6x + 8, \text{ so folgt:}$$

$$\varphi' x = 3x^2 - 4x - 6 = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x - 2\right).$$

Aus $\varphi' x = 0$ folgt $x = +2{,}2\ldots.$ und $x = -0{,}89\ldots.$; daher steigt, während x alle Werthe von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ durchläuft, φx von $x = -\infty$ bis $x = -0{,}89$. Von $x = -0{,}89$ bis $x = +2{,}2$ fällt φx, und von $x = +2{,}2$ bis $x = +\infty$ steigt φx wieder. Bei jedem Steigen und bei jedem Fallen kann φx einmal zu Null werden; folglich kann $\varphi x = 0$ drei reelle Wurzeln haben. Ist dies der Fall, so muß nothwendig die eine Wurzel zwischen $x = -9$ und $x = -0{,}89$ liegen, die zweite zwischen $x = -0{,}89$ und $x = +2{,}2$ und die dritte zwischen $x = +2{,}2$ und $x = +9$.

Setzen wir nun in φx für x bestimmte Werthe ein, so finden wir $\varphi(-3) = -19$; daher kann unter -3 keine Wurzel liegen. Ferner ist $\varphi(-2) = +4$; folglich liegt eine Wurzel nothwendig zwischen $x = -3$ und $x = -2$.

Ferner ist $\varphi(0) = +8$, $\varphi(1) = +1$, $\varphi(2) = -4$; daher muß eine zweite Wurzel nothwendig zwischen $x = 1$ und $x = 2$ liegen.

Die dritte Wurzel muß reell sein; wo ist sie zu suchen? Bekanntlich ist die Summe der entgegengesetzten Wurzeln dem Coefficienten des zweiten Gliedes gleich, also hier $= -2$. Nun können wir die erste Wurzel $= -3 + z$, die zweite $= 1 + z'$ setzen, und bezeichnet α die dritte Wurzel, so muß

$$-3 + z + 1 + z' + \alpha = +2$$

sein. Hieraus folgt $\alpha = 4 - z - z'$. Da z und z' echte Brüche sind, so liegt die dritte Wurzel in der Nähe von $+3$. Man findet aber

$$\varphi(3) = -1, \quad \varphi(4) = +16;$$

folglich liegt die dritte Wurzel zwischen 3 und 4.

x	φx
-3	-19
-2	$+4$
-1	$+11$
0	$+8$
$+1$	$+1$
$+2$	-4
$+3$	-1
$+4$	$+16$

Zur besseren Uebersicht wollen wir die Werthe von φx, welche die Aenderung dieser Function, wenn x sich ändert, erkennen lassen, nochmals zusammenstellen, und rathen dem Leser, den Gang dieser Function durch eine Curve sich auf dieselbe Art zu versinnlichen, wie dies in §. 200. geschehen ist. Die Abscissen dieser Curve sind die Werthe von x, die Ordinaten die zugehörigen Werthe von φx. Die Durchschnittspunkte der Curve mit der Abscissenlinie versinnlichen die Werthe von x, für welche $\varphi x = 0$ ist.

Wir wollen jetzt zur genaueren Bestimmung der Wurzeln der gegebenen Gleichung übergehen und, weil dies am bequemsten zu sein scheint, zuerst die Wurzel bestimmen, welche zwischen 1 und 2 liegt. Wir haben also als ersten Näherungswerth:

$$1)\quad x = 1.$$

Setzen wir nun $x = 1 + z$, so ist annähernd

$z = -\frac{\varphi(1)}{\varphi'(1)}$. Es ist aber

$$\frac{\varphi x}{\varphi' x} = \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 8}{3x^2 - 4x - 6}, \text{ folglich}$$

$$z = -\frac{1 - 2 - 6 + 8}{3 - 4 - 6} = +\frac{1}{7} = +0{,}14 \ldots.$$

Wir haben sonach

$$2)\quad x = 1{,}14.$$

Allerdings ist hier die zweite Decimalstelle sehr unsicher; aber die nächste Correction wird hierüber entscheiden.

Wir setzen jetzt $x = 1{,}14 + z$; dann ist

$$z = -\frac{1{,}14^3 - 2 \cdot 1{,}14^2 - 6 \cdot 1{,}14 + 8}{3 \cdot 1{,}14^2 - 4 \cdot 1{,}14 - 6} = +\frac{0{,}042344}{6{,}6612} \text{ oder}$$

$z = +0{,}0063$. Daher ist

$$3)\quad x = 1{,}1463.$$

Setzen wir weiter $x = 1{,}1463 + z$, so folgt

$$z = -\frac{1{,}1463^3 - 2 \cdot 1{,}1463^2 - 6 \cdot 1{,}1463 + 8}{3 \cdot 1{,}1463^2 - 4 \cdot 1{,}1463 - 6}$$

$$= +\frac{0{,}000435049847}{6{,}64318893} = 0{,}00006548.$$

Hiernach ist

$$4)\quad x = 1{,}14636548.$$

Es ist sonach jetzt eine Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 6x + 8 = 0$$

gefunden, nämlich:

$$\text{I.}\quad x = 1{,}14636548.$$

Auf demselben Wege können wir nun die anderen Wurzeln finden. Wir wollen es aber vorziehen, diese anderen Wurzeln aus der quadratischen Gleichung zu entwickeln, welche entsteht, wenn wir die linke Seite der gegebenen Gleichung durch $x - 1{,}14636548$ dividiren. Da die Division aufgehen muß, so haben wir in derselben zugleich eine Probe der Richtigkeit der gefundenen Wurzel. Der Quotient wird

$$x^2 - 0{,}85363452x - 6{,}97857715;$$

der Rest ist $= 0{,}00000008$, also sehr nahe $= 0$.

Aus $x^2 - 0{,}85363452x - 6{,}97857715 = 0$ folgen die beiden anderen Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$\text{II. } x = 3{,}10277505. \quad \text{III. } x = -2{,}24914053.$$

Die Summe der drei Wurzeln muß $= +2$ sein, was vollkommen stimmt.

Anmerkung 1. Daß eine Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 6x + 8 = 0$$

zwischen $+1$ und $+2$ liegen müsse, schlossen wir daraus, daß

$$\varphi(+1) = +1 \text{ und } \varphi(+2) = -4$$

war. Aus diesen Werthen der Function φx kann man aber schon annähernd auf die Größe der zwischen $+1$ und $+2$ liegenden Wurzel der Gleichung schließen. Man nimmt an, daß zwischen diesen Grenzen x und φx sich proportional ändern, und hätte dann das Intervall von $+1$ bis $+2$ nach demselben Verhältniß zu theilen, nach welchem das Intervall von $+1$ bis -4 durch die Null getheilt wird. Letzteres Verhältniß ist aber:

$$1 - 0 : 0 - (-4) = 1 : 4,$$

folglich wären die beiden Theile des Intervalls von $+1$ bis $+2$:

$$\tfrac{1}{5} \times 1 \text{ und } \tfrac{1}{5} \times 4;$$

d. h. wir können annähernd

$$x = 1 + \tfrac{1}{5} \text{ oder } x = 2 - \tfrac{4}{5}$$

setzen. In der That liegt der Werth 1,2 der richtigen Wurzel (1,146...) so nahe, daß der Fehler $< 0{,}054$ ist.

Suchen wir nach diesem Verfahren noch die beiden anderen Wurzeln. Es war

$$\varphi(-3) = -19 \text{ und } \varphi(-2) = +4;$$

folglich ist $x = -3 + \frac{1}{23} \times 19$ oder $x = -1 - \frac{1}{23} \times 4$.

Der Werth $x = -2 - \frac{4}{23} = -2{,}17$ weicht von der richtigen Wurzel noch nicht um 0,06 ab.

Endlich war noch:

$$\varphi(3) = -1 \text{ und } \varphi(4) = +16;$$

folglich ist $x = 3 + \frac{1}{17} \times 1$ oder $x = 4 - \frac{1}{17} \times 16$.

Der Werth $x = 3\frac{1}{17} = 3{,}0588$ weicht von der wahren Wurzel noch nicht um 0,05 ab.

Allgemein hat man also: Ist

$$\varphi(a) = +\alpha \text{ und } \varphi(b) = -\beta,$$

so folgt, wenn a und b nicht zu weit aus einander liegen:

$$x = a + \frac{b - a}{\alpha + \beta} \times \alpha \text{ oder } x = b - \frac{b - a}{\alpha + \beta} \times \beta;$$

und bezeichnet man diesen Werth von x mit a', so kann man nun

$$x = a' + z$$

setzen und nach der Newton'schen Methode z suchen. Man kann aber auch durch Substitution des für x gefundenen Werthes in $\varphi x = 0$ sich nähere Grenzen für x suchen und das angegebene Verfahren wiederholt anwenden.

Beispiel 2. $x^3 - 2x^2 + x + \frac{9}{4} = 0$.

Auflös. Es ist $\varphi x = x^3 - 2x^2 + x + \frac{9}{4}$,

$$\varphi' x = 3x^2 - 4x + 1.$$

Aus $\varphi' x = 0$ folgt $x = 1$ und $x = \frac{1}{3}$; folglich fällt φx für alle Werthe von x zwischen $\frac{1}{3}$ und 1; für alle übrigen Werthe ist φx im Wachsen begriffen. Nun ist aber $\varphi(\frac{1}{3}) = 2\frac{43}{108}$ und $\varphi(1) = 2\frac{1}{4}$; daher liegt zwischen $\frac{1}{3}$ und 1 keine Wurzel der Gleichung, und diese kann überhaupt nur eine reelle Wurzel haben, welche offenbar negativ sein muß. Sie liegt zwischen 0 und -1, und man findet sie $= -0{,}74170696$.

Beispiel 3. $x^3 - 3x + 5 = 0$. Die Gleichung hat eine reelle Wurzel: $-2{,}27901878$.

Beispiel 4. $x^3 - x^2 + 2x - 4 = 0$. Die Gleichung hat eine reelle Wurzel: $1{,}47796725$.

Beispiel 5. $x^3 + x - 1 = 0$. Die Gleichung hat eine reelle Wurzel: $0{,}68232780$.

Beispiel 6. $x^3 - 7x - 2 = 0$. Die Wurzeln sind: $2{,}77845712$; $-0{,}28916855$ und $-2{,}48928857$.

Beispiel 7. $3x^3 + 5x^2 - 6 = 0$. Die Gleichung hat eine reelle Wurzel: $0{,}88527748$.

Beispiel 8. $x^3 - x^2 + 1 = 0$. Die Gleichung hat eine reelle Wurzel: $-0{,}75487797$.

Beispiel 9. $x^4 - 3x^2 - 4x - 2 = 0$. Die Gleichung hat zwei reelle Wurzeln: -1 und $2{,}26953084$.

Anmerkung 2. Nicht nur die Untersuchung, ob eine Gleichung überhaupt reelle Wurzeln hat, ist zuweilen sehr schwierig, sondern die Ausrechnung der Wurzeln selbst kann dadurch erschwert werden, daß zwei oder mehrere Wurzeln sehr nahe an einander liegen. Man muß in diesem Falle die Grenzen, zwischen denen eine Wurzel liegen muß, durch Probiren so nahe an einander zu rücken suchen, bis man überzeugt ist, daß nur eine Wurzel zwischen diesen Grenzen liegt; dann erst kann man zur Correction mittelst der Formel $z = -\frac{\varphi(a)}{\varphi'(a)}$ schreiten. Erleichtert hingegen wird das Auffinden der Wurzeln bei praktischen Aufgaben dadurch, daß man in der Regel ungefähr weiß,

wo eine Wurzel liegt. Neuere Untersuchungen geben übrigens sichere Methoden über das Auffinden der Wurzeln, nur gestatten die Grenzen dieses Lehrbuches nicht die Mittheilung der durch Fourier, Cauchy, Sturm, Horner, Gräffe, Encke u. A. begründeten und zum Abschluß gebrachten Theorie.

Ein Beispiel mag noch folgen:

$$x^4 - \tfrac{3}{5}x + \tfrac{4}{25} = 0.$$

Hier ist $\varphi x = x^4 - \tfrac{3}{5}x + \tfrac{4}{25}$,

$$\varphi' x = 4x^3 - \tfrac{3}{5} \text{ und } \varphi'' x = 12x^2.$$

Aus φx erkennt man unmittelbar, daß die gegebene Gleichung nicht negative Wurzeln haben kann.

Aus $\varphi' x = 0$ folgt: $x = \sqrt[3]{\tfrac{3}{20}} = 0{,}53132\ldots$, und φx fällt für alle Werthe von x von $-\infty$ bis $+0{,}53132$, und steigt für alle Werthe von $+0{,}53132$ bis $+\infty$. Setzt man aber für x Null und die positiven ganzen Zahlen 1, 2, 3, ..., so wird φx immer positiv; folglich ergeben sich Grenzen für die gesuchten Wurzeln hierdurch nicht. Da nun φx von 0 bis $+0{,}53132$ fällt, von $+0{,}53132$ bis $+1$ steigt, bei 0 und $+1$ aber positiv ist: so können reelle Wurzeln nur zwischen 0 und $+1$ liegen. Für $x = 0{,}53132$ wird φx ein Minimum (weil $\varphi'' x$ für jeden Werth von x positiv ist); wird also der Werth dieses Minimums positiv, so hat $\varphi x = 0$ keine reelle Wurzel; wird der Werth aber negativ, so liegen zwischen 0 und 1 zwei reelle Wurzeln; die beiden andern müssen imaginär sein. Nun ist aber

$$\varphi(0{,}53132) = -0{,}079\ldots;$$

daher haben wir zwischen $x = 0$ und $x = 0{,}53132$ eine Wurzel und die zweite zwischen $x = 0{,}53132$ und $x = 1$ zu suchen.

x	φx
0,1	+0,1001
0,2	+0,0416
0,3	−0,0119
0,4	−0,0544
0,5	−0,0775
0,6	−0,0704
0,7	−0,0199
0,8	+0,0896.

Setzt man aber für x die Werthe 0,1; 0,2; 0,3; u. s. w., so ergeben sich für φx die nebenstehenden Werthe. Man erkennt, daß eine Wurzel zwischen 0,2 und 0,3 liegen muß, und eine zweite zwischen 0,7 und 0,8. Man kann nun nach Anmerk. 1. verfahren; oder man kann auch $x = 0{,}25 + z$ und dann noch $x = 0{,}75 + z$ setzen. Der absolute Werth von z muß dann kleiner als 0,05 sein, und auf dem schon bekannten Wege sind nun durch wiederholte Correction die Wurzeln zu finden. Sie sind

$$0{,}263932\ldots \text{ und } 0{,}736068\ldots$$

§. 234.
Anwendung der Newton'schen Methode zur Auflösung transcendenter Gleichungen.

Auf ähnlichem Wege kann das Aufsuchen der Wurzeln transcendenter Gleichungen geschehen, wenn sie sich nicht auf algebraische reduciren lassen.

Beispiel 1. $x^x - 10 = 0$.

Auflös. Ist $\varphi x = x^x - 10$, so folgt $\varphi(2) = -6$ und $\varphi(3) = +17$; folglich muß x zwischen den Grenzen 2 und 3 liegen, zwischen welchen sich φx stetig mit x ändert. Wir haben sonach den ersten Näherungswerth $x = 2$. Bezeichnen wir allgemein einen Näherungswerth durch a und setzen nun $x = a + z$, so folgt

$$(a+z)^{a+z} = 10, \text{ und hieraus:}$$

$$(a+z)\log(a+z) = 1 \text{ oder}$$

$$(a+z)\log\left[a\left(1+\frac{z}{a}\right)\right] = 1; \text{ also auch:}$$

$$(a+z)\log a + (a+z)\log\left(1+\frac{z}{a}\right) = 1.$$

Es ist aber (§. 211.) $\log A = 0{,}43429448 \ln A$, also:

$$(a+z)\log a + (a+z)\cdot 0{,}43429448\cdot \ln\left(1+\frac{z}{a}\right) = 1.$$

Nach §. 210. I. ist daher:

$$(a+z)\log a + (a+z)\, 0{,}43429448\left[\frac{z}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{a}\right)^3 - + \ldots\right] = 1.$$

Im vorliegenden Falle ist $\frac{z}{a}$ ein echter Bruch und $< \frac{1}{2}$; läßt man also die Glieder in den großen Klammern vom zweiten an fort, so hat man annähernd:

$$(a+z)\log a + (a+z)\, 0{,}43429448\cdot\frac{z}{a} = 1.$$

Anstatt $(a+z)\frac{z}{a}$ oder $z + \frac{z^2}{a}$ kann man wieder annähernd z setzen und erhält $(a+z)\log a + 0{,}43429448\cdot z = 1$, woraus endlich folgt:

$$z = \frac{1 - a\cdot\log a}{0{,}43429448 + \log a}.$$

Nun fanden wir oben als erste Annäherung:

$$1)\quad x = 2.$$

Setzt man also $x = 2 + z$, so folgt:

$$z = \frac{1 - 2 \log 2}{0{,}43429 + \log 2} = \frac{0{,}39794}{0{,}73532} = 0{,}5; \text{ folglich ist:}$$

$$2) \quad x = 2{,}5.$$

Setzt man wieder $x = 2{,}5 + z$, so folgt

$$z = \frac{1 - 2{,}5 \log 2{,}5}{0{,}43429 + \log 2{,}5} = \frac{0{,}00505}{0{,}83223} = 0{,}006; \text{ daher}$$

$$3) \quad x = 2{,}506.$$

Setzt man nochmals $x = 2{,}506 + z$, so folgt

$$z = \frac{1 - 2{,}506 \log 2{,}506}{0{,}43429448 + \log 2{,}506} = \frac{0{,}0001533}{0{,}8332756} = 0{,}00018.$$

Man hat also: $\quad 4) \quad x = 2{,}50618.$

Setzt man noch einmal $x = 2{,}50618 + z$, so folgt:

$$z = \frac{1 - 2{,}50618 \log 2{,}50618}{0{,}43429448 + \log 2{,}50618} = \frac{0{,}0000038}{0{,}83330668} = 0{,}00000456.$$

Wir haben sonach gefunden:

$$4) \quad x = 2{,}50618456;$$

daher ist $2{,}50618456^{2{,}50618456} = 10.$

Beispiel 2. $\quad 4 \cdot \sin x - 3 \cdot x = 0.$

Auflös. Hier ist $\varphi x = 4 \cdot \sin x - 3 \cdot x,$

$$\varphi' x = 4 \cdot \cos x - 3.$$

Den Werth von $\varphi' x$ erhält man, wenn man

$$\varphi(x + k) = 4 \cdot \sin(x + k) - 2(x + k)$$

nach den Potenzen von k ordnet und hierbei die in §. 214. für $\sin(x + k)$ bereits gefundene Reihe benutzt.

Eine Wurzel der Gleichung, nämlich $x = 0$, erkennt man sofort und sieht auch, daß, wenn $+a$ eine Wurzel ist, dann $-a$ ebenfalls eine sein muß; folglich kann man die Untersuchung auf positive Wurzeln beschränken.

Setzt man für x von 0 an steigende Werthe, so wächst φx, weil am Anfange $\varphi' x$ positiv ist. $\varphi' x$ bleibt positiv, bis $4 \cdot \cos x < 3$, d. h. $\cos x < \frac{3}{4}$ wird. Da nun ziemlich genau $\cos 41^\circ 24' = \frac{3}{4}$ ist, so kann zwischen $x = 0$ und $x = \operatorname{arc} 41^\circ 24'$ keine Wurzel der Gleichung liegen. (Denn es ist $\varphi(0) = 0$, und φx wächst mit x bis $x = \operatorname{arc} 41^\circ 24'$.) Wird $x > \operatorname{arc} 41^\circ 24'$, so wird $\varphi' x$ negativ und bleibt negativ bis in den 4ten Quadranten hinein. φx fällt jetzt und kann also Null werden. Nun ist aber der größte Werth, den $4 \sin x$ annehmen kann, gleich 4; wird also $3x > 4$, d. h. $x > \frac{4}{3}$,

so wird φx (d. h. $4 \sin x - 3x$) negativ, und weil $x = \frac{4}{3}$ noch innerhalb des ersten Quadranten liegt, wo φx von $x = \operatorname{arc} 41^\circ 24'$ an fortwährend fällt: so kann $\varphi x = 0$ nur eine positive Wurzel haben, welche zwischen $x = \operatorname{arc} 41^\circ 24'$ und $x = \frac{4}{3}$, oder ziemlich nahe $x = \operatorname{arc} 77^\circ$, liegen muß. (Es ist $\operatorname{arc} 77^\circ = 1{,}34\ldots$)

Wir wollen die Grenzen noch näher an einander rücken. Setzen wir $x = \operatorname{arc} 60^\circ$, so ist $4 \sin 60^\circ - 3 \operatorname{arc} 60^\circ = 3{,}464 - 3{,}141$, folglich positiv; also muß x zwischen $\operatorname{arc} 60^\circ$ und $\operatorname{arc} 77^\circ$ liegen. Nehmen wir noch $x = \operatorname{arc} 70^\circ$, so ist

$$4 \sin 70^\circ - 3 \operatorname{arc} 70^\circ = 3{,}75876 - 3{,}66519,$$

also wieder positiv; folglich liegt x zwischen $\operatorname{arc} 70^\circ$ und $\operatorname{arc} 77^\circ$. Der Unterschied dieser Grenzen ist ziemlich klein, denn es ist $\operatorname{arc} 7^\circ = 0{,}12\ldots$; folglich kann man

$$x = \operatorname{arc} 70^\circ + \varphi$$

setzen, den Werth in $4 \sin x - 3x = 0$ substituiren und die höheren Potenzen von φ außer Acht lassen. Man erhält

$$4 \sin (70^\circ + \varphi) - 3 (\operatorname{arc} 70^\circ + \varphi) = 0.$$ Hieraus folgt:

$$4 \sin 70^\circ \cos \varphi + 4 \cos 70^\circ \cdot \sin \varphi - 3 \operatorname{arc} 70^\circ - 3\varphi = 0$$ oder

$$4 \sin 70^\circ \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - + \ldots\right) + 4 \cos 70^\circ \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \ldots\right)$$
$$- 3 \operatorname{arc} 70^\circ - 3\varphi = 0.$$

Läßt man die höheren Potenzen von φ außer Acht, so erhält man annähernd:

$$4 \sin 70^\circ + 4 \varphi \cos 70^\circ - 3 \operatorname{arc} 70^\circ - 3\varphi = 0,$$

folglich: $$\varphi = \frac{4 \sin 70^\circ - 3 \operatorname{arc} 70^\circ}{3 - 4 \cos 70^\circ}$$

oder $$\varphi = \frac{0{,}0935790}{1{,}6319192} = 0{,}0573429.$$

Nimmt man hierzu den Winkel nur in Graden, so folgt $\varphi = \operatorname{arc} 3^\circ$, also

$$1) \quad x = \operatorname{arc} 73^\circ.$$

Setzt man $x = \operatorname{arc} 73^\circ + \varphi$, so folgt

$$\varphi = \frac{4 \sin 73^\circ - 3 \operatorname{arc} 73^\circ}{3 - 4 \cos 73^\circ} = \frac{0{,}0029481}{1{,}8305132} = 0{,}001610.$$

Hierzu findet man $\varphi = \operatorname{arc} 5'$; folglich ist

$$2) \quad x = \operatorname{arc} 73^\circ 5'.$$

Setzt man weiter $x = \operatorname{arc} 73^\circ 5' + \varphi$, so folgt

$$\varphi = \frac{4 \sin 73^\circ 5' - 3 \operatorname{arc} 73^\circ 5'}{3 - 4 \cos 73^\circ 5'} = \frac{0{,}0002816}{1{,}8360780} = 0{,}00015337.$$

Hierzu ergiebt sich $\varphi = \text{arc}\,31''$, also:

$$3)\quad x = \text{arc}\,73^\circ\,5'\,31''.$$

Bei der Probe ergiebt sich

$$4\sin 73^\circ\,5'\,31'' - 3\,\text{arc}\,73^\circ\,5'\,31'' = 0{,}000005.$$

Da nun $\text{arc}\,73^\circ\,5'\,31'' = 1{,}27569508$ ist, so hat die Gleichung $4\sin x - 3x = 0$ die drei reellen Wurzeln:

$$0,\ +1{,}27569508 \text{ und } -1{,}27569508.$$

Allgemeine Auflösung der kubischen Gleichungen.

§. 235.

Auflösung der reinen kubischen Gleichung.

Die Auflösung der reinen kubischen Gleichung $x^3 = p + qi$ ist in der Entwicklung der n Werthe von $\sqrt[n]{p+qi}$ (§. 220.) enthalten. $\sqrt[3]{p+qi}$ hat drei Werthe, und jeder ergiebt sich nach jener Entwicklung wieder in der Form $P + Qi$.

Soll die Gleichung $x^3 = a$ aufgelöst werden, wenn a reell ist, so kann man $a = a \cdot 1$ setzen, also $x = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{1}$. Versteht man hier unter $\sqrt[3]{a}$ ihren reellen Werth, so erhält man die Wurzeln der Gleichung $x^3 = a$, wenn man $\sqrt[3]{a}$ mit den 3 Werthen multiplicirt, welche $\sqrt[3]{1}$ hat (§. 220. Beispiel 2. und 4.).

Man kann aber auch so verfahren: Die Gleichung $x^3 - a = 0$ hat zunächst die reelle Wurzel $\sqrt[3]{a}$, und dividirt man $x^3 - a$ durch $x - \sqrt[3]{a}$, so folgt, wenn man den Quotienten $x^2 + x\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}$ gleich Null setzt: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a}$.

Es hat also die Gleichung $x^3 = a$ die drei Wurzeln:

$$x = \begin{cases} \sqrt[3]{a} \cdot 1 \\ \sqrt[3]{a} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \\ \sqrt[3]{a} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}. \end{cases}$$

§. 236.

Auflösung der reducirten kubischen Gleichung.

Die vollständige kubische Gleichung

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

wird in eine reducirte verwandelt, wenn man (§. 225.) $x = y - \frac{A}{3}$ setzt. Es handelt sich sonach nur um die Auflösung der reducirten kubischen Gleichung, d. h. der Gleichung von der Form:

$$x^3 + ax + b = 0.$$

Setzt man: 1) $x = y + z$, behält sich eine zweckmäßige Wahl des einen Summanden, etwa z, vor und substituirt diesen Werth von x in die gegebene Gleichung, so folgt:

$$(y + z)^3 + a(y + z) + b = 0$$

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + ay + az + b = 0$$

$$y^3 + y(3yz + a) + z(3yz + a) + z^3 + b = 0$$

2) $y^3 + (y + z)(3yz + a) + z^3 + b = 0.$

Wählt man jetzt z so, daß

3) $3yz + a = 0$

wird, setzt man also $z = -\frac{a}{3y}$, so folgt aus 2):

4) $y^3 + z^3 + b = 0$ oder, wenn man den Werth von z substituirt:

$$y^3 - \frac{a^3}{27y^3} + b = 0.$$

Ordnet man, so entsteht:

$$(y^3)^2 + b(y^3) - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$y^3 = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3},$$ daher aus 4):

$$z^3 = -\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}.$$

Entnimmt man hieraus y und z und setzt diese Werthe in 1) ein, so folgt:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Da die Doppelzeichen $\pm$ und $\mp$ so zu verstehen sind, daß entweder nur die oberen, oder nur die unteren Zeichen gelten, so daß

also beide Mal dieselbe Summe, nur mit verschiedener Folge der Summanden entsteht, so hat man vollständig:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Diese Formel wird die Cardanische genannt. Hieronymus Cardanus (geb. 1501 zu Pavia, gest. 1575 zu Rom) hat sie zuerst bekannt gemacht, und zwar gegen den Willen des Tartaglia aus Brescia (gest. 1557 zu Venedig), der sie gefunden und dem Cardanus im Vertrauen mitgetheilt hatte. — Schon früher, am Anfange des 16. Jahrhunderts, hatte Scipio Ferreo in Bologna die Auflösung der kubischen Gleichung in einem besonderen Falle gefunden, aber nicht veröffentlicht. — Vom Cardanus rührt die Verwandlung einer höheren Gleichung in eine reducirte her.

In der Cardanischen Formel hat jede Kubikwurzel drei Werthe; es fragt sich also, welche dieser Werthe so zusammengehören, daß ihre Summe gleich x ist; denn offenbar kann man nicht je zwei beliebige Werthe nehmen, weil sonst $x^3 + ax + b = 0$ mehr als drei Wurzeln haben müßte.

Wir wollen bei der weiteren Untersuchung die zwei Fälle unterscheiden: wenn $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}$ reell ist, und wenn diese Wurzel imaginär ist.

I. Die Cardanische Formel in dem Falle, wenn ihre Summanden reell sind.

Um die Gleichung $x^3 + ax + b = 0$ aufzulösen, setzten wir $x = y + z$ und fanden:

$$y^3 = -\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3} \text{ und } z^3 = -\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^3}.$$

Bezeichnen wir $-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}$ mit α, und

$$-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3} \text{ mit } \beta,$$

und verstehen wir unter $\sqrt[3]{\alpha}$ und $\sqrt[3]{\beta}$ die reellen Werthe dieser Kubikwurzeln, so folgt aus

$$y^3 = \alpha \quad \text{und} \quad z^3 = \beta$$

mit Hülfe des vorigen §.:

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{\alpha}\cdot 1 \\ \sqrt[3]{\alpha}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \\ \sqrt[3]{\alpha}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \end{array} \right\} \text{ und } z = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{\beta}\cdot 1 \\ \sqrt[3]{\beta}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \\ \sqrt[3]{\beta}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \end{array} \right\}.$$

Welche Werthe von y und z geben nun addirt x? Es wurden y und z aus den Gleichungen 3) und 4) entwickelt; folglich sind nur solche Werthe von y und z zusammengehörige, welche diesen beiden Gleichungen genügen. Nun ist aber, wovon man sich leicht überzeugt, die Gleichung 4) für jeden der drei Werthe von z in Verbindung mit jedem der drei Werthe von y richtig; folglich sind diejenigen Werthe von y und z zusammengehörige, für welche die Gleichung 3) identisch wird, d. h. für welche

$$3yz = -a$$

ist. Nun ist aber

$$3\cdot\sqrt[3]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\beta} = 3\cdot\sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}\right]\left[-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}\right]}$$

$$= 3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3\right]} = -a;$$

folglich sind von den oben angegebenen drei Werthen von y und den drei Werthen von z nur diejenigen zusammengehörige, für welche das Product ihrer Zahlen-Factoren gleich 1 ist. Da aber

$$1\cdot 1 = 1 \text{ und } \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = 1,$$

hingegen das Product zweier anderen Zahlen-Factoren nicht gleich 1 ist, so sind die drei Werthe von x, d. h. die Wurzeln der Gleichung $x^3+ax+b=0$, wenn wir sie mit x_1, x_2 und x_3 bezeichnen:

$$x_1 = \sqrt[3]{\alpha}\cdot 1+\sqrt[3]{\beta}\cdot 1$$

$$x_2 = \sqrt[3]{\alpha}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{\beta}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x_3 = \sqrt[3]{\alpha}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{\beta}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Bringt man noch x_2 und x_3 auf die Form $p + qi$, so hat man:

$$x_1 = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta},$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}) + \frac{1}{2}\sqrt{3}(\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}) \cdot \sqrt{-1},$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}) - \frac{1}{2}\sqrt{3}(\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}) \cdot \sqrt{-1}.$$

Hieraus folgt: Sind die Summanden in der Cardanischen Formel reell, so hat die kubische Gleichung außer der reellen Wurzel, welche die Formel unmittelbar giebt, noch zwei imaginäre, mit der einzigen Ausnahme, wenn die Summanden gleich sind ($\sqrt[3]{\alpha} = \sqrt[3]{\beta}$), d. h. wenn $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} = 0$ ist. In diesem Ausnahmefalle sind die beiden anderen Wurzeln (x_2 und x_3) nicht nur auch reell, sondern auch einander gleich, und man erhält jede, wenn man die zuerst gefundene Wurzel mit $-\frac{1}{2}$ multiplicirt.

Beispiel 1. $\frac{3x - 4}{\sqrt{2 - 3\sqrt{x}}} = \frac{3x\sqrt{2 + 3\sqrt{x}}}{2}$.

Auflös. Ordnet man, so entsteht:

$$x^3 - \frac{32}{27}x + \frac{64}{81} = 0.$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{32}{81} + \sqrt{\left(\frac{32}{81}\right)^2 - \left(\frac{32}{81}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{32}{81} - \sqrt{\left(\frac{32}{81}\right)^2 - \left(\frac{32}{81}\right)^3}},$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{32}{81} + \frac{32}{81}\sqrt{\frac{49}{81}}} + \sqrt[3]{-\frac{32}{81} - \frac{32}{81}\sqrt{\frac{49}{81}}} = -\frac{4}{9} - \frac{8}{9}.$$

Hier ist also $\sqrt[3]{\alpha} = -\frac{4}{9}$ und $\sqrt[3]{\beta} = -\frac{8}{9}$; folglich:

$x_1 = -\frac{4}{3}$ und

$$x_2 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(-\frac{4}{9} + \frac{8}{9}\right)\sqrt{-1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9}\sqrt{-3},$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(-\frac{4}{9} + \frac{8}{9}\right)\sqrt{-1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{9}\sqrt{-3}.$$

Man kann auch, nachdem $x_1 = -\frac{4}{3}$ gefunden ist, die linke

Seite der geordneten Gleichung durch $x + \frac{4}{3}$ dividiren und dann mittelst einer quadratischen Gleichung x_2 und x_3 finden.

Beispiel 2. $\frac{27x}{3x+4} = \frac{3x-4}{x^2-1} - \frac{9x}{3x^2+7x+4}$.

Auflös. Ordnet man, so entsteht:

$$x^3 - \frac{4}{3}x + \frac{16}{27} = 0.$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{8}{27} + \sqrt{\left(\frac{8}{27}\right)^2 - \left(\frac{4}{9}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{8}{27} - \sqrt{\left(\frac{8}{27}\right)^2 - \left(\frac{4}{9}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{8}{27} + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^6 - \left(\frac{2}{3}\right)^6}} + \sqrt[3]{-\frac{8}{27} - \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^6 - \left(\frac{2}{3}\right)^6}}$$

$x = 2\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$; daher:

$x_1 = -\frac{4}{3}$; $x_2 = +\frac{2}{3}$; $x_3 = +\frac{2}{3}$.

Beispiel 3. $x^{-\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{3-5x} = x^{\frac{1}{3}}$.

Auflös. $x_1 = -1$, $x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$.

Beispiel 4. Die Gleichung $x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 12x - 12 = 0$ hat eine rationale Wurzel; man soll alle Wurzeln der Gleichung finden.

Auflös. Nach §. 231. findet man $x_1 = -2$. Durch Division mit $x + 2$ in die gegebene Gleichung kommt man dann zur kubischen Gleichung $x^3 + 9x - 6 = 0$. Aus ihr findet man:

$$x_2 = 0{,}63783;$$
$$x_3 = -0{,}318915 + 3{,}05042 \cdot \sqrt{-1};$$
$$x_4 = -0{,}318915 - 3{,}05042 \cdot \sqrt{-1}.$$

Beispiel 5. Die reellen Wurzeln der Gleichung

$x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 12 = 0$ zu finden.

Auflös. $x_1 = -2$, $x_2 = -2{,}84732$. Die beiden andern Wurzeln sind imaginär.

Beispiel 6. Welches sind die reellen Wurzeln folgender Gleichung:

$x^5 + x^4 + 4x^2 - 38x + 12 = 0$?

Antw. $+2$, -3 und $0{,}32748$.

Beispiel 7. $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3} = 0$.

Auflös. Setzt man $x = y + \frac{1}{2}$, so folgt:

$$y^3 - \frac{3}{4}y + \frac{5}{12} = 0.$$

Hieraus $y = -\frac{1}{6}(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{81})$ und

$x = -0{,}5678$. Die beiden andern Wurzeln sind imaginär.

Beispiel 8. Welches sind die reellen Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{242}{27} = 0?$$

Antw. Die Gleichung hat eine reelle Wurzel: 2,158701.

Beispiel 9. Die reellen Wurzeln folgender Gleichungen zu bestimmen:

1) $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 10x - 8 = 0$

2) $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 22x + 12 = 0$

3) $x^6 + 6x^5 + 14x^4 + 26x^3 + 45x^2 + 40x + 12 = 0$.

Auflös. 1) -4 und $+0{,}5961044$.

2) -3 und $-0{,}6258168$.

3) -1, -2, -3 und $-0{,}5960715$.

Beispiel 10. $x + 1 = \sqrt{\frac{3x+6}{x-2}}$.

Auflös. $x = 2{,}951373$; die beiden anderen Wurzeln sind imaginär.

II. Der irreductible Fall der Cardanischen Formel, wenn die Summanden imaginär sind.

Dieser Fall kann nur eintreten, wenn a negativ ist. Setzen wir also $-a$ statt a, so folgt aus

$$x^3 - ax + b = 0$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Nehmen wir nun an, es sei $\left(\frac{a}{3}\right)^3 > \left(\frac{b}{2}\right)^2$, so folgt:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + i\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - i\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}}.$$

Jede Kubikwurzel läßt sich mittelst der Moivre'schen Formel auf die Form $p + qi$ bringen. Setzen wir (§. 219. Anmerk.)

$$-\frac{b}{2} \pm i\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi),$$

so folgt: 1) $r\cos\varphi = -\frac{b}{2}$

2) $r\sin\varphi = +\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$.

Wenn man beide Gleichungen quadrirt und addirt, so ergiebt sich:

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3};\ \cos\varphi = \frac{-\frac{b}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3}};\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Da die Werthe für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ reell und echte Brüche sind, so kann man φ mittelst der Tafeln bestimmen. Nehmen wir an, es sei (in Graden, Minuten und Secunden)

$$\varphi = \alpha + \mathfrak{a}\cdot 360^\circ,$$

so folgt:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3}\cdot[\cos(\alpha + \mathfrak{a}\cdot 360^\circ) + i\sin(\alpha + \mathfrak{a}\cdot 360^\circ)]}$$

$$+ \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3}\cdot[\cos(\alpha + \mathfrak{a}\cdot 360^\circ) - i\sin(\alpha + \mathfrak{a}\cdot 360^\circ)]}.$$

Zieht man aus $\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3}$ die Kubikwurzel aus, sondert dann $\sqrt{\frac{a}{3}}$ ab und wendet die Moivre'sche Formel an, so entsteht:

$$x = \sqrt{\frac{a}{3}}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \mathfrak{a}\cdot 120^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{3} + \mathfrak{a}\cdot 120^\circ\right)\right.$$

$$\left. + \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \mathfrak{a}\cdot 120^\circ\right) - i\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{3} + \mathfrak{a}\cdot 120^\circ\right)\right].$$

Die imaginären Glieder heben sich fort, und es entsteht:

$$x = 2\sqrt{\frac{a}{3}}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \mathfrak{a}\cdot 120^\circ\right).$$

Setzt man für $\mathfrak{a}$ die Werthe 0, 1 und 2 (oder auch 0, 1 und — 1), so erhält man die drei Wurzeln der Gleichung $x^3 - ax + b = 0$, und alle drei sind reell.

Beispiel 1. $x^3 - 3x - 1 = 0$.

Auflös. $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 1}}$ oder

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}.$$

Aus $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i = r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$ folgt:

$$r \cos \varphi = \frac{1}{2}$$

$$r \sin \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

und hieraus $r = 1$, $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, $\sin \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{3}$.

Es ist hiernach $\varphi = 60^\circ + \alpha \cdot 360^\circ$, folglich

$x = 2 \cdot \cos (20^\circ + \alpha \cdot 120^\circ)$; also:

$x_1 = 2 \cdot \cos 20^\circ = 1{,}8793852.$

$x_2 = 2 \cos 140^\circ = -2 \cos 40^\circ = -1{,}5320888.$

$x_3 = 2 \cos 260^\circ = -2 \cos 80^\circ = -0{,}3472964.$

Beispiel 2. $x^3 - 9x + 4 = 0.$

Auflös. Man erhält $x = \sqrt[3]{-2 + i\sqrt{23}} + \sqrt[3]{-2 - i\sqrt{23}}.$

Ferner wird $r = \sqrt{27}$ und $\varphi = 112^\circ\ 38'\ 15'' + \alpha \cdot 360^\circ$;

daher $x = 2\sqrt{3} \cdot \cos(37^\circ\ 32'\ 45'' + \alpha \cdot 120^\circ).$

Hieraus $x_1 = 2\sqrt{3} \cdot \cos 37^\circ\ 32'\ 45'' = 2{,}74657.$

$x_2 = -2\sqrt{3} \cdot \cos 22^\circ\ 27'\ 15'' = -3{,}20147.$

$x_3 = 2\sqrt{3} \cdot \cos 82^\circ\ 27'\ 15'' = 0{,}45490.$

Beispiel 3. $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = \frac{x+3}{x+4}.$

Auflös. Ordnet man, so entsteht:

$$x^3 + 8x^2 + 18x + 10 = 0.$$

Setzt man $x = y - \frac{8}{3}$, so folgt $y^3 - \frac{10}{3}y - \frac{2}{27} = 0.$

Hieraus: $3y = \sqrt[3]{1 + i\sqrt{999}} + \sqrt[3]{1 - i\sqrt{999}}$;

$r = \sqrt{1000}$, $\varphi = 88^\circ\ 11'\ 17'' + \alpha \cdot 360^\circ.$

$3y_1 = +\sqrt{40} \cdot \cos 29^\circ\ 23'\ 26'' = +5{,}51025.$

$3y_2 = -\sqrt{40} \cdot \cos 30^\circ\ 36'\ 14'' = -5{,}44359.$

$3y_3 = -\sqrt{40} \cdot \cos 89^\circ\ 23'\ 46'' = -0{,}06666.$

Aus $x = \frac{3y - 8}{3}$ folgt nun:

$x_1 = -0{,}82992$; $x_2 = -4{,}48119$; $x_3 = -2{,}68889.$

Beispiel 4. $x^3 - 6x - 2 = 0.$

Auflös. $x_1 = 2\sqrt{2} \cdot \cos 23^\circ\ 5'\ 54'' = 2{,}60168.$

$x_2 = -2\sqrt{2} \cdot \cos 36^\circ\ 54'\ 6'' = -2{,}26180.$

$x_3 = -2\sqrt{2} \cdot \cos 83^\circ\ 5'\ 54'' = -0{,}33988.$

Beispiel 5. $x^3 - 3x^2 - 9x + 13 = 0$.

Auflös. $x_1 = 4{,}377551$; $x_2 = -2{,}544608$; $x_3 = 1{,}167057$.

Beispiel 6. $x^3 - 5x + 1 = 0$.

Auflös. $x_1 = +2\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \cos 34^\circ\, 28'\, 44'' = +2{,}12842$.

$$x_2 = -2\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \cos 25^\circ\, 31'\, 16'' = -2{,}33005.$$

$$x_3 = +2\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \cos 85^\circ\, 31'\, 16'' = +0{,}20163.$$

Fassen wir nochmals zusammen, was über die Auflösung der kubischen Gleichung gefunden wurde, und gehen wir von der Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0$$

(mit reellen Coefficienten) aus, so folgt:

I. Ist $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$ positiv, so giebt die Cardanische Formel

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

unmittelbar eine reelle Wurzel; die beiden andern sind imaginär, und alle drei einander ungleich.

II. Ist $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$ gleich Null, so folgt aus der Cardanischen Formel unmittelbar $x_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{b}{2}}$; die beiden andern Wurzeln sind dann auch reell und einander gleich, und man erhält jede, wenn man x_1 mit $-\frac{1}{2}$ multiplicirt; es ist also $x_2 = x_3 = -\sqrt[3]{-\frac{b}{2}}$.

III. Ist $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$ negativ (der irreductible Fall), so giebt die Cardanische Formel x in imaginärer Form, während alle 3 Wurzeln reell und einander ungleich sind. Die trigonometrische Auflösung giebt diese drei Wurzeln in reeller Form.

In diesem Falle muß a negativ sein, und man löst die Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0$$

dann so auf: Man schlägt zuerst den Winkel α auf, dessen cosinus durch die Gleichung:

$$\cos\alpha = \frac{-\frac{b}{2}}{+\sqrt{-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

gegeben ist. α wird spitz oder stumpf, je nachdem b negativ oder positiv ist.

Ist α bestimmt, so hat man:

$$x = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{3} + a\cdot 120^\circ\right).$$

Für a setzt man nun 0, 1, 2 oder auch 0, 1, —1.

Anmerk. 1. Kennt man eine Wurzel der Gleichung

$$(1) \qquad x^3 + ax + b = 0,$$

so kann man die beiden anderen Wurzeln durch die bekannte auszudrücken wünschen. Man erhält beide, wenn man die Werthe von x sucht, für welche $x^3 + ax + b$ unverändert bleibt (§. 152. Anm. 1.). Aus der Gleichung

$$z^3 + az + b = x^3 + ax + b$$

folgt, wenn man durch $z - x$ hebt:

$$z^2 + xz + x^2 + a = 0; \text{ daher:}$$

$$(2) \qquad z = -\frac{x}{2} \pm \sqrt{-a - \frac{3}{4}x^2}.$$

Weil ferner aus (1) folgt, daß $a = -x^2 - \frac{b}{x}$ ist, so kann man noch diesen Werth von a in (2) substituiren, und man erhält dann:

$$(3) \qquad z = -\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{b}{x}}.$$

Ist also α eine Wurzel der Gleichung $x^3 + ax + b = 0$, so kann man die beiden anderen aus (2) oder (3) entnehmen, d. h. sie sind:

$$(4) \qquad z = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{-a - \frac{3}{4}\alpha^2} \text{ oder}$$

$$(5) \qquad z = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{b}{\alpha}}.$$

Weil endlich aus $\alpha^3 + a\alpha + b = 0$ folgt, daß $\alpha^2 = -a - \frac{b}{\alpha}$ ist, so kann man noch diesen Werth von α^2 in (4) oder (5) substituiren, und man erhält:

$$(6) \qquad z = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-a + \frac{3b}{\alpha}}.$$

Die Gleichung (4) zeigt die Abhängigkeit der beiden andern Wurzeln von α und a, die Gleichung (5) von α und b, die Gleichung (6) von α, a und b.

Ist nun die bekannte Wurzel α reell, und werden auch a und b reell vorausgesetzt, so folgt aus (4), daß die beiden anderen Wurzeln immer imaginär sind, wenn a positiv ist; z. B.

$$x^3 + x + 2 = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist -1, daher die beiden anderen:

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{-1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-7}.$$

Ist aber a negativ, etwa $a = -a'$, so sind die beiden anderen Wurzeln nur dann imaginär, wenn $\frac{3}{4} a^2 > a'$ ist; z. B.

$$x^3 - 2x + 4 = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist -2; daher die beiden anderen:

$$1 \pm \sqrt{2-3} = 1 \pm \sqrt{-1}.$$

Ist $\frac{3}{4}\alpha^2 = a'$, so sind die beiden anderen Wurzeln nicht nur reell, sondern auch einander gleich, und zwar ist jede $= -\frac{\alpha}{2}$; z. B.

$$x^3 - 12x - 16 = 0.$$

Eine Wurzel ist $+4$, also $\frac{3}{4}\alpha^2 = 12$; daher jede der beiden anderen Wurzeln $= -2$.

Ist $\frac{3}{4}\alpha^2 < a'$, so sind auch die beiden anderen Wurzeln reell; z. B.

$$x^3 - 30x - 36 = 0.$$

Eine Wurzel ist $+6$; daher $\frac{3}{4}\alpha^2 = 27$, also kleiner als 30; folglich die beiden anderen Wurzeln $= -3 \pm \sqrt{30-27} = -3 \pm \sqrt{3}$.

Aehnliche Folgerungen lassen sich aus (5) und (6) ziehen.

Anmerk. 2. Die Gleichung $x^3 + ax^2 + b = 0$ läßt sich auch dadurch in eine reducirte verwandeln, daß man sie durch $b \cdot x^3$ dividirt und nun in der entstandenen Gleichung

$$\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{b} = 0$$

die Reciproke von x, nämlich $\frac{1}{x}$, als die Unbekannte ansieht.

Allgemeine Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

§. 237.

Die vollständige biquadratische Gleichung hat die Form:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Die Auflösung derselben kann durch wiederholte Ergänzung zu einem vollständigen Quadrat geschehen; doch ist im Allgemeinen hierzu die Auflösung einer kubischen Gleichung erforderlich. Aus der gegebenen Gleichung folgt, wenn man die drei letzten Glieder auf die rechte Seite bringt und dann die linke Seite zu einem vollständigen Quadrat ergänzt:

$$x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$$

$$\left(\frac{a}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}a^2x^2$$

$$1)\quad \left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d.$$

Ergänzt man jetzt die linke Seite zu dem vollständigen Quadrat einer dreigliedrigen Summe und bezeichnet vorläufig den dritten Summanden mit z, indem man sich eine zweckmäßige Wahl von z vorbehält, so entsteht, wenn man zu beiden Seiten $2\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)z + z^2$ addirt:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + z\right)^2 = 2\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)z + z^2 + \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d.$$

Ordnet man rechts nach den Potenzen von x, so erhält man:

$$2)\quad \left(x^2 + \frac{a}{2}x + z\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + 2z\right)x^2 + (az - c)x + (z^2 - d).$$

Jetzt kommt es darauf an, z so zu bestimmen, daß auch die rechte Seite ein vollständiges Quadrat wird, um aus beiden Seiten die Quadratwurzel ausziehen zu können. Aber ein dreigliedriger Ausdruck A + B + C ist ein Quadrat, wenn der eine Summand, etwa $B = 2\sqrt{A}\cdot\sqrt{C}$ ist; denn alsdann ist

$$A + 2\sqrt{A}\cdot\sqrt{C} + C = (\sqrt{A} + \sqrt{C})^2.$$

Es wird sonach die rechte Seite der Gleichung 2) ein Quadrat, wenn

$$(az - c)x = 2\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b + 2z\right)x^2}\cdot\sqrt{z^2 - d}$$

ist. Da sich x forthebt, so muß z der Bedingung entsprechen:

$$az - c = 2\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b + 2z\right)(z^2 - d)},$$

und diese Gleichung ist sonach die Bestimmungsgleichung für z. Ordnet man die Gleichung, so erhält man:

$$3)\quad z^3 - \tfrac{1}{2}bz^2 + \frac{ac - 4d}{4}z - \frac{a^2d - 4bd + c^2}{8} = 0.$$

Aus dieser Gleichung ist z zu finden, und wenigstens ein Werth von z ist reell. Substituirt man nun einen gefundenen Werth von z,

er mag $= p$ sein, in die Gleichung 2), so wird auch die rechte Seite ein vollständiges Quadrat, und man kann nun aus beiden Seiten die Quadratwurzel ausziehen. So entsteht eine Gleichung von folgender Form:

$$x^2 + \frac{a}{2}x + p = \pm (Ax + B).$$

Löst man die beiden quadratischen Gleichungen

$$\text{I.} \quad x^2 + \frac{a}{2}x + p = + (Ax + B)$$

$$\text{II.} \quad x^2 + \frac{a}{2}x + p = - (Ax + B)$$

auf, so erhält man alle vier Wurzeln der gegebenen biquadratischen Gleichung.

Die Gleichung 3) giebt drei Werthe für z, und mit jedem kann die weitere Auflösung geschehen. Für x erhält man natürlich immer dieselben vier Werthe, aber in anderer Verbindung. Die Wurzeln ergeben sich immer paarweise, und auf drei Arten nur kann man vier Zahlen in Paare zusammenstellen. Das folgende Beispiel soll mittelst aller drei Werthe von z durchgeführt werden.

Beispiel 1. $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 10 = 0.$

Auflös. $x^4 + 2x^3 = x^2 + 2x - 10.$

Addirt man zu beiden Seiten x^2, so folgt:

$$(1.) \quad (x^2 + x)^2 = 2x^2 + 2x - 10.$$

Addirt man zu beiden Seiten $2(x^2 + x)z + z^2$, so entsteht:

$$(x^2 + x + z)^2 = 2x^2 + 2x - 10 + 2(x^2 + x)z + z^2.$$

Ordnet man rechts:

$$(2.) \quad (x^2 + x + z)^2 = (2 + 2z)x^2 + (2 + 2z)x + z^2 - 10.$$

Damit nun die rechte Seite auch ein vollständiges Quadrat wird, ist z so zu wählen, daß

$$2 + 2z = 2\sqrt{(2 + 2z)(z^2 - 10)}$$

ist, oder

$$(2 + 2z)^2 = 4(2 + 2z)(z^2 - 10) \quad \text{oder}$$

$$(1 + z)^2 = 2(1 + z)(z^2 - 10) \quad \text{oder}$$

$$(1 + z)(z^2 - \tfrac{1}{2}z - \tfrac{21}{2}) = 0.$$

Hieraus folgt $z_1 = -1$, $z_2 = +\frac{7}{2}$, $z_3 = -3$.

Jeden dieser drei Werthe kann man nun in (2.) substituiren und erhält:

I. wenn $z = -1$ genommen wird:

$$(x^2 + x - 1)^2 = -9;\ \text{folglich}$$
$$x^2 + x - 1 = \pm 3i.\ \text{Hieraus folgt:}$$

1) $x^2 + x - 1 = +3i$	2) $x^2 + x - 1 = -3i$
$x^2 + x - 1 - 3i = 0$	$x^2 + x - 1 + 3i = 0$
$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} + 3i}$	$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - 3i}$

Mittelst der Formel §. 156., IV. entsteht:

$x_1 = 1 + \sqrt{-1}$	$x_3 = 1 - \sqrt{-1}$
$x_2 = -2 - \sqrt{-1}.$	$x_4 = -2 + \sqrt{-1}.$

II. Nimmt man $z = \frac{7}{2}$, so entsteht:

$$(x^2 + x + \tfrac{7}{2})^2 = 9x^2 + 9x + \tfrac{9}{4};\ \text{folglich:}$$
$$x^2 + x + \tfrac{7}{2} = \pm(3x + \tfrac{3}{2}),\ \text{und hieraus:}$$

1) $x^2 - 2x + 2 = 0$	2) $x^2 + 4x + 5 = 0$
$x = 1 \pm \sqrt{1-2}$	$x = -2 \pm \sqrt{4-5}$
$x_1 = 1 + \sqrt{-1}$	$x_3 = -2 + \sqrt{-1}$
$x_2 = 1 - \sqrt{-1}.$	$x_4 = -2 - \sqrt{-1}.$

III. Wird $z = -3$ genommen, so folgt:

$$(x^2 + x - 3)^2 = -4x^2 - 4x^2 - 1;\ \text{daher}$$
$$x^2 + x - 3 = \pm(2x + 1)\sqrt{-1},\ \text{und hieraus:}$$

1) $x^2 + (1 - 2i)x - 3 - i = 0$	2) $x^2 + (1 + 2i)x - 3 + i = 0$
$x = -\frac{1-2i}{2} \pm \sqrt{\frac{-3-4i}{4} + 3 + i}$	$x = -\frac{1+2i}{2} \pm \sqrt{\frac{-3+4i}{4} + 3 - i}$
$x = -\frac{1-2i}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$	$x = -\frac{1+2i}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$
$x = \frac{-1 + 2i \pm 3}{2}$	$x = \frac{-1 - 2i \pm 3}{2}$
$x_1 = 1 + \sqrt{-1}$	$x_3 = 1 - \sqrt{-1}$
$x_2 = -2 + \sqrt{-1}.$	$x_4 = -2 - \sqrt{-1}.$

Jede der drei Auflösungen giebt dieselben vier Wurzeln: $1 + i$; $1 - i$; $-2 + i$ und $-2 - i$; aber die Auflösung mittelst des Werthes $z = \frac{7}{2}$ ist die bequemste, weil sie zu quadratischen Gleichungen mit reellen Coefficienten führt.

Beispiel 2. $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 = 0.$

Auflös. $(x^2 - 2x)^2 = 2x^2 - 4x + 3$

$$(x^2 - 2x + z)^2 = 2x^2 - 4x + 3 + 2(x^2 - 2x)z + z^2$$
$$(x^2 - 2x + z)^2 = (2 + 2z)x^2 - (4 + 4z)x + z^2 + 3.$$

Setzt man $4+4z = 2\sqrt{(2+2z)\cdot(z^2+3)}$, so entsteht eine kubische Gleichung, deren Wurzeln 1; 1 und -1 sind. Man erhält:

$$x_1 = 3;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1;\ x_4 = -1.$$

Beispiel 3. $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$.

Auflös. Die Auflösung führt auf die kubische Gleichung

$$z^3 - 2z^2 - 2z + 4 = 0,$$

deren Wurzeln 2, $+\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ sind. Jede giebt:

$$x_1 = 1 + \sqrt{-2};\ x_2 = 1 - \sqrt{-2};\ x_3 = +i;\ x_4 = -i.$$

Beispiel 4. $x^2 + \frac{2a^2x^2}{(2x+a)^2} = a^2 + \frac{a^4}{(a+2x)^2}$.

Auflös. Aus dieser Gleichung folgt:

$$4x^4 + 4ax^3 - a^2x^2 - 4a^3x - 2a^4 = 0 \text{ oder}$$
$$4x^4 + 4ax^3 = a^2x^2 + 4a^3x + 2a^4.$$

Addirt man zu beiden Seiten a^2x^2, so folgt:

$$(2x^2 + ax)^2 = 2a^2x^2 + 4a^3x + 2a^4, \text{ und hieraus:}$$
$$2x^2 + ax = \pm[ax + a^2]\sqrt{2}.$$

Man erhält die Wurzeln:

$$\frac{a}{4}[-1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{3 + 6\sqrt{2}}] \text{ und } \frac{a}{4}[-1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{3 - 6\sqrt{2}}].$$

Beispiel 5. $x^4 + 2x^3 + 2x - 1 = 0$. Die Wurzeln sind:

$$+\sqrt{-1};\ -\sqrt{-1};\ -1 + \sqrt{2} \text{ und } -1 - \sqrt{2}.$$

Beispiel 6. $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = 0$. Die Wurzeln sind:

$$+3;\ +1;\ +i \text{ und } -i.$$

Beispiel 7. $x^4 + 2x^3 - 4x - 4 = 0$. Die Wurzeln sind:

$$+\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ -1 + \sqrt{-1};\ -1 - \sqrt{-1}.$$

Beispiel 8. $x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 6x + 9 = 0$. Die Wurzeln sind:

$$2 + \sqrt{7};\ 2 - \sqrt{7};\ -3 \text{ und } +1.$$

Beispiel 9. $x^4 - \frac{1}{2}a^3x + \frac{3}{16}a^4 = 0$.

Auflös. Dividirt man durch a^4 und setzt $\frac{x}{a} = y$, so folgt:

$$y^4 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{16} = 0.$$

Die weitere Auflösung führt zu der kubischen Gleichung:

$$z^3 - \frac{3}{16}z - \frac{1}{32} = 0.$$

Mittelst der Cardanischen Formel ergeben sich die Wurzeln:

$$z_1 = \frac{1}{2},\ z_2 = z_3 = -\frac{1}{4}.$$

Schließlich erhält man:

$$x_1 = \frac{a}{2},\ x_2 = \frac{a}{2},\ x_3 = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{-2}),\ x_4 = \frac{a}{2}(-1 - \sqrt{-2}).$$

Beispiel 10. $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3 = 0$. Die Wurzeln sind: $+1,6180340$; $-0,6180340$; $1,5 + 0,8660254 \cdot \sqrt{-1}$ und $1,5 - 0,8660254 \cdot \sqrt{-1}$.

Beispiel 11. $x^5 - 4x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 20x - 8 = 0$.

Auflös. Die eine rationale Wurzel erhält man auf bekanntem Wege, die anderen Wurzeln dann durch eine biquadratische Gleichung. Man findet:

$$x_1 = -2;\ x_2 = +5,37228;\ x_3 = -0,37228;$$
$$x_4 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-7});\ x_5 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-7}).$$

Anmerkung. Man kann auch die Gleichung des vierten Grades, ehe man das eben angegebene Verfahren anwendet, in eine reducirte verwandeln. Auf diese Weise ist die biquadratische Gleichung zuerst aufgelöst worden. L. Ferrari hat diese Methode gefunden, Bombelli sie bekannt gemacht. Andere Methoden haben Descartes und Euler gelehrt. — Einen besonderen Vortheil gewährt die Verwandlung der vollständigen biquadratischen Gleichung in eine reducirte nur in einzelnen Fällen; z. B.

$$x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 20x - 15 = 0.$$

Setzt man $x = y - 1$, so entsteht die reducirte Gleichung:

$$y^4 - 4y^2 + 24y - 36 = 0$$
oder $y^4 = 4(y^2 - 6y + 9)$.

Hieraus $y^2 = \pm 2(y - 3)$.

Man hat jetzt zur Bestimmung von y zwei quadratische Gleichungen und findet schließlich:

$$x_1 = +\sqrt{-5};\ x_2 = -\sqrt{-5};\ x_3 = +0,6457513;\ x_4 = -4,6457513.$$

§. 238.

Gleichungen, welche den vierten Grad übersteigen.

Eine elementare allgemeine Auflösung der Gleichungen vom fünften und von noch höherem Grade giebt es nicht; nur wenn eine solche Gleichung eine numerische ist, kann ihre Auflösung nach einer Näherungs-Methode erfolgen. Für einzelne, besonders geformte Gleichungen kann aber die allgemeine Auflösung noch über den vierten Grad hinaus geschehen. So bei der reinen Gleichung $x^n = a$, deren Auflösung mit der Auflösung der schon behandelten Aufgabe: „alle Werthe von $\sqrt[n]{a}$ zu bestimmen" (§. 220.) zusammenfällt.

Ferner kann die Gleichung

$$x^{nm} + ax^{n(m-1)} + bx^{n(m-2)} + \dots + px^{2n} + qx^n + r = 0,$$

in welcher jeder Exponent von x den Theiler n hat, auf eine Gleichung vom mten Grade reducirt werden, wenn man $x^n = y$ setzt. Ist dann m nicht über 4, so kann die Auflösung vollständig erfolgen.

z. B. $x^{16} - 4x^{12} + 2x^8 + 4x^4 - 3 = 0$.

Setzt man $x^4 = y$, so folgt: $y^4 - 4y^3 + 2y^2 + 4y - 3 = 0$.

Die Wurzeln dieser Gleichung sind: $+3$, $+1$, $+1$ und -1 (§. 237. Beispiel 2.), und weil $x = \sqrt[4]{y}$ ist, so hat die gegebene Gleichung folgende 16 Wurzeln:

$+\sqrt[4]{3},\ -\sqrt[4]{3},\ +i\sqrt[4]{3},\ -i\sqrt[4]{3},\ +1,\ -1,\ +i,\ -i,\ +1,\ -1,\ +i,\ -i$

und dann noch die 4 Werthe, welche $\sqrt[4]{-1}$ hat. Diese sind nach §. 220. Beispiel 3. in der Form

$$\cos\frac{2a+1}{4}\pi + i\sin\frac{2a+1}{4}\pi \text{ oder}$$

$$\cos(45^\circ + a\cdot 90^\circ) + i\sin(45^\circ + a\cdot 90^\circ) \text{ enthalten.}$$

Setzt man 0, 1, 2, 3 statt a, so ergeben sie sich, wie folgt:

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}};\quad -\sqrt{\tfrac{1}{2}} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}};\quad -\sqrt{\tfrac{1}{2}} - i\sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ und } \sqrt{\tfrac{1}{2}} - i\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Endlich lassen sich noch besonders geformte Gleichungen, welche man reciproke nennt, allgemein bis zum 8ten Grade, in manchen Fällen bis zum 10ten Grade auflösen.

Die reciproken Gleichungen.

§. 239.

Erklärung. Lehrsatz.

Eine (geordnete) Gleichung heißt eine reciproke, wenn die Coefficienten ihrer Glieder von links nach rechts denen von rechts nach links ganz gleich oder gerade entgegengesetzt sind. Die allgemeine Form derselben ist:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \ldots \pm cx^3 \pm bx^2 \pm ax \pm 1 = 0,$$

so daß entweder nur die oberen, oder nur die unteren Vorzeichen in den letzten Gliedern gelten. Der Namen dieser Gleichungen ergiebt sich aus folgender Eigenschaft derselben:

Wenn α eine Wurzel einer reciproken Gleichung ist, so ist der reciproke Werth $\frac{1}{\alpha}$ ebenfalls eine Wurzel.

Beweis. Ist α eine Wurzel, so findet die identische Gleichung Statt:

$$\alpha^n + a\alpha^{n-1} + b\alpha^{n-2} + c\alpha^{n-3} + \ldots \pm c\alpha^3 \pm b\alpha^2 \pm a\alpha \pm 1 = 0.$$

Dividirt man durch α^n, so entsteht:

$$1 + a\left(\frac{1}{\alpha}\right) + b\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + c\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + \ldots$$

$$\ldots \pm c\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-3} \pm b\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-2} \pm a\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} \pm \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = 0.$$

Schreibt man die Glieder in umgekehrter Ordnung und multiplicirt, wenn die unteren Zeichen gelten, noch mit -1, so entsteht:

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n + a\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + b\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-2} + c\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-3} + \ldots\ldots$$

$$\ldots \pm c\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \pm b\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \pm a\left(\frac{1}{\alpha}\right) \pm 1 = 0;$$

daher hat die ursprüngliche Gleichung auch die Wurzel $\frac{1}{\alpha}$.

Umgekehrt läßt sich aus dieser Eigenschaft der reciproken Gleichung die Nothwendigkeit ihrer besonderen Form erkennen. Die linke Seite der Gleichung entsteht durch die Multiplication der Doppel-Factoren von der Form $(x + \alpha)\left(x + \frac{1}{\alpha}\right)$; die Gleichung selbst kann daher in folgender Form dargestellt werden:

$$(x + \alpha)\left(x + \frac{1}{\alpha}\right)(x + \beta)\left(x + \frac{1}{\beta}\right)(x + \gamma)\left(x + \frac{1}{\gamma}\right)\ldots = 0.$$

Ihre Wurzeln sind dann $-\alpha$, $-\frac{1}{\alpha}$, $-\beta$, $-\frac{1}{\beta}$, u. s. w.

Multiplicirt man durch und erinnert sich hierbei des Gesetzes, nach welchem die Coefficienten zu bilden sind (§. 224.), so erkennt man leicht, daß der Coefficient des ersten Gliedes gleich dem des letzten, der des zweiten gleich dem des vorletzten, der des dritten gleich dem des drittletzten, u. s. w. sein muß $\left(\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1\right)$.

Eine so entstandene Gleichung ist immer von geradem Grade, und die Coefficienten von rechts nach links sind denen von links nach rechts gleich. Hat man aber eine solche Gleichung, z. B.

$$x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

und multiplicirt sie noch mit $x + 1$, so entsteht eine reciproke Gleichung von derselben Form, aber von ungeradem Grade:

$$x^7 + (a+1)x^6 + (b+a)x^5 + (c+b)x^4 + (b+c)x^3 + (a+b)x^2 + (1+a)x + 1 = 0.$$

Multiplicirt man sie aber mit $x - 1$, so entsteht eine reciproke Gleichung von ungeradem Grade, in welcher die Coefficienten von rechts nach links denen von links nach rechts gerade entgegengesetzt sind:

$$x^7 + (a-1)x^6 + (b-a)x^5 + (c-b)x^4 + (b-c)x^3 + (a-b)x^2 + (1-a)x - 1 = 0.$$

Multiplicirt man endlich noch die erste Gleichung mit $x^2 - 1$, so entsteht eine reciproke Gleichung von geradem Grade, in welcher

die Coefficienten von rechts nach links denen von links nach rechts entgegengesetzt sind:

$$x^8+ax^7+(b-1)x^6+(c-a)x^5+(b-b)x^4+(a-c)x^3+(1-b)x^2-ax-1=0.$$

Diese Gleichungen, obwohl sie einfache neben Doppel-Factoren enthalten, sind doch reciproke, weil ± 1 die Reciproke von ± 1 ist.

Hieraus folgt weiter:

1) Die reciproke Gleichung von ungeradem Grade, bei welcher die Coefficienten von links nach rechts den Coefficienten von rechts nach links gleich sind, also

$$x^{2n+1}+ax^{2n}+bx^{2n-1}+cx^{2n-2}+\ldots+cx^3+bx^2+ax+1=0$$

hat die Wurzel -1. (Man substituire -1 statt x.)

2) Die reciproke Gleichung von ungeradem Grade, deren Coefficienten von links nach rechts den Coefficienten von rechts nach links entgegengesetzt sind, also

$$x^{2n+1}+ax^{2n}+bx^{2n-1}+cx^{2n-3}+\ldots-cx^3-bx^2-ax-1=0$$

hat die Wurzel $+1$.

3) Die reciproke Gleichung von geradem Grade, deren Coefficienten von links nach rechts den Coefficienten von rechts nach links entgegengesetzt sind, also

$$x^{2n}+ax^{2n-1}+bx^{2n-2}+cx^{2n-3}+\ldots+0\cdot x^n--\ldots$$
$$\ldots-cx^3-bx^2-ax-1=0$$

hat die beiden Wurzeln $+1$ und -1.

Dividirt man daher die Gleichung erster Art durch $x+1$, die Gleichung zweiter Art durch $x-1$, die Gleichung dritter Art durch x^2-1: so erhält man stets eine reciproke Gleichung von geradem Grade, in welcher die Coefficienten von rechts nach links denen von links nach rechts gleich sind, und auf die Auflösung einer solchen Gleichung ist sonach die Auflösung jeder reciproken Gleichung zu reduciren.

§. 240.

Auflösung der reciproken Gleichung:

$$x^{2n}+ax^{2n-1}+bx^{2n-2}+\ldots+px^{n+2}+qx^{n+1}+rx^n+qx^{n-1}$$
$$+px^{n-2}+\ldots+bx^2+ax+1=0.$$

Dividirt man diese Gleichung durch x^n, so folgt:

$$x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\ldots+px^2+qx+r+q\cdot\frac{1}{x}+p\cdot\frac{1}{x^2}+\ldots$$
$$\ldots+b\cdot\frac{1}{x^{n-2}}+a\cdot\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}=0.$$

Faßt man das erste und letzte Glied, das zweite und vorletzte, das dritte und drittletzte, u. s. w. zusammen, so entsteht:

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + a\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + b\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + p\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + q\left(x + \frac{1}{x}\right) + r = 0.$$

Setzt man jetzt $x + \frac{1}{x} = y$, so geht die vorstehende Gleichung in eine Gleichung mit der Unbekannten y über und wird nur vom nten Grade. Der Grund liegt darin, daß alsdann $x^2 + \frac{1}{x^2}$ eine ganze Function von y und vom 2ten Grade, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ vom 3ten Grade, $x^4 + \frac{1}{x^4}$ vom 4ten Grade, u. s. w., $x^n + \frac{1}{x^n}$ vom nten Grade wird. Es folgen nämlich aus

1) $x + \frac{1}{x} = y$ noch die Gleichungen:

2) $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ [wenn man 1) quadrirt]

3) $x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$ [wenn man 1) kubirt]

4) $x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2$ [wenn man 2) quadrirt] u. s. w.

Allgemein ist $x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right)$.

Jede reciproke Gleichung von der vorausgesetzten Form kann also auf eine Gleichung von halb so hohem Grade reducirt werden, und hat man aus der neuen Gleichung y gefunden, etwa $y = \alpha$, so folgt:

$$x + \frac{1}{x} = \alpha \text{ oder } x^2 - \alpha x + 1 = 0.$$

Hieraus ergiebt sich aber

$$x_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2};\ x_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}.$$

Das Product dieser Werthe ist $= 1$, daher jeder die Reciproke des anderen.

Beispiel 1. $x^6 - x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0.$

Auflös. Dividirt man durch x^3, so folgt:

$$x^3 - x^2 + 2x - 1 + 2\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0 \text{ oder:}$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Setzt man $x + \frac{1}{x} = y$, so wird

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y,$$

und es entsteht die kubische Gleichung:

$$y^3 - y^2 - y + 1 = 0,$$

deren Wurzeln -1, $+1$ und $+1$ sind.

Setzt man jede gleich $x + \frac{1}{x}$, so erhält man

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}; \quad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3};$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}; \quad x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3};$$

$$x_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}; \quad x_6 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Beispiel 2. $x^6 - \frac{5}{6}x^5 - \frac{22}{3}x^4 + \frac{22}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - 1 = 0.$

Auflös. Man findet unmittelbar $x_1 = +1$ und $x_2 = -1$. Dividirt man dann durch $x^2 - 1$, so folgt:

$$x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{19}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 1 = 0.$$

Hieraus: $x_3 = 3$; $x_4 = \frac{1}{3}$; $x_5 = -2$; $x_6 = -\frac{1}{2}$.

Beispiel 3. $x^5 - \frac{21}{4}x^4 + \frac{775}{72}x^3 - \frac{775}{72}x^2 + \frac{21}{4}x - 1 = 0.$

Auflös. Es ist $x_1 = 1$, und dividirt man durch $x - 1$, so folgt:

$$x^4 - \frac{17}{4}x^3 + \frac{469}{72}x^2 - \frac{17}{4}x + 1 = 0. \text{ Hieraus:}$$

$$x_2 = \frac{3}{2};\ x_3 = \frac{2}{3};\ x_4 = \frac{4}{3};\ x_5 = \frac{3}{4}.$$

Beispiel 4. $x^8 - \frac{9}{2}x^7 + 4x^6 + 3x^5 - 3x^3 - 4x^2 + \frac{9}{2}x - 1 = 0.$

Auflös. $x_1 = +1$; $x_2 = -1$; $x_3 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$; $x_4 = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$;

$x_5 = +2$; $x_6 = +\frac{1}{2}$; $x_7 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $x_8 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Beispiel 5. $x^5 + 1 = 0$.

Auflös. Es ist $x_1 = -1$; dividirt man durch $x + 1$, so entsteht:

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0. \text{ Hieraus:}$$

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot i; \quad x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot i;$$

$$x_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot i; \quad x_5 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot i.$$

Höhere Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§. 241.

Eine Aufgabe mit n Unbekannten ist eine bestimmte, d. h. sie hat immer eine Auflösung und immer nur eine, wenn sie zwischen diesen Unbekannten n Gleichungen liefert, welche von einander unabhängig, einander nicht widersprechend und vom ersten Grade sind. Sind diese Gleichungen aber nicht einfache, wenigstens nicht alle, so gestattet die Aufgabe im Allgemeinen mehr als eine Auflösung, weil die Entwicklung zu einer höheren Gleichung führt. Daß letzteres nicht immer der Fall zu sein braucht, ist schon in §. 159. angeführt worden; hinzugefügt sei hier, daß eine Aufgabe, auch wenn ihre Auflösung zu einer höheren Gleichung führt, doch schon deshalb nur eine Auflösung haben kann, weil alle Wurzeln einer höheren Gleichung einander gleich sein können.

Der Gang der Auflösung stimmt darin mit dem bei einfachen Gleichungen überein, daß man auf eine Gleichung mit einer Unbekannten zu kommen suchen muß. Um aber eine Unbekannte, etwa x, zu eliminiren, sucht man aus den gegebenen Gleichungen eine neue Gleichung zu bilden, welche x nur in der ersten Potenz enthält. Aus dieser entwickelt man x und substituirt den Werth in die übrigen Gleichungen.

Beispiel 1. 1) $x^2 - xy - y^2 + y = 4$.

2) $2x^2 - x + 2y^2 + 3y = 5$.

Auflös. Um x^2 zu entfernen, multiplicirt man die erste Gleichung mit 2 und subtrahirt dann die zweite von ihr. So entsteht:

$$x - 2xy - 4y^2 - y = 3.$$

Hieraus folgt $x = \frac{3 + y + 4y^2}{1 - 2y}$, und setzt man diesen Werth in 1) ein und ordnet die neue Gleichung, so entsteht:

$$y^4 + \frac{7}{10}y^3 + \frac{9}{20}y^2 + y + \frac{1}{4} = 0.$$

Eine Wurzel erkennt man leicht: $y_1 = -1$. Dividirt man jetzt durch $y+1$, so entsteht:

$$y^3 - \frac{3}{10}y^2 + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4} = 0.$$

Um diese Gleichung zu reduciren, setzt man $y = z + \frac{1}{10}$; dann folgt $z^3 + 0{,}72 \cdot z + 0{,}323 = 0$ und hieraus nach der Cardanischen Formel $z = -0{,}375233$, folglich $y_2 = -0{,}275233$. Die beiden andern Wurzeln sind imaginär. Die gegebene Aufgabe hat sonach zwei Auflösungen durch reelle Zahlen:

$y = -1$ und $x = +2$;

oder $y = -0{,}275233$ und $x = 1{,}952819$.

Beispiel 2. 1) $x^2 + xy + y^2 = 1$. 1) $x^2 + 2y^2 = 3$.

Auflös. x hat die Werthe $-1, +1, -\sqrt{\frac{1}{3}}, +\sqrt{\frac{1}{3}}$,
und y hat die resp. Werthe $+1, -1, +2\sqrt{\frac{1}{3}}, -2\sqrt{\frac{1}{3}}$.

§. 242.

Sind die beiden Gleichungen, aus welchen man x eliminiren will, in Beziehung auf x nicht von demselben Grade, so multiplicire man jede Gleichung mit einem solchen Ausdruck, daß die Glieder beider Gleichungen, welche x in der höchsten Potenz enthalten, nicht nur dieselbe Potenz von x erhalten, sondern vollständig gleich werden, wobei aber das Vorzeichen nicht berücksichtigt zu werden braucht. Ist z. B. das Glied, welches die höchste Potenz von x enthält, in der einen Gleichung $6x^4y^2$, und in der anderen $4x^2y^3$, so multiplicire man die erste Gleichung mit $2y$, die zweite mit $3x^2$. Beide Glieder werden jetzt $12x^4y^3$, und durch Addition oder Subtraction beider Gleichungen fällt dies Glied fort. Die neue Gleichung kann dann in Bezug auf x nur noch vom dritten Grade sein. Ihre Verbindung mit der zweiten Gleichung giebt dann eben so eine neue quadratische Gleichung in Bezug auf x, und man kann so fortfahren, bis man zu einer Gleichung gelangt, welche x nur in der ersten Potenz enthält. Aus dieser Gleichung ist x zu entwickeln und der für x erhaltene Ausdruck in eine der vorigen Gleichungen zu substituiren. Die neue Gleichung enthält dann die Unbekannte x nicht mehr.

Beispiel. 1) $2x^3y - xy^3 - 6xy = 2$

2) $x^2y^2 - 2y^4 - y^2 = 1$.

Auflös. Multiplicirt man 1) mit y und 2) mit $2x$, so entsteht:

$$2x^3y^2 - xy^4 - 6xy^2 = 2y$$
$$2x^3y^2 - 4xy^4 - 2xy^2 = 2x.$$

Durch Subtraction erhält man:

$$3xy^4 - 4xy^2 = 2y - 2x, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{2y}{3y^4 - 4y^2 + 2}.$$

Substituirt man diesen Werth in 2), und setzt man noch $y^2 = z$, so folgt:

$$18z^6 - 39z^5 + 41z^4 - 28z^3 + 20z^2 - 16z + 4 = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $z = 1$, woraus $y = \pm 1$ und $x = \pm 2$ folgt.

Dividirt man die letzte Gleichung durch $z - 1$, so folgt (Behufs der weiteren Auflösung):

$$z^5 - \tfrac{7}{6}z^4 + \tfrac{10}{9}z^3 - \tfrac{4}{9}z^2 + \tfrac{2}{3}z - \tfrac{2}{9} = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung liegt zwischen 0 und 1; folglich ist annähernd $z = \frac{2}{9} : \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Nach der Newton'schen Methode findet man genauer $z = 0{,}36$ und hieraus $y = \pm 0{,}6$; $x = \pm 1{,}2$. Die andern Wurzeln sind imaginär.

Anmerk. Eine andere Methode mag noch mitgetheilt werden. Es mögen gegeben sein:

1) $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + px^2 + qx + r = 0$

2) $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Px^2 + Qx + R = 0$,

worin $a, b, \ldots r, A, B, \ldots R$ beliebige Functionen einer zweiten Unbekannten y sind.

Man multiplicire beide Gleichungen mit x, die neuen Gleichungen wieder mit x und so fort, bis man die Gleichung 1) $m - 1$ mal, die Gleichung 2) $n - 1$ mal hinter einander mit x multiplicirt hat. Man erhält so $n + m - 2$ neue Gleichungen, also mit den gegebenen zusammen $n + m$ Gleichungen. Betrachtet man nun jede Potenz von x als eine besondere Unbekannte, so hat man außer y noch $n + m - 1$ Unbekannte $(x, x^2, x^3, \ldots x^{n+m-1})$, kann also auf gewöhnlichem Wege die letzteren sämmtlich eliminiren und erhält so eine Gleichung mit der einen Unbekannten y.

§. 243.

Auf höhere Gleichungen mit mehreren Unbekannten führt auch eine Methode, durch welche man aus einer Gleichung mit einer Unbekannten vorkommende Wurzel fortzuschaffen sucht (vergl. Seite 200 unten). Setzt man jede Wurzel einem besondern Buchstaben $(y, z, \ldots)$ gleich, so kann man aus diesen Gleichungen in Verbindung mit der gegebenen die Unbekannten, also auch x, entwickeln. z. B.

Beispiel 1. $\sqrt[3]{4 + x^2} - \sqrt{3 + x} = 1.$

Auflös. Setzt man $\sqrt[3]{4+x^2} = y$ und $\sqrt{3+x} = z$, so hat man:

$$1)\ y - z = 1$$
$$2)\ 4 + x^2 = y^3$$
$$3)\ 3 + x = z^2.$$ Aus 2) und 3) folgt:

$4+(z^2-3)^2 = y^3$, und setzt man statt y aus 1) den Werth ein, so folgt:

$$4+(z^2-3)^2 = (z+1)^3$$ oder, geordnet:

$$z^4 - z^3 - 9z^2 - 3z + 12 = 0.$$

Zunächst findet man $z = 1$, und dividirt man durch $z - 1$, so folgt aus
$$z^3 - 9z - 12 = 0$$
$$z = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}.$$

Die anderen Werthe sind imaginär.

Zu $z = 1$ gehört $x = -2$.

Zu $z = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}$ gehört $x = 3 + \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{81} = 9{,}4068$.

Beide Werthe genügen der Aufgabe.

Beispiel 2. $3\sqrt{x+4} + \sqrt[3]{x-5} = 1$.

Auflös. $x = -3$.

Beispiel 3. $\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x} = 0$.

Auflös. 1) $x+5 = y^2$

2) $x+2 = z^2$

3) $x = v^3$

4) $y - z + v = 0$.

Eliminirt man zuerst x, dann y, endlich z, so folgt:

$$4v^5 - v^4 + 14v^2 - 9 = 0.$$

Hieraus folgt $v = -1$, und durch Division (durch $v+1$) erhält man:

$$4v^4 - 5v^3 + 5v^2 + 9v - 9 = 0.$$

Nach der Newton'schen Näherungsmethode erhält man zwei reelle Wurzeln

$$v = 0{,}768811 \text{ und } v = -1{,}10808958.$$

Die andern Wurzeln sind imaginär. Zu den drei Werthen von v gehören folgende Werthe von x:

$$x_1 = -1;\ x_2 = 0{,}454421;\ x_3 = -1{,}36058.$$

Macht man nun mit den gefundenen Werthen von x die Probe, so findet man, daß die gegebene Gleichung nur zwei reelle Wurzeln hat, nämlich -1 und $-1{,}36058$; hingegen ist der dritte Werth von x (0,454421) eine Wurzel der Gleichung

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x+5} + \sqrt[3]{x} = 0.$$

§. 244.

Das Zurückführen mehrerer Gleichungen mit mehreren Unbekannten auf eine Gleichung mit einer Unbekannten kann in manchen Fällen durch eine geschickte Verbindung der gegebenen Gleichungen auf kürzerem Wege geschehen (vergl. §. 159.). Erschöpfende allgemeine Regeln lassen sich hierüber nicht geben, nur sind Umformungen, wie folgende:

$$(x^2+y^2)-(x-y)^2 = (x+y)^2-(x^2+y^2) = 2xy;$$

$$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) = (x+y)^3-3xy(x+y);$$

$$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = (x-y)^3+3xy(x-y);$$

u. s. w. zuweilen nützlich.

Beispiel 1. 1) $x^3+y^3+z^3 = -1$

2) $x^2+y^2+z^2 = 9$

3) $x+y+z = -1.$

Auflös. Aus 1) und 3) folgt $\frac{x^3+y^3}{x+y} = \frac{1+z^3}{1+z}$ oder:

$$4)\quad x^2-xy+y^2 = \frac{1+z^3}{1+z}.$$

Aus 3) folgt: $x^2+2xy+y^2 = (1+z)^2$, folglich, wenn man aus 4) folgert: $2x^2-2xy+2y^2 = 2\cdot\frac{1+z^3}{1+z}$ und beide Gleichungen addirt: $3x^2 \quad +3y^2 = (1+z)^2+2\frac{1+z^3}{1+z}.$

Setzt man aus 2) $x^2+y^2 = 9-z^2$ in diese Gleichung ein, so folgt: $3(9-z^2) = (1+z)^2+2\frac{1+z^3}{1+z}$; oder:

$$(1+z)\,3\,(9-z^2) = (1+z)^3+2(1+z^3).$$

Bringt man alle Glieder auf eine Seite und sondert $1+z$ ab, so folgt: $(1+z)(z^2-4) = 0.$

Hieraus ergeben sich für z die drei Werthe: -1, $+2$ und -2; und weil die gegebenen Gleichungen symmetrische sind, so müssen sich für x und y dieselben Werthe ergeben, d. h. x, y, z haben in beliebiger Ordnung die Werthe: -1, $+2$, -2.

Beispiel 2. Das Product dreier Zahlen ist 4, ihre Summe $= -1$ und die Summe ihrer Kuben $= -1$; die Zahlen zu finden.

Auflös. 1) $x^3 + y^3 + z^3 = -1$

2) $x + y + z = -1$

3) $xyz = 4.$

Die Gleichung 1) kann man so schreiben:

$$(x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 = -1.$$

Setzt man aus 2) $x + y = -1 - z$, aus 3) $xy = \frac{4}{z}$, so folgt:

$$-(1 + z)^3 + \frac{12}{z}(1 + z) + z^3 = -1 \text{ oder}$$

$$(1 + z)^3 - \frac{12}{z}(1 + z) = 1 + z^3.$$

Man erkennt sofort einen Werth von z, nämlich $z = -1$, und hebt man nun durch $z + 1$, so entsteht: $z^2 = 4$; folglich sind $z = +2$ und $z = -2$ die beiden andern Wurzeln. Wie im vorigen Beispiele haben x, y, z in beliebiger Ordnung die Werthe $-1, +2, -2$.

Beispiel 3. 1) $x^4 + y^4 - z^4 = 1$

2) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

3) $x - y - z = 5.$

Auflös. Aus 2) $(x^2 + y^2)^2 = (9 - z^2)^2$

Aus 1) $x^4 + y^4 = 1 + z^4$, subtrahirt:

4) $2x^2y^2 = 80 - 18z^2.$

Aus 3) $(x - y)^2 = (5 + z)^2.$

Aus 2) $x^2 + y^2 = 9 - z^2$, subtrahirt:

$-2xy = 16 + 10z + 2z^2$ oder

5) $xy = -8 - 5z - z^2.$

Aus 4) und 5) folgt die Gleichung:

$$z^4 + 10z^3 + 50z^2 + 80z + 24 = 0,$$

deren reelle Wurzeln -2 und $-0{,}386369$ sind. Aus 2), 5) und 3) folgt nun leicht: $2x = 5 + z \pm \sqrt{-7 - 10z - 3z^2}$

$2y = -5 - z \pm \sqrt{-7 - 10z - 3z^2}.$

Hieraus erkennt man, daß x und y, wenn man $z = -0{,}386369$ setzt, imaginär werden; folglich hat man nur zwei reelle Auflösungen:

$z =$	-2	-2
$x =$	$+2$	$+1$
$y =$	-1	-2

§. 245.

Zuweilen kann man eine Aufgabe durch folgende Betrachtung lösen: Sind α, β, γ, δ, ... die entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + dx^{n-4} + \ldots + qx + r = 0$, so fanden wir (§. 224.), es muß:

1) $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = a$

2) $\alpha\beta + \alpha\gamma + \ldots\ldots + \beta\gamma + \ldots + \ldots = b$

3) $\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \ldots + \beta\gamma\delta + \ldots + \ldots = c$

4) $\alpha\beta\gamma\delta + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = d$ sein, u. s. w.

Hieraus folgt: Sind die symmetrischen Gleichungen gegeben:

1) $x + y = a$

2) $xy = b$, so sind x und y die entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung $t^2 + a \cdot t + b = 0$. (Vergl. §. 159. Beisp. 2. Anmerk.)

Sind gegeben: 1) $x + y + z = a$

2) $xy + xz + yz = b$

3) $xyz = c$, so sind x, y, z, die entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung $t^3 + a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0$.

Sind gegeben: 1) $x + y + z + v = a$

2) $xy + xz + xv + yz + yv + zv = b$

3) $xyz + xyv + xzv + yzv = c$

4) $xyzv = d$,

so sind x, y, z, v die entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung

$$t^4 + a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d = 0; \text{ u. s. w.}$$

Beispiel 1. 1) $x + y = 2$; 2) $xy = -8$.

Auflös. x und y sind die entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung $t^2 + 2t - 8 = 0$. Hieraus folgt t gleich $+2$ und -4; folglich haben x und y in beliebiger Ordnung die Werthe -2 und $+4$.

Beispiel 2. 1) $x + y + z = -2$.

2) $xy + xz + yz = -5$.

3) $xyz = 6$.

Auflös. x, y, z sind die entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung $t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0$. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $+1$, -2 und $+3$; folglich haben x, y, z in beliebiger Ordnung die Werthe -1, $+2$ und -3.

Beispiel 3. 1) $x - y - z = 2$

2) $xy + xz - yz = 5$

3) $xyz = -6$.

Auflös. Setzt man $y = -v$ und $z = -w$, so folgt:

1) $x + v + w = 2$

2) $xv + xw + vw = -5$

3) $xvw = -6$.

Es sind sonach x, v, w die entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung $t^3 + 2t^2 - 5t - 6 = 0$. Die Wurzeln dieser Gleichung sind -1, $+2$ und -3; folglich haben x, $-y$ und $-z$ in beliebiger Ordnung die Werthe $+1$, -2 und $+3$. Hieraus ergeben sich sechs Auflösungen:

x	+1	+1	−2	−2	+3	+3
y	+2	−3	−1	−3	−1	+2
z	−3	+2	−3	−1	+2	−1

Berichtigung.

Seite 30, Zeile 13 von oben lies gleichen statt gleicher
„ 131, „ 6 „ unten „ andererseits statt anderseits
„ 180, „ 14 „ oben fehlt die Charakteristik -2
„ 181, „ 6 „ unten lies 6081,9436 statt 608,19436
„ 181, „ 1 „ unten „ 0,21544346 statt 0,21544341
„ 260, „ 6 „ oben „ i statt i
„ 266, „ 1 „ unten „ $\frac{a}{1+3a}$ statt $\frac{a}{1+3}$
„ 332, „ 10 „ unten „ IV. statt VI.
„ 420, „ 8 „ unten ist hinzuzufügen $\mp \frac{n}{(2n-1)\cdot 2^{n-1}} \pm \ldots$, je nachdem n $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ ist.

Berlin, gedruckt in der Königlichen Geheimen Ober-Hofbuchdruckerei (R. v. Decker).

Bodenstedt, Friedrich. Ada, die Lesghierin. Ein Gedicht. Min.-Ausgabe. 1853. geh. 1 Thlr. 15 sgr. Eleg. geb. 1 Thlr. 25 sgr.

— — **Demetrius.** Historische Tragödie in fünf Aufzügen. Miniatur-Ausgabe. (Gewidmet Sr. Majestät dem Könige Maximilian von Bayern.) 1856. geh. 1 Thlr. 7½ sgr. Elegant gebunden 1 Thlr. 17½ sgr.

— — **Gedichte.** Erster Band. (Auch unter dem besonderen Titel: **Aus der Heimat und Fremde.**) Min.-Ausg. 1856. geh. 1 Thlr. 7½ sgr. Eleg. geb. 1 Thlr. 17½ sgr.

— — **Gedichte.** Zweiter Band. (Auch unter dem besonderen Titel: **Altes und Neues**). Min.-Ausg. 1859. geh. 1 Thlr. 15 sgr. Eleg. geb. 1 Thlr. 25 sgr.

— — **Shakespeare's Zeitgenossen und ihre Werke.** In Charakteristiken und Uebersetzungen. Erster Band. **John Webster.** 1858. 8. geh. 1 Thlr. 15 sgr. Zweiter Band. **John Ford.** 1860. 8. geh. 1 Thlr. 15 sgr. Dritter Band. **John Lilly, Robert Greene** und **Christoph Marlowe.** 1860. 8. geh. 1 Thlr. 15 sgr.

— — Festspiel zur Jubelfeier des hundertjährigen Geburtstages **Friedrich Schillers** in München. 1859. gr. 8. 5 sgr.

— — **König Authari's Brautfahrt.** Dramatisches Gedicht in drei Aufzügen. Miniatur-Ausgabe. 1860. geh. 18 sgr. Elegant gebunden 28 sgr.

— — **Aus Ost und West.** Sechs Vorlesungen. 1861. 8. geh. 1 Thlr.

— — **Epische Dichtungen.** Miniatur-Ausgabe. 1862. geh. 24 sgr. Elegant gebunden 1 Thlr. 4 sgr.

— — **Ausgewählte Dichtungen.** 1864. kl. 8. geh. 20 sgr. Eleg. geb. 1 Thlr.

— — **Gesammelte Schriften.** Gesammt-Ausgabe in 12 Bänden. 1865. 1866. 8. geh. à Band 15 sgr.
8 Bände sind bereits erschienen.

Bothe, H., Sec.-Lieutenant. **Geschichte des Thüringischen Ulanen-Regimentes Nr. 6.** Im Auftrage des Regiments bearbeitet. 1865. 8. geh. 1 Thlr.

Carlyle, Thomas. Ueber Helden, Heldenverehrung und das Heldenthümliche in der Geschichte. Sechs Vorlesungen. Deutsch von J. Neuberg. 1853. gr. 8. geh. 1 Thlr. 22½ sgr.

— — **Geschichte Friedrichs II. von Preußen, genannt Friedrich der Große.** Deutsch von J. Neuberg. (Deutsche vom Verfasser autorisirte Uebersetzung). gr. 8. geh. 1858—1866. Bd. I.—IV. 11 Thlr. 7½ sgr.

— — **Dieselbe.** Volks-Ausgabe. kl. 8. 1863—1866. Band I.—IV. geh. à 20 sgr. Gebunden mit goldgepreßtem Deckel à 25 sgr.

Courbiere, R. de l'Homme de, Lieutenant im Leib-Infanterie-Regiment. **Geschichte der Brandenburgisch-Preußischen Heeres-Verfassung.** 1851. gr. 8. geh. 1 Thlr.

Expedition, Preussische, nach Ost-Asien. Nach amtlichen Quellen. gr. Lex.-8. Erster Band. 1864. Mit 12 Illustrationen und 2 Karten. geh. 4 Thlr. in engl. Einband 4 Thlr. 10 sgr.

Zweiter Band. 1866. Mit 12 Illustrationen. geh. 4 Thlr. in engl. Einband 4 Thlr. 10 sgr.

Expedition, preussische, nach Ost-Asien. **Ansichten aus Japan, China und Siam.** (Im Auftrage der Königl. Regierung herausgegeben von A. Berg.) 1865. Format: 20½ Zoll zu 26½ Zoll, mit Umschlag. Text in deutscher, französischer und englischer Sprache. Druck der Ansichten: photo-lithograph. und chromo-lithograph., von Korn (Process Osborne.) Das Heft 8 Thlr. Heft I. 1 Blatt Haupttitel, 3 Blatt Text, 6 Blatt Ansichten. Heft II. 3 Blatt Text, 6 Blatt Ansichten. Heft III. 3 Blatt Text, 6 Blatt Ansichten.

Fontane, Th. Der Schleswig-Holsteinsche Krieg im Jahre 1864. 1866. gr. Lex.-8. Mit 4 Portraits, 56 in den Text gedruckten Abbildungen und Plänen in Holzschnitt und 9 Karten in Steindruck. In illustr. Umschlage geh. 2 Thlr. 22½ sgr. cart. 3 Thlr. 2½ sgr.
Feine Ausgabe auf weißem Kupferdruckpapier, eleg. geb. 4 Thlr.

Frédéric le Grand, Oeuvres de. 30 volumes, Table chronologique et Plans. 1846 bis 1857. Imper. 8. Neue Ausgabe in 36 monatlichen Lief. à 1½ Thlr.

Griesheim, Gustav von, General. Vorlesungen über die Taktik. Hinterlassenes Werk. Zweite neu redigirte Auflage. 1860. gr. 8. geh. 2 Thlr. 20 sgr.

Hagen, Dr. A., Prof., **Max von Schenkendorf's Leben, Denken und Dichten.** Unter Mittheilungen aus seinem schriftstellerischen Nachlaß dargestellt. 1863. 8. geh. 1 Thlr.

Hahn, Werner. Kunersdorf, am 12. August 1759. Mit 1 Titelbilde und 4 Plänen. 1852. gr. 8. geh. 18 sgr. Velinpapier geh. 1 Thlr.

— — **Hans Joachim von Zieten,** Königlich Preußischer General der Kavallerie, Ritter des schwarzen Adlerordens, Chef des Regiments der Königl. Leibhusaren, Erbherr auf Wustrau. 1867. Vierte Auflage. Mit 5 Illustrationen. kl. 8. geh. 9 sgr. Elegant gebunden 16 sgr.

— — **Friedrich Wilhelm III. und Luise. König und Königin von Preußen,** 217 Erzählungen aus ihrer Zeit und ihrem Leben. 1860. Zweite Auflage. gr. 8. mit 17 Abbildungen. geh. 18 sgr. Gbd. 25 sgr.

— — **Friedrich, der Erste König in Preußen.** 1861. 2. vielfach verbesserte Aufl. 8. Mit 1 Titelbilde. geh. 20 sgr.

Herwarth von Bittenfeld, Hans, Prem.-Lieut. **Geschichte des Königl. Preuß. 2. Garde-Regiments zu Fuß.** Im Auftrage des Obersten und Kommandeurs von Bentheim für die Mannschaft des Regiments zusammengestellt. 1863. kl. 8. geh. 5 sgr.

Horn, Georg. Voltaire und die Markgräfin von Baireuth. 1865. 8. geh. 1 Thlr.

Lermontoff's, Michail, Poetischer Nachlaß, zum Erstenmal in den Versmaaßen der Urschrift mit Hinzuziehung der bisher unveröffentlichten Gedichte aus dem Russischen übersetzt, mit Einleitung und erläuterndem Anhange und einem biographisch-kritischen Schlußworte versehen von Friedrich Bodenstedt. 2 Bände. Miniatur-Ausgabe. 1852. geh. 3 Thlr. Eleg. geb. 3 Thlr. 20 sgr.

Lippe-Weißenfeld, Ernst, Graf **zur,** Rittmeister a. D. **Geschichte des Königl. Preuß. 6. Husaren-Regiments (ehedem 2. Schlesischen).** Zum Besten der Regiments-Spezialstiftung des Nationaldanks. 1860. Lex.-8. Mit 6 Bildern und 2 geograph. Skizzen. Eleg. gebunden. 4 Thlr.

Passarge, Louis. Aus dem Weichseldelta. Reiseskizzen. 1857. 8. geh. Mit einer Karte. 1 Thlr.

— — **Fragmente aus Italien.** 1860. 8. geh. 1 Thlr.

Peucker, von, General. **Das Deutsche Kriegswesen der Urzeiten** in seinen Verbindungen und Wechselwirkungen mit dem gleichzeitigen Staats- und Volksleben. I. und II. Theil. 1860. gr. 8. geh. 4 Thlr.
III. Theil. (Wanderung über die Schlachtfelder der Deutschen Heere der Urzeiten. I. Theil.) 1864. gr. 8. geh. 2 Thlr.

Preußische Sieges-Chronik 1866. Und Feierlicher Einzug der Sieger in Berlin am 20. und 21. September. 1866. 8. geh. 6 sgr.

Prittwitz und Gaffron, Walter von und **Georg von Viebahn I.,** Sek.-Lieuts. **Geschichte des Königl. Preuß. Kaiser Alexander Garde-Grenadier-Regiments Nr. 1. und seiner Stammtruppen.** 1864. kl. 8. geh. 7½ sgr.

Puschkin's, Alexander, Poetische Werke, übersetzt von Fried. Bodenstedt. Miniatur-Ausgabe. Erster Band: **Gedichte.** 1854. geh. 1 Thlr. 15 sgr.
Zweiter Band: **Eugen Onägin.** Ein Roman in Versen. 1854. geh. 1 Thlr. 15 sgr.
Dramatische Werke. Dritter Band. 1855. geh. 1 Thlr. 15 sgr.
(Dies Werk ist mit 3 Bänden vollständig, jeder Band hat doppelte Titel und wird einzeln verkauft.)

Reumont, Dr. A. von. Die Carafa von Maddaloni. Neapel unter Spanischer Herrschaft. 1851. 2 Bde. 8. geh. 4 Thlr.

— — **Beiträge zur Italienischen Geschichte.** 1853—1857. 6 Bde. 8. geh. 13 Thlr. 15 sgr.

Reumont, Dr. A. von. **Die Jugend Caterina's de Medici.** 1856. Zweite umgearbeitete Auflage. Min.-Ausgabe. geh. Mit einem Titelbilde. 1 Thlr. 15 sgr.

— — **Die Gräfin von Albany.** 1860. 2 Bde. 8. Mit einem Titelbilde. geh. 4 Thlr. 15 sgr. Eleg. geb. 5 Thlr.

— — **Zeitgenossen,** Biografien und Karakteristiken. 1862. 2 Bde. 8. geh. 3 Thlr. 15 sgr.

— — **Bibliografia dei lavori pubblicati in Germania sulla Storia d'Italia.** 1863. 8. geh. 2 Thlr. 20 sgr.

Riese, August, Major ꝛc. **Friedrich Wilhelm's des Großen Churfürsten Winterfeldzug in Preußen und Samogitien gegen die Schweden im Jahre 1678/79.** Ein Beitrag zur brandenburg. Kriegsgeschichte. 1864. gr. 8. geh. Mit Karte des Kriegsschauplatzes. 22½ sgr.

Schneidawind, Dr. Franz Joseph Adolph, Königl. Bayerischer Hofrath. **Prinz Wilhelm von Preußen in den Kriegen seiner Zeit.** Auch ein Lebensbild aus den Befreiungskriegen. Mit dem Bildnisse und Facsimile des Prinzen. 1856. gr. 8. geh. 1 Thlr. 15 sgr.

Shakespeare's, William, Sonette in Deutscher Nachbildung von Friedrich Bodenstedt. 1862. Pracht-Ausg. gr. 8. 2 Thlr. Eleg. geb. 2 Thlr. 20 sgr. Volks-Ausgabe. 2. vielfach verbesserte Auflage. Miniatur-Ausgabe. 1866. 8. Mit dem Portrait Shakespeare's in Photographie. geh. 18 sgr. Eleg. cart. 22½ sgr. Elegant gebunden mit Goldschnitt 1 Thlr.

— — **König Lear.** Deutsch von Friedrich Bodenstedt. 1865. 8. geh. 15 sgr.

Waldemar, Prinz von Preußen. **Die Reise nach Indien in den Jahren 1844 bis 1846.** Aus dem darüber erschienenen Prachtwerke im Auszuge mitgetheilt von J. G. Kutzner, Lehrer in Hirschberg. 1857. Imp.-8. geh. Mit dem Portrait des Prinzen, vier Karten und vier Schlachtplänen. 3 Thlr. 7½ sgr.

Westphalen, F. O. W. H. von, Königlich Preuß. Staatsminister a. D. **Westphalen, der Secretär des Herzogs Ferdinand von Braunschweig-Lüneburg.** Biographische Skizze. 1866. gr. 8. Mit einem Titelbilde in Photographie. geh. 20 sgr.

Westphalen, Chr. H. Ph. Edler von. **Geschichte der Feldzüge des Herzogs Ferdinand von Braunschweig-Lüneburg.** Nachgelassenes Manuscript. Herausgegeben von F. O. W. H. von Westphalen, Königl. Preuss. Staatsminister a. D. 1859. 2 Bände gr. 8. geh. 5 Thlr.

Wittken, Paul von. **Geschichte des Königl. Preuß. Garde-Schützen-Bataillons.** Auf Befehl für die Mannschaft des Bataillons verfaßt. gr. 8. geh. mit 1 Titelbilde. 7½ sgr.

Witzleben, A. von, Oberst-Lieutenant und Kommandeur. **Prinz Friedrich Josias von Coburg-Saalfeld, Herzog zu Sachsen, K. K. und des Heil. Röm. Reiches Feldmarschall.** 1859. 3 Theile. Mit Portrait und Facsimile, gr. Lex. 8., und Atlas mit 17 Karten und Plänen, nebst Erläuterungen. geh. 13⅓ Thlr.

Zum Funfzigjährigen Stiftungsfest des Kaiser Franz Garde-Grenadier-Regiments Nr. 2. kl. 8. geh. 3 sgr.